MAP2121 - Cálculo Numérico - Segundo Semestre de 2003
Prova 2 - 23/10/2003 Duração: 2 horas

Questão 1 Considere o sistema linear

$$\begin{aligned} 6x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ -x_1 + x_2 + 7x_3 &= -17 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

a) Reordene as equações de modo a se obter um sistema para o qual se pode garantir a convergência do método de Gauss-Seidel. Justifique.

b) Usando o sistema reordenado, calcule uma iteração do método de Gauss-Seidel a partir de $x^0 = (1, 1, 1)$.

c) Sabendo-se que a solução exata se encontra em $[-3, 3] \times [-3, 3] \times [-3, 3]$, determine quantas iterações do método de Gauss-Seidel seriam necessárias para se garantir um erro menor do que 10^{-3} em cada componente, partindo-se da aproximação inicial $x^0 = (0, 0, 0)$.

Questão 2 Os polinômios $\{1, x, 3x^2 - 1\}$ são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ em relação ao produto interno $< F, G >= \int_{-1}^{1} F(x)G(x)\,dx$. Use este fato para aproximar a função $f(t) = 1 + |2t - 1|$ no intervalo $[0, 1]$ por polinômios $g(t)$ de grau menor ou igual 2 de forma a minimizar o erro quadrático $\int_0^1 [f(t) - g(t)]^2\,dt$.

Questão 3 Uma companhia tem três fábricas que produzem quatro tipos de veículos V_1, V_2, V_3 e V_4. A primeira fábrica produz 60 veículos por dia, sendo 30 do tipo V_1, 0 do tipo V_2, 10 do tipo V_3 e 20 do tipo V_4. A segunda fábrica produz 60 veículos por dia, sendo 20 do tipo V_1, 10 do tipo V_2, 20 do tipo V_3 e 10 do tipo V_4. E a terceira fábrica produz 50 veículos por dia, sendo 10 do tipo V_1, 30 do tipo V_2, 0 do tipo V_3 e 10 do tipo V_4. Cada fábrica tem de operar com a sua produção diária total. A companhia recebe um pedido de 110 veículos do tipo V_1, 79 do tipo V_2, 64 do tipo V_3 e 93 do tipo V_4. Determine quantos dias cada fábrica deve operar de modo a minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre as quantidades pedidas e produzidas de cada tipo de veículo.

Questão 4 Em um laboratório, mediu-se a evolução do número de células de uma cultura de levedo, obtendo-se os seguintes valores

t	0	4	8	12	16
N	18	80	336	597	664

onde t é medido em horas. Sabe-se que a população obedece aproximadamente à lei

$$N(t) = \frac{\alpha}{1 + \beta e^{-\gamma t}}$$

Deseja-se obter valores para α e γ, que são constantes intrínsicas do modelo. Manipulando-se a fórmula acima, obtém-se a relação

$$F(t) = \frac{N(t)}{N(t + \Delta t)} = e^{-\gamma \Delta t} + \frac{1 - e^{-\gamma \Delta t}}{\alpha} N(t) = a + bN(t)$$

com Δt constante (no caso, igual a 4). Use o método dos mínimos quadrados para aproximar $F(t)$ por uma função da forma $G(t) = a + bN(t)$ e obtenha os valores de α e γ.