MAP 2121 - CÁLCULO NUMÉRICO (POLI)

Prova 1 - 15/09/06 - Duração: 2 horas

Questão 1 (2.5 pontos): A soma da idade de Ana com o triplo da idade de Bia e o dobro da idade de Carla perfaz 100 anos. Há 5 anos a soma das idades de Ana e Bia suplantava a idade de Carla em 1 ano. Daqui a 4 anos a idade de Carla será o triplo da diferença entre a idade de Bia e a de Ana. Escreva um sistema linear (com as 3 equações na ordem em que foram apresentadas) para a determinação da idade das moças. Ordene as incógnitas alfabeticamente de acordo com o nome delas. Resolva o sistema linear pelo método de Eliminação de Gauss com condensação pivotal e aritmética de ponto flutuante com dois algarismos significativos.

Questão 2 (2.5 pontos): Resolvendo o sistema linear da questão anterior pelo método de eliminação de Gauss com condensação pivotal e aritmética de ponto flutuante com 3 algarismos significativos obtivemos a matriz triangularizada a seguir (com os multiplicadores em suas respectivas posições):

$$\begin{bmatrix} 3.0 & -3.0 & 1.0 \\ 0.333 & 4.0 & 1.67 \\ 0.333 & 0.5 & -2.17 \end{bmatrix},$$

o vetor de permutações $p_1 = 3$ e $p_2 = 3$ (ou seja, no primeiro e segundo passo trocou-se a linha 3 com a linha pivot). Obteve-se a solução $x = (9.03, 17.0, 19.9)$. Calcule um passo de refinamento desta solução.

Questão 3 (2.5 pontos): **a)** Mostre que a função $f(x) = \sin(x) - x^4$ tem uma única raíz positiva. **b)** Calcule esta raíz pelo método de Newton com precisão pré-fixada de 10^{-3} a partir de $x_0 = 1.0$, justificando por que se pode garantir a convergência do método de Newton neste caso (para a raíz positiva). **c)** Caso calculemos a outra raíz (x=0) de f pelo método de Newton, a convergência será alternada. Quais as propriedades de f em x=0 que fazem com que esta convergência seja alternada?

Questão 4 (2.5 pontos): Uma loja vende um produto por um preço P em 10 vezes "sem acréscimo"(as prestações devem ser pagas mensalmente, sendo a primeira um mês após a compra). Suponha que este preço P seja o dobro do preço à vista. Queremos determinar qual a taxa de juros mensal (a cada real investido por um mês se recebe r ($r > 1$) reais) para que o valor à vista ($P/2$) seja suficiente para cobrir todas as prestações (com a aplicação mês a mês dos montantes ainda disponíveis). **a)** Mostre que o valor r correspondente à taxa de juros satisfaz a equação $r = (6. - r^{-10})/5$ **b)** Mostre que o valor de r procurado fica entre 1.1 e 1.2 (correspondendo a taxas entre 10 e 20% ao mês). **c)** Calcule r através de 2 iterações da sequência $r_{n+1} = \Phi(r_n)$ sugerida em a), escolhendo r_0 de forma a garantir a convergência. Justifique!