MAP 2121 - CÁLCULO NUMÉRICO (POLI)
Prova Substitutiva - 14/12/06 - Duração: 2 horas

Questão 1 (2.5 pontos):
a) Resolva o sistema linear a seguir pelo método de Eliminação de Gauss (sem condensação pivotal), trabalhando com 3 algarismos significativos:

$$\begin{bmatrix} 4.0 & 2.0 & 0.0 & -1.0 \\ 0.0 & 5.0 & -4.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 3.0 & 2.0 \\ 8.0 & 0.0 & 0.0 & 7.0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.0 \\ 14.0 \\ -7.0 \\ -6.0 \end{bmatrix}$$

b) Mostre que a solução do sistema pode ser obtida por Gauss-Seidel
c) Calcule uma iteração por Gauss-Seidel a partir de $x^{(0)} = (0.998, 2.0, -0.993, -2.01)$ e delimite a norma do erro entre $x^{(1)}$ e a solução exata do sistema.

Questão 2 (2.5 pontos):
Determine a, b e c de forma a minimizar

$$\int_0^{2\pi} (\cos(\frac{x}{\pi} - 1) - (a + bx + cx^2))^2 \, dx$$

sabendo que 1, x e $x^2 - 1/3$ são polinomios ortogonais em relação ao produto interno $< f, g >= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ e que $< x^2 - 1/3, x^2 - 1/3 >= 8/45$.

Questão 3 (2.0 pontos): Dados os valores tabelados:

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-24	α	-2	β	4	16

a) determine $f(1)$ e $f(-1)$ sabendo que f é um polinômio de grau 3.
b) mostre que se $f''(x)$ não troca de sinal em [i,i+2] então a diferença dividida de segunda ordem f[i,i+1,i+2] tem mesmo sinal que $f''(x)$ neste intervalo. Use este fato, mesmo sem mostrá-lo, para estimar (analisando a tabela de diferenças divididas) entre quais dois valores inteiros se encontra o ponto de inflexão de f(x).

Questão 4 (3.0 pontos): Dada a função

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2} \, dt - 1$$

a) Calcule F(1) pelo método dos trapézios com $h = 0.25$ e estime o erro.
b) Mostre que $F(x)$ possui uma única raíz $\bar{x}$ em [0,1] (use a parte a)).
c) Mostre que a sequência gerada pelo método de Newton a partir de $x_0 = 1$ converge para esta raíz. Calcule um passo do método de Newton para obter x_1 (use o valor de F obtido em a).

Fórmula de erro: Trapézios: $|Erro| \leq max|f''(x)|(b-a)h^2/12$