MAP 2121 - CÁLCULO NUMÉRICO (POLI)

Prova 2 - 26/10/06 - Duração: 2 horas

A prova deverá ser feita sem o uso de calculadora.

Questão 1 (2.5 pontos): Considere a equação diferencial $y''(x) = 6x$ para $x \in (0,1)$, $y(0) = 1$ e $y(1) = 2$. Tomando $h = 1/4$, $x_i = ih, i = 0, ..., 4$, discretizamos a equação como $y(x_{i-1}) - 2y(x_i) + y(x_{i+1}) = 6x_i h^2, i = 1, 2, 3$.

a) Escreva o sistema linear (3x3) resultante.

b) Mostre que o sistema pode ser resolvido por Gauss-Seidel.

c) Calcule 1 iteração do método a partir de $y^{(0)} = (0, 0, 0)$ e delimite o erro após esta iteração.

Obs: trabalhe com frações.

Questão 2 (2.5 pontos): Faça a análise harmônica até o harmônico de segunda ordem da função 2π-periódica $f(x) = 2x/\pi$ em $[0, \pi/2]$, $f(x) = 1$ em $[\pi/2, \pi]$ e $f(x) = -f(-x)$ em $[-\pi, 0]$.

Questão 3 (2.5 pontos): Conhece-se os seguintes valores de uma função: $f(0) = 2.1$, $f(1) = 4.0$, $f(2) = 8.4$, $f(3) = 16.0$ e $f(4) = 32.0$. Aproxime $f(x)$ por uma função do tipo $g(x) = 2^{a+bx}$ segundo o método dos mínimos quadrados (discreto).

Obs: É dado o valor aproximado de $\log_2(1.05) = 0.07$. Faça as contas sem arredondar os resultados (são necessários só 4 significativos).

Questão 4 (2.5 pontos): Os 4 primeiros polinômios mônicos ortogonais em relação ao produto interno $< f, g >= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx$ são: $p_0 = 1$, $p_1 = x$, $p_2 = x^2 - 1/3$ e $p_3 = x^3 - 3x/5$.

a) Mostre que dentre todos os polinômios mônicos de grau 3, p_3 é o de menor norma (onde $||p|| =< p, p >^{1/2}$).

b) Determine o polinômio mônico de grau 3 de menor norma, com a norma dada pelo produto interno $< f, g >= \int_{1}^{4} f(x)g(x)\, dx$.