MAP 2121 - CÁLCULO NUMÉRICO (POLI)

Prova 1 - 02/09/2010 - Duração: 2 horas

Questão 1 (2.5 pontos) Considere a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

a) Mostre que f possui três raízes reais.

b) Quais raízes podem ser calculadas pelo método de aproximações sucessivas, com garantia de convergência, usando a função $\Phi(x) = 3 - 1/x^2$? Justifque.

c) Escolha um x_0 inteiro conveniente de forma que a seqüência gerada pela função Φ do item b) seja convergente. Calcule duas iterações. Estime a precisão de x_2.

Questão 2 (2.5 pontos) Partindo de $x_0 = -1$, use o método de Newton para calcular a menor raiz da função da Questão 1 com precisão pré-fixada 0.01. Justifique tudo o que for necessário para garantir a convergência.

Questão 3 (2.5 pontos)

a) Seja Φ uma função contínua com derivadas contínuas até ordem 3 em um intervalo I. Suponha que $\bar{x} \in I$ é um ponto fixo de Φ e que $\Phi'(\bar{x}) = \Phi''(\bar{x}) = 0$. Explique por que, para x_0 suficientemente próximo de $\bar{x}$, a seqüência $\{x_n\}$ gerada pelo método das aproximações sucessivas converge para $\bar{x}$ e $|x_{n+1} - \bar{x}| \leq C|x_n - \bar{x}|^3$ (ordem de convergência 3).

b) Determine p, q e r tais que o método iterativo definido por

$$x_{n+1} = px_n + qc/x_n^2 + rc^2/x_n^5$$

para calcular $\sqrt[3]{c}$ tenha ordem de convergência 3.

Questão 4 (2.5 pontos) Um tanque esférico de raio $1m$ apoiado em uma superfície horizontal plana é usado para armazenar um produto líqüido. Determine, com um erro de $1cm$, qual é a altura do líquido em relação à superfície quando ele ocupa 1/4 do volume do tanque. Explique suas contas.