Cálculo Numérico

Gabaritos não-oficiais

P3 - 2010/2009

MAP 2121 - CÁLCULO NUMÉRICO (POLI)
Prova 3 - 02/12/2010 - Duração: 2 horas

Questão 1 (2.5 pontos) Dada a tabela

x	1	2	4	5
$f(x)$	0	2	12	21

calcule $f(3)$ usando interpolação cúbica. Estime o erro cometido, sabendo que $f(x)$ é um polinômio mônico de grau 4. Calcule $f(3)$ usando interpolação quadrática com os pontos 1, 2, 4 e 2, 4, 5 e compare os resultados.

Questão 2 (2.5 pontos) Explique por que não podemos usar a fórmula do erro de n-trapézios para estimar o erro do cálculo, por este método, de $I = \int_0^1 e^x x^{3/2}\,dx$. Usando integração por partes, mostre que

$$I = \frac{2}{5}\left(e - \int_0^1 e^x x^{3/2}\,dx\right)$$

e aproxime o resultado usando 4-trapézios. Estime o erro.

Questão 3 (2.5 pontos) A fórmula $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f(-1/\sqrt{3}) + f(1/\sqrt{3})$ é exata para polinômios de grau menor ou igual a 3. Use-a para construir os três primeiros polinômios mônicos ortogonais em relação ao produto interno $< u, v >= \int_0^1 u(x)v(x)\,dx$.

Questão 4 (2.5 pontos) Faça a análise harmônica da função 2π-periódica $f(x)$, onde $f(x) = x(2\pi - x)/\pi^2$ em $[0, 2\pi]$, até o harmônico de primeira ordem. Nos cálculos dos produtos internos envolvendo f você deve utilizar o método de n-Simpsons. Mostre que em duas das integrais o uso de 1-Simpson já produz o valor exato da integral, justificando. A integral restante deve ser avaliada por 4-Simpsons. Estime o erro na amplitude do primeiro harmônico. São dados:

Estimativa do erro para n-Simpsons: $|E| \leq max_{x\in[a,b]}|f^{(4)}(x)|\frac{(b-a)^5}{180}$

Estimativa do erro para n-Trapézios $|E| \leq max_{x\in[a,b]}|f^{(2)}(x)|\frac{(b-a)^3}{12}$

Erro na Interpolação: $f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$

Fórmula para derivada do produto: $(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$.

Cálculo Numérico - P3 - 2010

Q2) Quer-se estimar, por n-Trapézios, o valor de $\int_0^1 f(x)dx$, onde $f(x) = e^x x^{3/2}$. Contudo, tem-se que o erro desse método é estimado da seguinte forma:

$|E| \leq \max_{x\in[0,1]} |f^{(2)}(x)| \frac{(1-0)h^2}{12}$, onde h é o tamanho da partição

Mas $f'(x) = x^{3/2}e^x + \frac{3}{2}e^x x^{1/2}$ e

$f''(x) = \frac{3}{2}x^{3/2}e^x + x^{3/2}e^x + \frac{3}{2}(e^x x^{1/2} + \frac{1}{2}e^x x^{-1/2})$,

e não há como encontrar o valor máximo de f'' em $[0,1]$, pois f'' não está definida em $x=0$ (além do mais, $\lim_{x\to 0} x^{1/2} = +\infty$). Logo, não podemos estimar o erro de n-Trapézios por meio de sua respectiva fórmula.

Temos que, aplicando integração por partes:

$\int_0^1 x^{3/2}e^x dx \rightarrow u = e^x \quad du = e^x dx \rightarrow = \frac{2}{5}x^{3/2}e^x\Big|_0^1 - \frac{2}{5}\int_0^1 x^{3/2}e^x dx$
$dv = x^{3/2}dx \quad v = \frac{2}{5}x^{5/2}$

$= \frac{2}{5}\left(e - \int_0^1 \underbrace{x^{3/2}e^x}_{g(x)} dx\right) = I$

Utilizando esta resolução e 4-Trapézios, tem-se que:

$h = (1-0)/4 = 0{,}25$

$\int_0^1 x^{3/2}e^x dx \simeq \frac{0{,}25}{2}\left(g(0) + 2g(0{,}25) + 2g(0{,}5) + 2g(0{,}75) + g(1)\right) =$

$= 0{,}6805 \rightarrow I \simeq \frac{2}{5}(e - 0{,}6805) = 0{,}81151$

O erro ao fazer essa aproximação é dado que:

$|E| \leq \max_{x\in[0,1]} |g''(x)| \frac{(1-0)h^2}{12}$

$g'(x) = \frac{3}{2}x^{3/2}e^x + x^{3/2}e^x$

$g''(x) = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}x^{3/2}e^x + x^{3/2}e^x\right) + \frac{3}{2}x^{3/2}e^x + x^{3/2}e^x$

$|g''(x)| = \left|\frac{5}{2}\left(\frac{3}{2}x^{3/2}e^x + x^{3/2}e^x\right) + \frac{5}{2}x^{3/2}e^x + x^{3/2}e^x\right| \leq$

$\leq \frac{5}{2}\left|\frac{3}{2}x^{3/2}e^x + x^{3/2}e^x\right| + \frac{5}{2}|x^{3/2}e^x| + |x^{3/2}e^x| \leq$ ← em $[0,1]$

$\leq \frac{5}{2}\left|\frac{3}{2}1^{3/2}e^1 + 1^{3/2}e^1\right| + \frac{5}{2}|1^{3/2}e^1| + |1^{3/2}e^1| = 9{,}75e \simeq 26{,}5$

$|E| \leq \frac{26{,}5 \times 0{,}25^2}{12} = 0{,}138$

Q4 Quer-se a análise harmônica de $f(x) = \frac{1}{\pi^2}(2\pi - x)x$, supondo-a periódica de período 2π, em $[0, 2\pi]$, até o harmônico de ordem 1, isto é, a diferença quadrática a ser minimizada é: $\int_0^{2\pi} \{f(x) - (a_0 + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x)\}^2 dx$

Em relação ao "produto interno usual", ou seja, $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$, temos que essas funções 1, $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ são ortogonais entre si e $\langle 1, 1 \rangle = 2\pi$ e $\langle \operatorname{sen} x, \operatorname{sen} x \rangle = \langle \cos x, \cos x \rangle = \pi$. Então os coeficientes a_0, a_1 e b_1 que minimizam essa diferença quadrática são tais que:

$$\begin{pmatrix} 2\pi & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f, 1 \rangle \\ \langle f, \cos x \rangle \\ \langle f, \operatorname{sen} x \rangle \end{pmatrix}$$

Quer-se que essas integrais envolvendo f sejam validadas por 4-Simpson e se verifique que, em duas delas, a aplicação de 1-simpson já fornece o valor exato da integral; logo, faremos que integrar propriamente e numericamente para fazer essa verificação.

* Fazendo as integrais propriamente dítas:

$$\langle f, 1 \rangle = \int_0^{2\pi} \frac{2\pi x - x^2}{\pi^2} dx = \frac{1}{\pi^2}\left(\pi x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi^2}\left(4\pi^3 - \frac{8\pi^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi$$

$$\langle f, \cos x \rangle = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} (2\pi x - x^2)\cos x\,dx = \frac{1}{\pi^2}\left\{(2\pi x - x^2)\operatorname{sen} x\Big|_0^{2\pi} - \right.$$

$u = 2\pi x - x^2 \quad du = (2\pi - 2x)dx$

$dv = \cos x\,dx \quad v = \operatorname{sen} x$

$$\left. - \int_0^{2\pi} (2\pi - 2x)\operatorname{sen} x\,dx \right\} =$$

$u = 2\pi - 2x \quad du = -2dx$

$dv = \operatorname{sen} x\,dx \quad v = -\cos x$

$$= -\frac{1}{\pi^2}\left\{(2\pi - 2x)\cos x\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2\cos x\,dx\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\left((2\pi - 4\pi)\underbrace{\cos 2\pi}_{=1} - (2\pi)\underbrace{\cos 0}_{=1}\right) = \frac{1}{\pi^2}(-4\pi) = -\frac{4}{\pi}$$

$$\langle f, \operatorname{sen} x \rangle = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} (2\pi x - x^2)\operatorname{sen} x\,dx = \frac{1}{\pi^2}\left\{-(2\pi x - x^2)\cos x\Big|_0^{2\pi} + \right.$$

$u = (2\pi x - x^2) \quad du = (2\pi - 2x)$

$dv = \operatorname{sen} x\,dx \quad v = -\cos x$

$$\left. + \int_0^{2\pi} (2\pi - 2x)\cos x\,dx \right.$$

Q4 $u = 2\pi - 2x \quad du = -2dx$; $= (2\pi - 2x)\operatorname{sen}x \Big|_0^{2\pi} + 2\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}x\,dx$

$dv = \cos x\,dx \quad V = \operatorname{sen}x$ $= 0$

* Fazendo as integrais por 1-Simpson: $h = (2\pi - 0)/2.1 = \pi$

$$\langle 1, \varphi \rangle = \int_0^{2\pi} \frac{(2\pi - x)x}{\pi^2}\,dx \simeq \frac{\pi}{3}\left(\varphi(0) + 4\varphi(\pi) + \varphi(2\pi)\right)$$

$$= \frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{\pi^2}\left(0 + 4(2\pi - \pi)\pi + 0\right) = \frac{1}{3\pi}\cdot 4\pi^2 = \frac{4\pi}{3} \rightarrow$$

→ reproduz o valor exato da integral

$$\langle \cos x, \varphi \rangle = \int_0^{2\pi} \frac{\cos x\,(2\pi - x)x}{\pi^2}\,dx \simeq \frac{\pi}{3}\left(0 + 4\cos\pi\,(2\pi - \pi)\pi + 0\right)$$

$$= -\frac{4\pi}{3} \rightarrow \text{não fornece o valor exato da integral}$$

$$\langle \operatorname{sen}x, \varphi \rangle = \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}x\,(2\pi - x)x}{\pi^2}\,dx \simeq \frac{\pi}{3}(0 + 0 + 0) = 0 \rightarrow$$

→ reproduz o valor exato da integral

$\langle \cos x, \varphi \rangle$ deve então ser avaliada por 4-Simpson, conforme solicitado no enunciado: $h = (2\pi - 0)/8 = \frac{\pi}{4}$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x\,(2\pi - x)x}{\pi^2}\,dx = \int_0^{2\pi} H(x)\,dx \simeq \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{3}\left\{H(0) + 4H\left(\frac{\pi}{4}\right) + \right.$$

$$+ 2H\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4H\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 2H(\pi) + 4H\left(\frac{5\pi}{4}\right) + 2H\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 4H\left(\frac{7\pi}{4}\right) + \left.H(2\pi)\right\}$$

$$= \frac{\pi}{12}\left\{\frac{-\sqrt{2}}{2}(2 - \tfrac{1}{4})\tfrac{1}{4}\cdot 4 + 4\cdot\frac{(-\sqrt{2})}{2}\cdot(2 - \tfrac{3}{4})\tfrac{3}{4} + 2(-1) + \right.$$

$$\left. + 4\frac{(-\sqrt{2})}{2}(2 - \tfrac{5}{4})\tfrac{5}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}(2 - \tfrac{7}{4})\tfrac{7}{4}\right\} = -\frac{4{,}83\pi}{12} = -1{,}264$$

* Lembrando que a integral exata da $-\frac{4}{\pi} \simeq -1{,}273$

Como que comparamos nas aproximamos essa integral por 4-Simpson vê-se que:

$$|E| \leq \max_{x \in [a,b]} |H^{(4)}(x)|\,\frac{(2\pi - 0)\,h^4}{180}, \text{ onde } h = \pi/4$$

Q4

$\pi^3 H(x) = \cos x(2\pi x - x^2)$

$\pi^2 H'(x) = \operatorname{sen} x(2\pi x - x^2) + \cos x(2\pi - 2x)$

$\pi^2 H''(x) = -[\operatorname{sen} x(2\pi - 2x) + (2\pi x - x^2)\cos x] + \cos x(-2) - \operatorname{sen} x(2\pi - 2x)$

$= (x^2 - 2\pi x)\cos x + 2\operatorname{sen} x(2x - 2\pi) - 2\cos x$

$\pi^2 H'''(x) = (2x - 2\pi)\cos x - (x^2 - 2\pi x)\operatorname{sen} x + 2\cos x(2x - 2\pi) +$

$+ 4\operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen} x = 3(2x - 2\pi)\cos x - (x^2 - 2\pi x)\operatorname{sen} x + 6\operatorname{sen} x$

$\pi^2 H^{(4)}(x) = 3[2\cos x - \operatorname{sen} x(2x - 2\pi)] - (x^2 - 2\pi x)\cos x -$

$- (2x - 2\pi)\operatorname{sen} x + 6\cos x = (2\pi x - x^2)\cos x + 12\cos x + 4(2\pi - 2x)\operatorname{sen} x$

$\pi^2 |H^{(4)}(x)| = |(2\pi x - x^2)\cos x + 12\cos x + 4(2\pi - 2x)\operatorname{sen} x| \leq$

$\leq |2\pi x - x^2||\cos x| + 12|\cos x| + 4|2\pi - 2x||\operatorname{sen} x| \overset{\text{em } [0,2\pi]}{\leq}$

$\leq |2\pi(\pi) - (\pi)^2| \cdot 1 + 12 \cdot 1 + 4|2\pi - 2(0)| \cdot 1 = \pi^2 + 12 + 8\pi = 47$

Portanto, como $|H^{(4)}(x)| \leq \frac{47}{\pi^2}$ em $[0,2\pi]$, $|E| \leq \frac{47}{\pi^2} \cdot \frac{2\pi}{180}\left(\frac{\pi}{4}\right)^4 = 0{,}0633$

Observação: de fato, vemos que nessa aproximação e seu respectivo erro "cobrem" o valor exato da integral, isto é, $-1{,}273 \in]-1{,}264 - 0{,}0633, -1{,}264 + 0{,}0633[$

Agora, vamos calcular os coeficientes a_0, a_1 e b_1:

$(2\pi)a_0 = \frac{4}{3}\pi \quad a_0 = \frac{2}{3}$

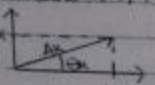
$(\pi)a_1 = -\frac{4}{3}\pi \quad a_1 = -\frac{4}{3}$ ← aqui é a aproximação mesmo!

$(\pi)b_1 = 0 \quad b_1 = 0$

$\therefore \frac{1}{\pi^2}(2\pi - x)x \approx \frac{2}{3} - \frac{4}{3}\cos x$

Temos que o primeiro (e qualquer) harmônico pode ser escrito da seguinte forma: (R, nos casos, é 1)

$a_R \cos(Rx) + b_R \operatorname{sen}(Rx) = A_R \cos(\theta_R + Rx)$, onde vale a seguinte identidade vetorial: $(b_R, a_R) = (A_R \cos\theta_R, A_R \operatorname{sen}\theta_R)$, onde A_R é a amplitude e θ_R é a fase dos harmônicos de ordem R.



Descrevendo, eles são tais que $A_R^2 = a_R^2 + b_R^2$ e $\theta_R = \operatorname{arctg}(a_R/b_R)$

No nosso caso, $A_1 = a_1$ (pois $b_1 = 0$), ou seja, o erro nessa amplitude A_1 é o mesmo que cometemos em a_1, isto é, $|E| \leq 0{,}0633$ //

Q3

Diz-se que a fórmula $\int_{-1}^{1} f(x)dx = f(-1/\sqrt{3}) + f(1/\sqrt{3})$ é exata se f for um polinômio de grau menor ou igual a 3. Com isso, quer-se os 3 primeiros polinômios mônicos ortogonais em relação ao produto interno: $\langle f,g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$

* Primeiro devemos construir esses polinômios mônicos no intervalo $[-1,1]$ e depois usar alguma transformação linear que os leve ao intervalo $[0,1]$.

Temos que $p_0(x) = 1$, sempre (afinal, ele é o único polinômio mônico de grau zero). E $p_1(x) = x + a$; o valor de a sai da condição $\langle p_0, p_1 \rangle = 0$

$$\langle p_0, p_1 \rangle = \langle 1, x-a \rangle = \int_{-1}^{1} (x-a)dx = \frac{1}{\sqrt{3}} - a - \frac{1}{\sqrt{3}} - a = 2a = 0 \leftrightarrow a = 0$$

com $p_1(x) = x$, falta $p_2(x) = x^2 + ax + b$, no qual os valores de a e b saem das condições $\langle p_0, p_2 \rangle = \langle p_1, p_2 \rangle = 0$

$$\langle p_0, p_2 \rangle = \langle 1, x^2+ax+b \rangle = \int_{-1}^{1} (x^2+ax+b)dx = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{a}{\sqrt{3}} + b + \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{a}{\sqrt{3}} + b = \frac{2}{3} + 2b = 0 \leftrightarrow b = -\frac{1}{3}$$

$$\langle p_1, p_2 \rangle = \langle x, x^2+ax+b \rangle = \int_{-1}^{1} (x^3+ax^2+bx)dx = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \frac{a}{(\sqrt{3})^2} + \frac{b}{\sqrt{3}} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \frac{a}{(-\sqrt{3})^2} - \frac{b}{\sqrt{3}} = \frac{2a}{3} = 0 \leftrightarrow a = 0$$

$\therefore p_2(x) = x^2 - 1/3$

Agora que já temos polinômios ortogonais em $[-1,1]$, isto é, $p_i : [-1,1] \to \mathbb{R}$, podemos transferi-los para $[0,1]$ com a seguinte transformação $L : [0,1] \to [-1,1]$:

$$\begin{array}{ccc} 0 & -1 & \\ x & y & \frac{y+1}{1+1} = \frac{x-0}{1-0} \to y = 2x-1 = L(x) \\ 1 & 1 & \end{array}$$

Temos assim que os polinômios que buscamos $(\bar{p}_i)$ em $[0,1]$ são dados por $\bar{p}_i = p_i(L(x))$

$\to \bar{p}_0 = p_0 = 1$

$\bar{p}_1(x) = p_1(2x-1) = 2x-1$, ↑ temos que esses polinômios

Q3

não é mônico tal qual desejamos; para que ele o seja, deveremos dividi-lo por 2, o que não interfere em nada, pois, se $\langle \bar{p}_0, \bar{p}_1 \rangle = 0$, então $\langle \bar{p}_0, \frac{1}{2}\bar{p}_1 \rangle = \frac{1}{2}\langle \bar{p}_0, \bar{p}_1 \rangle = 0$, ou seja, um múltiplo seu qualquer será igualmente ortogonal a $\bar{p}_0$. Logo $\bar{p}_1(x) = x - 1/2$

Finalmente $\bar{p}_2(x) = p_2(2x-1) = 4x^2 - 4x + 1 - 1/3 = 2/3$

como este também acabou não sendo mônico, deveremos dividi-lo por 4. Logo, $\bar{p}_2(x) = x^2 - x + 1/6$

* Para conferir se estes são mesmo os polinômios corretos, basta fazer $\langle \bar{p}_i, \bar{p}_j \rangle = \int \bar{p}_i(x)\bar{p}_j(x)\,dx$, com $i \neq j$, e verificar que todos resultam em zero.

Q1

x	1	2	4	5
$\varphi(x)$	0	2	12	21

Quer-se $\varphi(3)$ usando interpolação cúbica.

Utilizando a fórmula de Newton, temos que o polinômio interpolador de φ nesses 4 pontos é:

$p_\varphi[1,2,4,5](x) = \varphi[1] + \varphi[1,2](x-1) + \varphi[1,2,4](x-1)(x-2) + \varphi[1,2,4,5](x-1)(x-2)(x-4)$

Tem-se que: $\varphi[1] = \varphi(1) = 0$

$\varphi[1,2] = \dfrac{\varphi[2]-\varphi[1]}{2-1} = \dfrac{2-0}{1} = 2$

$\varphi[1,2,4] = \dfrac{\varphi[2,4]-\varphi[1,2]}{4-1} = \dfrac{5-2}{3} = 1$

$\varphi[2,4] = \dfrac{\varphi[4]-\varphi[2]}{4-2} = \dfrac{12-2}{2} = 5$

$\varphi[1,2,4,5] = \dfrac{\varphi[2,4,5]-\varphi[1,2,4]}{5-1} = \dfrac{3-1}{4} = \dfrac{1}{12}$

$\varphi[2,4,5] = \dfrac{\varphi[4,5]-\varphi[2,4]}{5-2} = \dfrac{9-5}{3} = \dfrac{4}{3}$

$\varphi[4,5] = \dfrac{\varphi[5]-\varphi[4]}{5-4} = \dfrac{21-12}{1} = 9$

Q1 Portanto, $p_f[1,2,4,5](x) = 0 + 2(x-1) + 1(x-1)(x-2) + \frac{1}{2}(x-1)(x-2)(x-4)$

*para verificar que este polinômio está correto, basta ver que $p_f[1,2,4,5](x) = f(x)$ para $x = 1, 2, 4$ ou 5

$f(3) \cong p_f[1,2,4,5](3) = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (1/2) 2 \times 1 \cdot (-1) = 6 - 1/6$

Temos que o erro que cometemos ao aproximarmos o valor da função pelo polinômio interpolador é:

$E(x) = f(x) - p_f(x) \leq \max_I \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$, onde

x_i são as pontos usados na interpolação e $n+1$ é o número de pontos x_i. Assim, nesse caso, $n+1 = 4$ e $I = [1,5]$

Sabe-se que f é um polinômio mônico de grau 4, isto é,

$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \rightarrow f^{(4)}(x) = 2^2 4$, $\forall x$

$\therefore \max_x f^{(n)}(x) = 24$

$\therefore |E(3)| \leq \frac{24}{4!} |(3-1)(3-2)(3-4)(3-5)| = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = 4$

$\rightarrow |E(3)| \leq 4$

Usando interpolação quadrática em 1, 2, 4:

$p_f[1,2,4] = f[1] + f[1,2](x-1) + f[1,2,4](x-1)(x-2)$

$= 0 + 2(x-1) + 1(x-1)(x-2)$

$f(3) \cong 2 \times 2 + 2 \cdot 1 = 6$

Usando interpolação quadrática em 2, 4, 5:

$p_f[2,4,5] = f[2] + f[2,4](x-2) + f[2,4,5](x-2)(x-4)$

$= 2 + 5(x-2) + 4/3 (x-2)(x-4)$

$f(3) \cong 2 + 5 \times 1 + 4/3 (-1) \cdot 1 = 7 - 4/3 = 6 - 1/3$

A única coisa que podemos dizer é que, de fato, os 3 valores aproximados para $f(3)$ são relativamente próximos pelo menos o erro daquele obtido por interpolação cúbica "cabe" os outros 2); contudo, não somos capazes de avaliar o erro das interpolações quadráticas, pois $f''(x) = 24x + 63$, e desconhecemos o valor de d, mas é válido supor que, assintoticamente, quanto maior o número de pontos na interpolação, menor é o erro (ele cai com $(n+1)!$)