MAP 2121 - Cálculo Numérico - Segundo Semestre de 2003
Prova Substitutiva - 11/12/2003 - Duração: 2 horas

Questão 1 (2.5 pontos) Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ -x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

a. Resolva o sistema linear pelo método de eliminação de Gauss com condensação pivotal e aritmética de ponto flutuante com dois algarismos significativos.
b. Utilize o resultado obtido no item a) como aproximação inicial e calcule uma iteração do método de Gauss-Seidel. Estime o erro após esta iteração.

Questão 2 (2.5 pontos) A lei adiabática dos gases é dada por $PV^\gamma = c$, onde c e γ são constantes. Estime os valores destas constantes para a tabela

V	10	20	30	40
P	6.0	2.2	1.3	0.8

usando o método dos mínimos quadrados.

Questão 3 (2.5 pontos) São dados pontos $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 = b$ uniformemente espaçados em $[a, b]$ (ou seja, $x_i - x_{i-1} = h = (b-a)/4, i = 1, ..., 4$). Vamos determinar uma fórmula de integração para aproximar $\int_a^b f(x)dx$ baseada em interpolação por polinômios de grau menor ou igual a 2, nos pontos interiores da partição.

a) Escreva o polinômio interpolador de f nos pontos x_1, x_2 e x_3 pela fórmula de Lagrange.

b) Integrando o polinômio interpolador de f obtenha uma aproximação do tipo

$$\int_a^b f(x)dx = a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + a_3 f(x_3)$$

escrevendo os a_i em função dos polinômios de Lagrange.

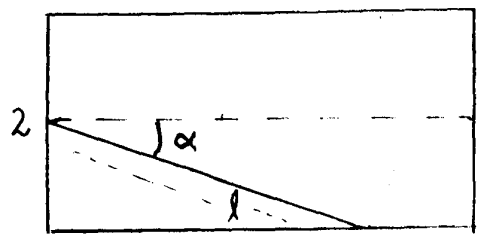
c) Calcule o valor de a_2. Para tal utilize-se do método de Simpson para integração em $[a, b]$.

Questão 4 (2.5 pontos) Dado um pasto retangular cujos lados medem 3 unidades e 2 unidades de comprimento, prende-se um cavalo por uma corda de comprimento $1 \leq l \leq 3$ ao ponto médio do lado de comprimento 2. Deseja-se saber qual o valor de l para que o cavalo só possa comer metade da área do pasto. Para isto mostre que

a. A área máxima que o cavalo pode comer em função de l é

$$A(l) = \sqrt{l^2 - 1} + l^2 \text{arcsen}(1/l)$$

b. Como $l = 1/\text{sen}(\alpha)$ temos

$$A(\alpha) = \text{cotan}(\alpha) + \alpha \text{cosec}^2(\alpha)$$

Assim para $\alpha \in [0.6, 0.8]$, temos $A(\alpha) = 3$ é equivalente a $g(\alpha) = (A(\alpha) - 3)\text{sen}^2(\alpha) = 0$.
Mostre que g tem uma única raiz em $[0.6, 0.8]$. Determine α_0 tal que a convergência do método de Newton para esta raiz fique assegurada. Justifique!