

MAP 2121 - CÁLCULO NUMÉRICO (POLI)

Prova de Recuperação - 16/02/06 - Duração: 2 horas

Questão 1 Considere a função $\Phi(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$. Prove que Φ tem um único ponto fixo $\bar{x}$ no intervalo $I = [1.75, 2]$ e que, partindo-se de qualquer $x_0 \in I$, a seqüência $\{x_n\}$ definida por $x_{n+1} = \Phi(x_n)$, $n \geq 0$, converge para $\bar{x}$. Usando a aproximação inicial $x_0 = 1.75$, calcule $\bar{x}$ com precisão 0.03.

Questão 2 Considere o sistema linear

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 0x_3 - x_4 &= b_1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 0x_4 &= b_2 \\ 0x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= b_3 \\ -x_1 + 0x_2 - x_3 + 2x_4 &= b_4 \end{aligned}$$

A matriz do sistema é singular. Usando o método de eliminação de Gauss com aritmética exata, determine que condição devem satisfazer b_1, b_2, b_3 e b_4 para que o sistema tenha solução. Verifique que para $b = (1, -1, 1, -1)$ o sistema é solúvel, e para este b calcule a solução particular com $x_4 = 0$ a partir do sistema triangularizado.

Questão 3 Faça a análise harmônica até o harmônico de ordem 1 da função periódica de período 2 definida por

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x), & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Apresente os cálculos de todas as integrais necessárias para a resolução da questão.

Questão 4 Considere a tabela de uma função f

$$\begin{array}{cccccc} x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ f(x_0) & f(x_1) & \cdots & f(x_{n-1}) & f(x_n) \end{array}$$

onde $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$. Seja $p_{n-1}(x)$ o polinômio interpolador da tabela formada pelos pontos $(x_i, f(x_i))$, $0 \leq i \leq n-1$. Mostre que

$$f(x_n) - p_{n-1}(x_n) = (x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1})f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n].$$

Conclua que se f tem derivadas contínuas até ordem n no intervalo I gerado pelos pontos x_i , então existe $\xi \in I$ tal que

$$f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$