MAP 2121 - CÁLCULO NUMÉRICO (POLI)

Prova Substitutiva - 17/12/09 - Duração: 2 horas

Questão 1 (2.5 pontos): Empregando-se o método de eliminação de Gauss com condensação pivotal e dois algarismos significativos ao sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 2.0 & -1.0 \\ 2.0 & 1.0 & 3.0 \\ 1.2 & 3.2 & -1.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0 \\ 1.0 \\ -1.0 \end{bmatrix}$$

obtém-se a matriz escalonada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2.0 & 1.0 & 3.0 & 1.0 \\ 0.6 & 2.6 & -3.3 & -1.6 \\ 0.5 & 0.58 & -0.6 & 2.4 \end{array}\right]$$

tendo-se efetuado as permutações $p_1 = 2$ e $p_2 = 3$. Utilizando as informações dadas e aritimética de ponto flutuante com dois algarismos significativos obteve-se a solução aproximada $x = (9.5, -5.8, -4.0)$. Calcule um passo de refinamento desta solução (lembre-se de dobrar a precisão para o cálculo do resíduo).

Questão 2 (2.5 pontos): Um copo de 10cm de altura tem secções transversais circulares de raio $r(h)$, para h de 0 a 10 cm. O raio das secções transversais varia linearmente de 2cm na base do copo a 4 cm em seu topo. O volume de água (em cm^3) no copo, estando cheio até uma altura a, é dado por $V(a) = \int_0^a \pi r^2(h)\, dh$. Até que altura deve-se encher o copo para que ele contenha $150cm^3$ de água? Deseja-se usar o método de Newton para calcular a solução com erro menor que 10^{-3}. Determine um intervalo contendo $x = 10$ de forma a garantir a convergência para qualquer valor inicial neste intervalo, justificando porque. Calcule então a solução a partir de $x_0 = 10$ com a precisão desejada.

Questão 3 (2.5 pontos): Dada a fórmula de integração numérica:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = w_1(f(-x_1) + f(x_1)) + w_2 f(0) \quad ,$$

onde $w_1 = 5/9$, $x_1 = \sqrt{3/5}$ e $w_2 = 8/9$.

a) Use a fórmula para calcular $\int_1^2 xe^x$ e determine o erro em relação ao valor exato da integral (use a precisão de sua calculadora).

b) Calcule a mesma integral com 2-Simpsons e estime o n para que o método de n-Simpsons leve a um erro menor que 10^{-5}. O erro no método de n-Simpsons é menor ou igual a $max_{[a,b]}|f^{(4)}(x)|(b-a)h^4/180$, onde $h = (b-a)/2n$.

Questão 4 (2.5 pontos): É dada a seguinte função tabelada:

x	-2.0	-1.0	0.0	1.0	2.0
f(x)	17.0	5.0	1.0	-1.0	-7.0

a) Determine o polinômio p de grau menor ou igual a 3 que interpola f nos pontos -2,-1,1 e 2, usando diferenças divididas, e avalie $p(0)$.

b) Determine o polinômio de grau menor ou igual a 4 que melhor aproxima f segundo o MMQ em relação ao produto interno $< f, g >= \sum_{i=-2}^{2} f(i)g(i)$