MAP 2121 - CÁLCULO NUMÉRICO (POLI) - Prova 2 - 23/10/08

Duração: 2 horas. Nesta prova é vedado o Uso de Calculadora

Questão 1 (2.0 pontos): Sabendo que $f(0) = 1.0$, $f(1) = 3.3$, $f(2) = 9.9$ e $f(3) = 27.0$, aproxime $f(x)$ por uma função do tipo $g(x) = a3^{bx}$ segundo um método dos mínimos quadrados (discreto). Use o valor aproximado de $\log_3(1.1) = 0.09$. Faça as contas sem arredondar os resultados.

Questão 2 (2.5 pontos): Considere os valores de uma função $f(x, y)$ dados na seguinte tabela:

x \ y	-1	0	1
1	-1	1	2
2	-2	1	3

Construa tabelas análogas para as funções 1, y e xy e aproxime $f(x, y)$ por uma função do tipo $g(x, y) = a + by + cxy$ segundo o método dos mínimos quadrados, considerando o produto interno:

$$< f, g >= \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=-1}^{1} f(i, j)g(i, j) \ .$$

Questão 3 (2.5 pontos): Seja $f(x)$ definida no intervalo [1:4] tal que $f(x) = e^{\frac{2x-5}{3}}$, para $x \in [5/2 : 4]$, e $f(x) = f(5 - x)$, para $x \in [1 : 5/2]$. Determine o polinômio de grau menor ou igual a 2 que melhor aproxima $f(x)$ em [1:4], segundo a norma dada pelo produto interno $< f, g >= \int_1^4 f(x)g(x)\, dx$. São dados os 3 primeiros polinômios ortogonais em relação ao produto interno $< f, g >= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx$: $p_0 = 1$, $p_1 = x$, $p_2 = x^2 - 1/3$ e que $< p_0, p_0 >= 2$, $< p_1, p_1 >= 2/3$, $< p_2, p_2 >= 8/45$.

Questão 4 (3.0 pontos): Considere o sistema linear (do EP):

$$t_{i-1,j} + \epsilon\, t_{i,j-1} - 2(1 + \epsilon)t_{i,j} + \epsilon\, t_{i,j+1} + t_{i+1,j} = 0$$

para $i = 1, 2$ e $j = 1, 2$, onde $t_{i,j}$ aproxima o valor da temperatura no ponto (x_i, y_j), com $x_i = ih$, $y_j = jh$ e $h = 1/3$. Considere os valores na fronteira $t(x_i, y_j) = x_i y_j$, nos pontos com $i = 0$ ou $i = 3$, ou $j = 0$ ou $j = 3$. Ordene as incógnitas como: $t_{1,1}$, $t_{2,1}$, $t_{1,2}$, $t_{2,2}$. Escreva o sistema na forma $Ax = b$ e mostre que o método de Gauss-Seidel converge se $\epsilon > 0$. Tome a aproximação inicial $(0, 0, 2/9, 4/9)$ e calcule uma iteração do método de Gauss-Seidel por linhas usando $\epsilon = 1/2$. (Use frações).