Cálculo Numérico

Gabaritos não-oficiais

P3 - 2010/2009

MAP 2121 - CÁLCULO NUMÉRICO (POLI) - Prova 3 - 10/12/09

Duração: 2 horas. Nesta prova é vedado o uso de calculadora.

Questão 1 (2.0 pontos): Faça a análise harmônica da função 2-periódica, que em [-1,1] é dada por $f(x) = x + 1$, até o harmônico de primeira ordem.

Questão 2 (3.0 pontos): É dada a seguinte função tabelada:

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
f(x)	0.0	0.1	0.3	0.58	0.92	1.3	1.7	2.1	2.48	2.82	3.1

a) Construa a tabela de diferenças divididas de $f(x)$ até as diferenças de segunda ordem (os resultados serão inteiros, não erre as contas) e use o fato de que $f[x, y, z] = f''(w)/2$ para algum w entre x e z (caso x, y, z estejam ordenados), para estimar o máximo da segunda derivada de f em [0,1].

b) Determine o polinômio de grau menor ou igual a 10 que interpola os pontos da tabela e determine o máximo de sua segunda derivada e compare com o item a.

c) Deseja-se utilizar o método dos trapézios para calcular $\int_0^1 f(x)\,dx$ com erro menor ou igual a 1/30. Determine o maior h que garante este erro e calcule a integral, baseando-se na estimativa de erro para o método dos trapézios e no item a. (O erro no método dos trapézios é menor ou igual a $max_{[a,b]}|f''(x)|(b-a)h^2/12$)

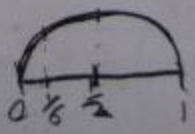
Questão 3 (2.5 pontos): O polinômio interpolador de uma função f nos pontos $x_i, i = 0, .., n$ na forma de Lagrange é dado por

$$p(x) = L(x)\sum_{i=0}^{n} \frac{w_i}{x - x_i} f(x_i)$$

onde $L(x) = \Pi_{i=0}^{n}(x - x_i)$ e w_i são os pesos baricêntricos. Determine os pesos em relação aos pontos 0, 1/6, 1/2 e 1 e utilize-os para determinar o valor do polinômio p de grau 3 que interpola $f(x) = sin(\pi x)$ nestes pontos, quando avaliado em $x = 1/3$. Estime o erro entre p(1/3) e f(1/3). ($|f(x) - p(x)| \leq max_{y\in[a,b]}|f^{(4)}(y)|L(x)/4!$. Use que $\pi^4 < 100$.)

Questão 4 (2.5 pontos):

Uma fórmula de integração numérica para $\int_0^3 f(x)\,dx$ baseada em interpolação por polinômios de grau 3 nos pontos 0, 1, 2 e 3 é obtida aproximando-se a integral de f pela integral de seu polinômio interpolador p_3. Obtenha esta fórmula e utilize-a para avaliar $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$. (Sugestão: escreva p_3 na forma de Lagrange e use um método numérico conhecido, exato para polinômios de grau 3, para avaliar as integrais dos polinômios de Lagrange).



Cálculo Numérico - P3 - 2009

Q1) Quer-se a análise harmônica da função 2-periódica que, em $[-1,1]$, é dada por $f(x) = x+1$, até o harmônico de ordem 1.

Fazendo uma mudança de intervalo de $[-1,1]$ para $[-\pi,\pi]$, temos:

$$\frac{x-(-1)}{1-(-1)} = \frac{u-(-\pi)}{\pi-(-\pi)} \rightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{u+\pi}{2\pi} \rightarrow$$

$$\begin{array}{c|c} -1 & -\pi \\ x & u \\ 1 & \pi \end{array} \rightarrow u = \pi x \rightarrow \boxed{x = \frac{u}{\pi}}$$

$$\therefore f(u) = \frac{u}{\pi} + 1, \quad u \in [-\pi,\pi]$$

Como se deseja a análise até o 1º harmônico, queremos aproximar $f(u)$ por $w(u) = a_0 + a_1\cos(u) + b_1 \operatorname{sen}(u)$

Definindo $\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$ e valendo que as funções $\{1, \operatorname{sen}(u), \cos(u)\}$ são ortogonais entre si em relação a esse produto interno, podemos montar o sistema normal (diagonal). Assim:

$$\underline{\underline{a_0}} = \frac{\langle 1,f\rangle}{\langle 1,1\rangle} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{u}{\pi}+1\right)du = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} u\,du}_{\substack{\text{ímpar}\\ 0}} + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} du}_{2\pi}\right) = \underline{\underline{1}}$$

$$\underline{\underline{a_1}} = \frac{\langle \cos(u), f\rangle}{\langle \cos(u),\cos(u)\rangle} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{u}{\pi}+1\right)\cos u\,du = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} u\cos u\,du}_{\substack{\text{ímpar}\to\text{ímpar}\to\text{par}\\ \text{ímpar}\to 0}} + \right.$$

$$\left. + \int_{-\pi}^{\pi}\cos u\,du\right) = \frac{\operatorname{sen} u}{\pi}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \underline{\underline{0}}$$

$$\therefore \underline{\underline{b_1}} = \frac{\langle \operatorname{sen} u, f\rangle}{\langle \operatorname{sen} u, \operatorname{sen} u\rangle} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{u}{\pi}+1\right)\operatorname{sen} u\,du = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} u\operatorname{sen} u\,du}_{\substack{\text{ímpar}\to\text{ímpar}\\ \text{par}}} + \right.$$

$$\left. + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen} u\,du}_{\substack{\text{ímpar}\\ 0}}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} u\operatorname{sen} u\,du\right) = \frac{2}{\pi^2}\left(-u\cos u\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos u\,du\right)$$

$$\left[\begin{array}{ll} i = u & di = du \\ dj = \operatorname{sen} u\,du & j = -\cos u \end{array}\right] = \frac{2}{\pi^2}\left(-\pi(-1) - 0 + \cancel{\operatorname{sen} u}^{\,0}\Big|_0^{\pi}\right) = \underline{\underline{\frac{2}{\pi}}}$$

Portanto, $w(u) = 1 + \frac{2}{\pi}\operatorname{sen} u, \quad u \in [-\pi,\pi]$

Q1) Voltando agora para a variável x, isto é, fazendo $u = \pi x$, temos finalmente que:

$$w(u(x)) = 1 + \frac{2}{\pi}\,\text{sen}(\pi x), \quad x \in [-1, 1]$$

Q2) a) Construindo a tabela de diferenças divididas, temos:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$f(x)$	0	0,1	0,3	0,58	0,92	1,3	1,7	2,1	2,48	2,82	3,1
	1	2	2,8	3,4	3,8	4	4	3,8	3,4	2,8	
	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3		
	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{10}{3}$			
	0	0	0	0	0	0	0				

Daí para frente, todas as diferenças divididas vão anular. Como $f''(w) = 2!\,f[x,y,z]$, para algum w entre x e z (ou x, y, z estiverem ordenados), uma boa estimativa para o máximo da 2ª derivada de f é duas vezes o maior valor das diferenças divididas de 2ª ordem, que é 5. Então:

$\max f''(x) = 2 \times 5 = 10$

b) Utilizando a tabela de diferenças divididas para construir o polinômio interpolador de grau menor ou igual a 10, temos:

$$p(x) = 0 + 1(x-0) + 5(x-0)(x-0{,}1) - \tfrac{10}{3}(x-0)(x-0{,}1)(x-0{,}2)$$
$$= x + 5x^2 - 0{,}5x - \tfrac{10}{3}(x^2 - 0{,}3x + 0{,}02)\,x$$
$$= -\tfrac{10}{3}x^3 + x^2 - \tfrac{0{,}2}{3} + 5x^2 + 0{,}5x$$
$$= -\tfrac{10}{3}x^3 + 6x^2 + \tfrac{12}{30}x$$

$p'(x) = -10x^2 + 12x$

$p''(x) = -20x + 12$

Q2) Tenho que $\max_{x\in[0,1]} p''(x) = p''(0) = 12$, que é um resultado próximo ao obtido no item (a)

(c) $|E_{trapézios}| < \max_{[0,1]} |f''(x)| \frac{(b-a)^3}{n^2} \cdot \frac{1}{12} < \frac{1}{30}$, onde

$(b-a) = 1-0 = 1$ e n é o número de intervalos em que iremos particionar $[a,b] = [0,1]$

$\rightarrow \frac{10}{12} \cdot \frac{1^3}{n^2} < \frac{1}{30} \leftrightarrow n^2 \geq \frac{300}{12} = \frac{100}{4} \leftrightarrow n \geq \frac{10}{2} = 5$

$\therefore$ O menor valor que de n que garante $|\text{erro}| < 1/30$ é $n=5$. Assim, aplicando 5-trapézios, temos:

$$\int_0^1 f(x)dx \simeq \frac{h}{2}\left\{f(0) + 2f(0,2) + 2f(0,4) + 2f(0,6) + 2f(0,8) + f(1)\right\} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}\left\{0 + 2\cdot 0,3 + 2\cdot 0,92 + 2\cdot 1,7 + 2\cdot 2,48 + 3,1\right\} =$$

$$= \frac{1}{10} \cdot 13,9 = \underline{1,39}$$

Q3) $p(x) = L(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{w_i}{x - x_i} f(x_i)$

x	0	1/6	1/2	1
$\operatorname{sen}(\pi x)$	0	0,5	1	0

Desenvolvendo a fórmula:

$$p(x) = (x-0)(x-1/6)(x-1/2)(x-1)\left\{\frac{w_0 f(0)}{x-0} + \frac{w_1 f(1/6)}{x-1/6} + \frac{w_2 f(1/2)}{x-1/2} + \frac{w_3 f(1)}{x-1}\right\}$$

$$p(x) = w_0 f(0)(x-1/6)(x-1/2)(x-1) + w_1 f(1/6)(x-0)(x-1/2)(x-1) + w_2 f(1/2)(x-0)(x-1/6)(x-1) + w_3 f(1)(x-0)(x-1/2)(x-1/6)$$

Como $p(x)$ é um polinômio de f, tem-se que $f(x_i) = p(x_i)$, para $i = 0,1,2,3$. Assim:

$p(0) = w_0 f(0)(-1/6)(-1/2)(-1) = f(0) \leftrightarrow w_0 = -12$

$p(1/6) = w_1 f(1/6)(1/6)(-3/6)(-5/6) = f(1/6) \leftrightarrow w_1 = 6^3/10$

$p(1/2) = w_2 f(1/2)(1/3)(1/6)(-1/2) = f(1/2) \leftrightarrow w_2 = -12$

Q3) $p(1) = w_3 f(1)(1)(3/6)(1/2) = f(1) \leftrightarrow w_3 = 12/5$

$p(1/3) = 0 + \frac{6^3}{10} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{-1}{6}\right)\left(\frac{-2}{3}\right) + (-12)(1)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{-2}{3}\right) + 0 =$

$= 38/45$

O erro $|f(1/3) - p(1/3)|$ que cometemos é dado por:

$|E(x)| \leq \max_{[0,1]} |f^{(4)}(x)| |(x-0)(x-1/6)(x-1/2)(x-1)| \frac{1}{4!}$

$f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$ $\qquad f''(x) = -\pi^3 \cos(\pi x)$

$f'(x) = \pi \cos(\pi x)$ $\qquad f^{(4)}(x) = \pi^4 \operatorname{sen}(\pi x)$

$f''(x) = \pi^2 \operatorname{sen}(\pi x)$

$|f^{(4)}(x)| \leq \pi^4 \cdot 1 \leq 100$

$\rightarrow |E(1/3)| \leq \frac{100}{4.3.2} \left| \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}\left(\frac{-1}{6}\right)\left(\frac{-2}{3}\right) \right| = \frac{25}{972}$

Q4) $L_j(x) = \prod_{k \neq j} \frac{(x - x_k)}{(x_j - x_k)}$

Utilizando a fórmula de Lagrange, temos:

$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{-6}$

$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-0)(1-3)} = \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{2}$

$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{-2}$

$L_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{6}$

$\rightarrow p(x) = f(0) L_0(x) + f(1) L_1(x) + f(2) L_2(x) + f(3) L_3(x)$

Então $\int_0^3 p(x)dx = f(0) \int_0^3 L_0(x)dx + f(1) \int_0^3 L_1(x)dx +$

$+ f(2) \int_0^3 L_2(x)dx + f(3) \int_0^3 L_3(x)dx$

Q4) Como a fórmula de 1-Simpson é exata para polinômios de grau menor ou igual a 3, podemos utilizá-la para calcular o valor exato das integrais dos polinômios de Lagrange:

$$\int_0^3 L_j(x)dx = \frac{h}{3}\left\{L_j(0) + 4L_j(1,5) + L_j(3)\right\}, \text{ onde } h = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$\int_0^3 L_0(x)dx = \frac{1}{2}\left\{1 + 4\left(-\frac{1}{16}\right) + 0\right\} = \frac{3}{8}$$

$$\int_0^3 L_1(x)dx = \frac{1}{2}\left\{0 + 4\left(\frac{9}{16}\right) + 0\right\} = \frac{9}{8}$$

$$\int_0^3 L_2(x)dx = \frac{1}{2}\left\{0 + 4\left(\frac{9}{16}\right) + 0\right\} = \frac{9}{8}$$

$$\int_0^3 L_3(x)dx = \frac{1}{2}\left\{0 + 4\left(-\frac{1}{16}\right) + 1\right\} = \frac{3}{8}$$

$$\therefore \int_0^3 p(x)dx = \frac{3}{8}\left(f(0) + 3f(1) + 3f(2) + f(3)\right)$$

Para calcular $\int_1^2 \frac{dx}{x}$, vamos fazer a seguinte mudança de variáveis a fim de mudar os extremos de integração para que a fórmula seja utilizada:

$$\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ x & \mu \\ 2 & 3 \end{array} \qquad \frac{x-1}{2-1} = \frac{\mu - 0}{3-0} \leftrightarrow \mu = 3x - 3 \leftrightarrow x = \frac{\mu+3}{3}$$

$$\rightarrow dx = \frac{1}{3}d\mu$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\frac{\mu+3}{3}}d\mu = \int_0^3 \frac{1}{\mu+3}d\mu \overset{\text{pela fórmula}}{\simeq} \frac{3}{8}\left(\frac{1}{3} + 3\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) =$$

$$= \frac{3}{8}\cdot\frac{111}{60} = \frac{111}{160}$$