MAP 2121 - CÁLCULO NUMÉRICO (POLI) - Prova 3 - 24/11/11 Duração: 2 horas.

Questão 1 (2.5 pontos): Faça a análise harmônica da função 2π -periódica, que em $[-\pi,\pi]$ é dada por $f(x)=\frac{\pi^2-x^2}{\pi^2}$, até o harmônico de primeira ordem. Para o cálculo das integrais envolvendo f(x) utilize o método de 4-Trapézios. Estime o erro nos valores dos coeficientes obtidos.

Questão 2 (2.5 pontos): Deseja-se aproximar o valor de $\int_1^2 f(x) dx$ usando o método de n-Simpsons, onde $f(x) = x^5 - x^4 + 2$.

a) Baseado na fórmula do erro determine α e β positivos tal que $\alpha \leq |\int_1^2 f(x) \ dx - S_2| \leq \beta$, onde S_2 é o valor obtido pelo método de 2-Simpsons.

b) Qual o menor valor de n que garante $\left| \int_{1}^{2} f(x) dx - S_{n} \right| \leq 10^{-3}$?

Questão 3 (2.5 pontos): (a) (1.5 ponto) Calcule o polinômio de grau menor ou igual a 4 que interpola a função e^x nos pontos $x_i = i, i = 0, ..., 4$ (use diferenças divididas). Utilize-o para estimar $e^{0.45}$, estime o erro e compare a estimativa com o valor realmente obtido.

(b) (1.0 ponto) Estime o erro que se obteria usando os polinômios cúbicos que se pode extrair da tabela de diferenças do item a) e estime o valor de $e^{0.45}$ com o melhor deles.

Questão 4 (2.5 pontos):

Os polinômios 1, x, $x^2 - 1/3$ e $x^3 - 3x/5$ são ortogonais em relação ao produto interno $\int_{-1}^{1} f(x)g(x) dx$. Use-os para obter os polinômios mônicos ortogonais em relação ao produto interno $\int_{-2}^{2} f(x)g(x) dx$. Qual o polinômio de grau menor ou igual a 2 que melhor aproxima $f(x) = x^3$ em [-2,2] em relação a este produto interno? (pense!)

Fórmulas

Erro no método de n-trapézios: $|E_{nT}| \leq \max_{[a,b]} |f''(x)| (b-a)h^2/12$

Erro de Interpolação: $|f(x)-p_n(x)|=\frac{|f^{(n+1)}(y)|}{(n+1)!}|\prod_{i=0}^n(x-x_i)|,$ para algum y em [a,b].

Erro no método de n-Simpsons: $E_{nS}=-h^4f^(4)(z)(b-a)/180$, para algum z em [a,b].