MAP 2121 - CÁLCULO NUMÉRICO (POLI)

Prova 3 - 09/12/04 - Duração: 2 horas

Questão 1 (2.5 pontos):

Calcule $\int_0^1 x \cos x dx$ pelos métodos de n-trapézios e n-Simpsons de forma a garantir um erro menor que 1.5×10^{-2} e que 1.5×10^{-4}, respectivamente. Calcule o valor exato da integral e verifique se os erros ficaram de acordo com as limitações das estimativas.
(O erro com n trapézios é limitado por $max_{x\in[a,b]}|f''(x)|(b-a)h^2/12$, e o erro com n-Simpsons por $max_{x\in[a,b]}|f^{(4)}(x)|h^4(b-a)/180$.)

Questão 2 (2.5 pontos): É dada uma funcão contínua f, de período 4, tal que $f(-2) = f(2) = 0$, $f(-1) = f(1) = 0$ e $f(0) = 2$. Em cada intervalo $[i, i+1], i \in \mathbf{Z}$, f é uma reta. Faça a análise harmônica de f até os harmônicos de ordem n.

Questão 3 (2.5 pontos):

Uma fórmula de integração aberta não faz uso dos valores da função nos extremos do intervalo. Por exemplo, para calcular $\int_0^4 f(x)dx$ dividimos $[0, 4]$ em quatro subintervalos de mesmo tamanho e aproximamos a integral de f pela integral do polinômio de grau menor ou igual a 2 que interpola f nos pontos interiores 1, 2 e 3.

a) Determine pelo método de diferenças divididas o polinômio p que interpola f nestes 3 pontos.

b) Integre p no intervalo [0,4] (pela fórmula de Simpson) de maneira a obter a fórmula de integração. Há diferença caso você integre p exatamente?

c) Use a fórmula obtida para calcular $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ (sim, uma mudança de variáveis se faz necessária!).

Questão 4 (2.5 pontos):

São dados 4 pontos uniformemente espaçados $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ (onde $x_{i+1} = x_i + h, i = 1, 2, 3$) e $x_2 < x < x_3$. Definindo $d = (x - x_2)/h$, $a = 1 + d$, $b = 1 - d$ e $c = 2 - d$, mostre que para todo polinômio p de grau menor ou igual a três:

$$p(x) = \frac{ac}{2}(bp(x_2) + dp(x_3)) - \frac{db}{6}(cp(x_1) + ap(x_4))$$