MAP 2121 - Cálculo Numérico - Segundo Semestre de 2003
Prova 3 - 4/12/2003 Duração: 2 horas

Questão 1 Calcule o polinômio interpolador na forma de Newton para $f(x) = 2^x$, relativamente aos pontos $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 2$. Use o polinômio para aproximar $\sqrt{2}$ e estime o erro.

(Erro na interpolação polinomial: $\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$)

Questão 2 Aproxime

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + \cos^2(x)}\, dx$$

usando a fórmula dos trapézios com $h = \pi/6$. Determine quantas repetições seriam necessárias para se garantir um erro menor do que 10^{-6}.

(Erro da fórmula dos trapézios: $E = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi)$)

Questão 3 Queremos aproximar $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$ por uma expressão da forma

$$w_1 f(-\alpha) + w_2 f(0) + w_1 f(\alpha) \tag{1}$$

que seja exata para polinômios de maior grau possível. Na fórmula acima, w_1 e w_2 são positivos e $0 < \alpha < 1$.

a) Mostre que a fórmula é exata quando $f(x) = x^p$, com p inteiro positivo e *ímpar*.

b) Determine w_1, w_2 e α impondo-se que a fórmula seja exata para $f(x) = 1$, $f(x) = x^2$ e $f(x) = x^4$. Explique por que a fórmula obtida é exata para polinômios de grau menor ou igual a 5.

c) Mostre que uma fórmula como a expressão (1) não pode ser exata para polinômios de grau 6 (sugestão: considere $f(x) = (x + \alpha)^2 x^2 (x - \alpha)^2$).

Questão 4 Considere a função 2π-periódica definida por $f(x) = \frac{\pi}{2} - x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, $f(x) = 0$, $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ e $f(x) = x - \frac{3\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi$.

a) Faça a análise harmônica de f até o harmônico de ordem 2.

b) Deseja-se obter uma aproximação da forma

$$a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

para a solução da equação diferencial

$$-t''(x) + t(x) = f(x)$$

onde f é a função do item a). Calcule a_0, a_1, a_2, b_1 e b_2.