MAP 2121 - CÁLCULO NUMÉRICO (POLI)

Prova de Recuperação - 16/02/2012 - Duração: 2 horas

Questão 1 (2.5 pontos):

Mostre que a função $f(x) = x^2 - 10\cos x$ possui uma única raiz positiva. Determine um intervalo $[a, b]$ (que contenha $x = 1$), de tal forma que o método de Newton convirja para a raiz positiva qualquer que seja a escolha de x_0 em $[a, b]$. Calcule 3 iterações do método de Newton a partir de $x_0 = 1$ e determine (sem empregar o valor exato da raiz) se x_3 dista menos que 10^{-3} da solução.

Justifique todas suas afirmações!

Questão 2 (2.5 pontos):

Sabe-se que a função tabelada a seguir é da forma $G(x) = \alpha e^{-(\frac{x-\bar{x}}{\sigma})^2}$:

x	-2	-1	0	1	2
$G(x)$	2	5	10	6	1

Utilize um método de mínimos quadrados para estimar os parâmetros α, $\bar{x}$ e σ da Função. (Obs: Para resolver sistemas lineares utilize o método de eliminação de Gauss, trabalhando com 3 significativos.)

Questão 3 (2.5 pontos):

Sabendo que:

$$\arctan(y) = \int_0^y \frac{1}{1+x^2} dx$$

utilize o método de n trapézios de forma a estimar o valor de π com erro menor que 10^{-2}. Baseie a escolha do n adequado na estimativa do erro para integração por n trapézios dada por:

$$Erro \leq \frac{(b-a)h^2}{12} \max_s |f^{(2)}(s)|$$

Questão 4 (2.5 pontos):

Seja $f(x) = 1/x$.

a) Determine o polinômio p de grau menor ou igual a 3 que interpola f nos pontos $1, 4/3, 5/3$ e 2 e utilize-o para estimar $f(3/2)$. b) Use a estimativa de erro na interpolação polinomial para delimitar o erro cometido e compare a estimativa com o erro efetivo (diferença entre o valor exato de $f(3/2)$ e a estimativa polinomial). O resultado é coerente? c) Sendo p_n o polinômio de grau menor ou igual a n que interpola $f(x)$ em $x_0 < x_1 < ... < x_n$, $(n > 0)$, uniformemente espaçados em [1,2] com $x_0 = 1$ e $x_n = 2$, pode-se garantir que $max_{x\in[1,2]}|f(x) - p_n(x)|$ tende a zero quando n tende a infinito? Justifique!

Dado: Erro de Interpolação: $|f(x) - p_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(y)|}{(n+1)!} |\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)|$, para algum y em [a,b].