MAP 2121 - CÁLCULO NUMÉRICO (POLI)

Prova 1 - 18/09/08 - Duração: 2 horas

Questão 1 (2.0 pontos): Resolva o sistema linear a seguir pelo método de Eliminação de Gauss com condensação pivotal e aritmética de ponto flutuante com 3 algarismos significativos:

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 2.0 & 3.0 \\ 3.0 & -1.0 & 1.0 \\ -1.0 & 3.0 & 2.0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.0 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

Questão 2 (2.5 pontos): Empregando-se o método de eliminação de Gauss com condensação pivotal e 2 algarismos significativos no sistema linear da questão anterior chegamos à matriz escalonada (com os multiplicadores):

$$\begin{bmatrix} 3.0 & -1.0 & 1.0 \\ -0.33 & 2.7 & 2.3 \\ 0.33 & 0.85 & 0.7 \end{bmatrix}$$

tendo-se efetuado as permutações $p_1 = 2$ e $p_2 = 3$. Faça uma etapa de refinamento da solução obtida $x = (0.47, 0.93, -0.43)$ (Não esqueça do resíduo em dupla precisão).

Responda: caso houvesse um erro de conta na triangularização da matriz e mesmo assim o processo de refinamento da solução convergisse, poderíamos garantir que a convergência seria para a solução do sistema original? Justifique!

Questão 3 (2.5 pontos): Suponha que a tecla de dividir de sua calculadora esteja quebrada. O método de Newton pode ajudá-lo a determinar o inverso de um número real $r > 0$, resolvendo a equação $r - 1/x = 0$, sem que seja necessário efetuar divisões no processo. Verifique este fato e mostre que o método será convergente se tomarmos $x_0 = 10^{-k}$, onde 10^k é a primeira potência de 10 maior que r. Calcule $1/39$ com erro menor que 10^{-3} por este método.

Questão 4 (3.0 pontos): Podemos determinar os juros embutidos em compras a prazo da seguinte forma. Toma-se a cada mês o saldo devedor (inicialmente o valor à vista do produto), aplica-se a esse os juros mensais e subtrai-se a prestação paga. Se ao final o saldo devedor se anular, com o mesmo montante inicial poderia se pagar à vista ou à prazo. Portanto a taxa de juros que faz este montante final nulo é a taxa que está embutida nas prestações. Sendo S o valor do produto, p o valor da prestação mensal, n o número de prestações e μ a taxa de juros, obtemos a equação:

$$(1+\mu)^n S - ((1+\mu)^{n-1} + (1+\mu)^{n-2} + \ldots + 1)p = (1+\mu)^n S - \frac{(1+\mu)^n - 1}{\mu} p = 0 \ .$$

Oferta-se um carro, cujo preço à vista é $S = 25.000,00$, por 84 prestações mensais de $p = 499,00$. Determine a taxa de juros μ cobrada (com erro menor que 10^{-2}), utilizando para tal um método de aproximações sucessivas. Justifique todos os passos de forma a garantir a convergência do método.

1) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1.0 & 2.0 & 3.0 & 1.0 \\ 3.0 & -1.0 & 1.0 & 0.0 \\ -1.0 & 3.0 & 2.0 & 1.5 \end{array}\right)$

Eliminação com condensação com 3 algarismos significativos

$\overset{2}{\triangledown}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3.0 & -1.0 & 1.0 & 0.0 \\ 1.0 & 2.0 & 3.0 & 1.0 \\ -1.0 & 3.0 & 2.0 & 1.5 \end{array}\right)$ $p_1 = 2$

$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3.0 & -1.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.33 & 2.33 & 2.67 & 1.0 \\ -0.33 & 2.67 & 2.33 & 1.5 \end{array}\right)$ $p_1 = 2$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3.0 & -1.0 & 1.0 & 0.0 \\ -0.33 & 2.67 & 2.33 & 1.5 \\ 0.33 & 2.33 & 2.67 & 1.0 \end{array}\right)$ $p_1 = 2 \quad p_2 = 3$

$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3.0 & -1.0 & 1.0 & 0.0 \\ -0.33 & 2.67 & 2.33 & 1.5 \\ 0.33 & 0.87 & 0.64 & -0.31 \end{array}\right)$ $p_1 = 2 \quad p_2 = 3$

$$x_3 = \frac{-0.31}{0.64} = -0.48$$

$$x_2 = \frac{1.5 + 2.33 \cdot 0.48}{2.67} = 0.98$$

$$x_1 = \frac{0.98 + 0.48}{3.0} = 0.49$$

Resposta = $x = (0.49, 0.98, -0.48)$.

2)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1.0 & 2.0 & 3.0 & 1.0 \\ 3.0 & -1.0 & 1.0 & 0.0 \\ -1.0 & 3.0 & 2.0 & 1.5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc} 3.0 & -1.0 & 1.0 \\ -0.33 & 2.7 & 2.3 \\ 0.33 & 0.85 & 0.7 \end{array}\right)$$

$p_1 = 2 \quad p_2 = 3$

$x^{(0)} = (0.47, 0.93, -0.43)$

$x^{(1)} = x^{(0)} + c^{(0)}$, $Ac^{(0)} = r^{(0)}$, $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$

$$r^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.0 \\ 1.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.0 & 2.0 & 3.0 \\ 3.0 & -1.0 & 1.0 \\ -1.0 & 3.0 & 2.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.47 \\ 0.93 \\ -0.43 \end{pmatrix}$$

$$r^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.0 \\ 1.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.47 + 1.86 - 1.29 \\ 1.41 - 0.93 - 0.43 \\ -0.47 + 2.79 - 0.86 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.04 \\ -0.05 \\ 0.04 \end{pmatrix}$$

Resolvendo $Ac^{(0)} = r^{(0)}$ usando a triangularização dada e aplicando as mudanças a $r^{(0)}$:

$$\begin{pmatrix} -0.04 \\ -0.05 \\ 0.04 \end{pmatrix} \overset{p_1 = 2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -0.05 \\ -0.04 \\ 0.04 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 = L_2 - (-0.33)L_1 \\ \rightsquigarrow \\ L_3 = L_3 - 0.33L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} -0.05 \\ -0.057 \\ 0.057 \end{pmatrix} \overset{p_2 = 3}{\rightsquigarrow}$$

$$\begin{pmatrix} -0.05 \\ 0.057 \\ -0.057 \end{pmatrix} \overset{L_3 = L_3 - 0.85L_2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -0.05 \\ 0.057 \\ -0.11 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3.0 & -1.0 & 1.0 & -0.05 \\ -0.33 & 2.7 & 2.3 & 0.057 \\ 0.33 & 0.85 & 0.7 & -0.11 \end{array}\right)$$

$$c_3^{(0)} = \frac{-0.11}{0.7} = -0.16$$

$$c_2^{(0)} = \frac{0.057 - 2.3(-0.16)}{2.7}$$

$$c_2^{(0)} = \frac{0.057 + 0.37}{2.7} = \frac{0.43}{2.7} = 0.16$$

$$c_1^{(0)} = \frac{-0.05 + 0.16 + 0.16}{3.0} = 0.09$$

R: $x^{(1)} = (0.56, 1.1, -0.59)$.

Mera comparação:

A. $x_1 = b_1$, sendo x_1 a solução da questão 1, temos b_1 como:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1.01 \\ 0.01 \\ 1.49 \end{pmatrix}$$

Para $Ax_2 = b_2$, sendo x_2 a solução refinada da questão dois, temos:

$$b_2 = \begin{pmatrix} 0.96 \\ 0.01 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \text{ sendo } b = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.0 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

3) Queremos $\bar{x}$ tal que $f(\bar{x}) = 0$ sendo f a função $f(x) = r - \frac{1}{x}$.

O método de Newton para essa função será:

$$\phi(x) = x - \frac{r - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} \Rightarrow \phi(x) = 2x - rx^2$$

Ou seja, determinamos $\frac{1}{r}$ sem usar divisão.

$f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad f''(x) = \frac{-2}{x^3} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$

Tomando $I = [10^{-k}; 10^k]$ com $10^k > r$, temos

$f(10^{-k}) < 0$ e $f(10^k) > 0$, como $f'(x) \cdot f''(x) < 0$, $x_0 = a$

ou seja, $x_0 = 10^{-k}$.

Para $r = 39$, temos:

$\phi(x) = 2x - 39x^2$, $x_0 = 10^{-2}$.

$\phi'(x) = 2 - 78x > 0 \Rightarrow$ convergência monótona crescente

n	x_n	$x_n + 2\varepsilon$	$\phi(x_n + 2\varepsilon)$	$\phi(x_n + 2\varepsilon) < x_n$?
0	10^{-2}	0.012	0.018384	Não
1	0.018384	0.020384	0.024563209	Não
2	0.024563209	0.026563209	0.025607859	SIM

$\boxed{\bar{x} = 0.0255}$ com $\varepsilon < 10^{-3}$

4) Queremos $\bar{x}$ tal que $f(\bar{x}) = 0$ com erro $< 10^{-3}$. Sendo

$$f(x) = S(1+x)^{84} - \frac{p}{x}\left((1+x)^{84} - 1\right) \quad \text{com } p = 499 \text{ e } S = 25000$$

Para não calcular o valor de $f'(x)$, será usado o Método das Secantes.

Por x representar a taxa de juros, sabe-se que só há um único valor de x que zera f.

Temos que $f(1.9\ 10^{-2}) = 2.012427856\ 10^{4}$ e

$f(1.1\ 10^{-2}) = -5.681268981\ 10^{3}$

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$x_2 = 8.582457238\ 10^{-3}$

$$\left|\frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}}\right| = 1.2 \qquad \left|\frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{x_{n+1}}\right| = 2.8\ 10^{-1}$$

$f(x_2) = -9.799966594\ 10^{3}$

$x_3 = 1.199405423\ 10^{-2}$

$$\left|\frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}}\right| = 5.8\ 10^{-1} \qquad \left|\frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{x_{n+1}}\right| = 2.8\ 10^{-1}$$

$f(x_3) = -3.598303627\ 10^{3}$

$x_4 = 1.30567345\ 10^{-2}$

$\left|\frac{x_{n+1}-x_n}{x_{n+1}}\right| = 4.5\ 10^{-1}$ $\qquad$ $\left|\frac{x_{n+1}-x_{n-1}}{x_{n+1}}\right| = 8.1\ 10^{-2}$

$f(x_4) = -1.082533829\ 10^{3}$

$x_5 = 1.336011748\ 10^{-2}$

$\left|\frac{x_{n+1}-x_n}{x_{n+1}}\right| = 4.2\ 10^{-1}$ $\qquad$ $\left|\frac{x_{n+1}-x_{n-1}}{x_{n+1}}\right| = 2.3\ 10^{-2}$

$f(x_5) = -3.053019228\ 10^{2}$

$x_6 = 1.344440051\ 10^{-2}$

$\left|\frac{x_{n+1}-x_n}{x_{n+1}}\right| = 4.1\ 10^{-1}$ $\qquad$ $\left|\frac{x_{n+1}-x_{n-1}}{x_{n+1}}\right| = 6.2\ 10^{-3}$

$f(x_6) = -84.51152255$

$x_7 = 1.346763358\ 10^{-2}$

$\left|\frac{x_{n+1}-x_n}{x_{n+1}}\right| = 4.1\ 10^{-1}$ $\qquad$ $\left|\frac{x_{n+1}-x_{n-1}}{x_{n+1}}\right| = 1.7\ 10^{-3}$

$f(x_7) = -23.27257678$

$x_8 = 1.347402406\ 10^{-2}$

$\left|\frac{x_{n+1}-x_n}{x_{n+1}}\right| = 4.1\ 10^{-1}$ $\qquad$ $\left|\frac{x_{n+1}-x_{n-1}}{x_{n+1}}\right| = 4.7\ 10^{-4}$

Logo, a taxa de juros μ, com erro menor que 10^{-3} é 1.34%.

Curiosidade: o valor exato é 1.34764%.

Nota: para quem não lembra, o método das secantes é o método de Newton onde $f'(x)$ é substituída por:

$$\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

Nesse exercício foi utilizado também que x_n e x_{n-1} tinham como característica $f(x_n) \cdot f(x_{n-1}) < 0$ para que o controle do erro fosse o utilizado. Tal método é chamado Método de Regula-Falsi e é muito útil, pois ignora-se o que ocorre com $f'(x)$ e $f''(x)$.