MAP 2121 - CÁLCULO NUMÉRICO (POLI)

Prova 2 - 28/10/04 - Duração: 2 horas

Obs: As contas necessárias para a resolução desta prova são muito simples, não requerendo o uso de calculadora. Fica VEDADO o uso de calculadora nesta prova.

Questão 1 (2.5 pontos) Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 24 & -3 & -2 \\ -6 & 6 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

a) O método de Gauss-Seidel é convergente para este sistema? Justifique.

b) O erro após a k-ésima iteração é a diferença entre a solução exata do sistema e a k-ésima iterada do método de Gauss-Seidel. Se a norma do erro inicial for 3, estime seu valor após n iterações.

c) A partir de um erro inicial $\epsilon^{(0)} = (1, 2, 3)$ determine o valor do erro após duas iterações. Compare com sua estimativa.

Questão 2 (2.5 pontos) Uma máquina M produz por hora 2 toneladas do produto a, 2 de b e 1 de c. A máquina N produz por hora 5 toneladas de a, 2 de b e 4 de c. Temos uma encomenda de 1 tonelada de cada um dos produtos a, b e c. Desejamos determinar quanto tempo usar cada uma das máquinas de forma a que a soma dos quadrados das diferenças entre as quantidades produzidas e encomendadas seja mínima. Resolva este problema utilizando uma fatoração QR como no EP. (Caso prefira, você pode resolver a questão de outra forma. Nesta caso a questão vale apenas 1.5 ponto)

Questão 3 (2.5 pontos) Os polinômios $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$, $p_2(x) = x^2 - 1/3$ e $p_3(x) = x^3 - 3x/5$ são ortogonais em relação ao produto interno $< p_k, p_l >= \int_{-1}^{1} p_k(x)p_l(x)dx$. Use-os para aproximar a função $f(x) = \sin 2\pi x$ no intervalo $[1, 2]$ por um polinomio de grau menor ou igual a 2, através do método dos mínimos quadrados (com produto interno $< f, g >= \int_1^2 f(x)g(x)dx$).

Questão 4 (2.5 pontos) Conhecendo os polinômios da questão 3, determine a, b e c de forma a minimizar o valor de

$$\int_{-1}^{1} (x^3 - a - bx - cx^2)^2 dx \quad .$$

Analise criticamente o resultado obtido.