MAP 2121 - CÁLCULO NUMÉRICO (POLI)
Prova 3 - 5/12/02 - Duração: 2:30 horas

Questão 1 (2.5 pontos) Calcule os coeficientes da análise harmônica da função periódica de período 2π definida por $f(x) = x - \pi$, $0 \leq x < 2\pi$.

Questão 2 (3.0 pontos) A tabela abaixo descreve a evolução temporal (em meses) da biomassa (em toneladas) de uma população de peixes:

t	1	2	3	4	5	6	7	8
f	15.48	23.20	33.24	45.09	57.51	69.06	78.63	85.85

Sabe-se que a curva $f(t)$ tem um único ponto de inflexão $\bar{t}$, a partir do qual o crescimento desacelera. Uma aproximação para $\bar{t}$ pode ser calculada interpolando-se a função $f(t)$ por um polinômio cúbico em 4 pontos convenientes, e determinando a raiz da derivada segunda do polinômio.

a) Construa a tabela de diferenças simples (usando todos os pontos) até as diferenças de ordem 2.

b) Mostre que se $f(x)$ é uma função tal que $f''(x) > 0$ para x no intervalo $[s, s+2h]$, então a diferença simples de ordem 2 em $x = s$ satisfaz $\Delta^2 f(s) > 0$ (conseqüentemente, se $f''(x) < 0$ no intervalo, então $\Delta^2 f(s) < 0$). (Lembre-se que $\Delta f(s) = f(s+h) - f(s)$)

c) Use o resultado do item b) (mesmo que não o tenha feito) para localizar $\bar{t}$ e então escolha quatro pontos convenientes para a interpolação. Calcule o polinômio interpolador nestes pontos e determine a aproximação para $\bar{t}$.

Questão 3 (2.0 pontos) Aproxime $\int_1^3 x \ln(x)\, dx$ pelo método de Simpson com duas repetições (2-Simpsons) e estime o erro. Que espaçamento deve ser usado para garantir um erro menor do que 10^{-4}? O erro para Simpson é dado por

$$|E| \leq \frac{b-a}{180} h^4 \max_{a \leq x \leq b} |f^4(x)|$$

Questão 4 (2.5 pontos) Use o método de Euler com passo $h = 0.5$ para calcular uma aproximação para $x(1)$, onde $x(t)$ é solução da equação diferencial

$$x''(t) + tx'(t) + 2x(t) = 0, \quad x(0) = 4, \quad x'(0) = 2 \quad .$$