MAP 2121 - CÁLCULO NUMÉRICO (POLI)

Prova 2 - 24/10/02 - Duração: 2 horas

Questão 1 (2.5 pontos) Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -5 & 6 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) O método de Gauss-Seidel é convergente para este sistema? Justifique.

b) Faça duas iterações do método de Gauss-Seidel partindo da aproximação inicial $x_1^{(0)} = 0, x_2^{(0)} = 0, x_3^{(0)} = 0$.

c) Sabendo que a solução do sistema está no cubo $[-3,3] \times [-3,3] \times [-3,3]$, estime um número de iterações do método de Gauss-Seidel (se tal número existir) que assegure encontrar esta solução com precisão 10^{-10}, partindo da origem como aproximação inicial.

Questão 2 (2.5 pontos) Mediu-se o valor aproximado de uma função f nos pontos $-2, -1, 0, 1, 2$, obtendo-se, respectivamente, os valores $1, 2, 8, 4, 1$. Sabendo que f é da forma $f(x) = a2^{b(x-c)^2}$, utilize o método dos mínimos quadrados para estimar os valores de a, b e c.

Questão 3 (2.5 pontos) Os polinômios de Legendre:

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x, \quad p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad p_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

são ortogonais em relação ao produto interno $< p_k, p_l >= \int_{-1}^{1} p_k(x)p_l(x)dx$ e sabe-se ainda que $< p_k, p_k >= 2/(2k+1)$. Use estes polinômios para aproximar a função f no intervalo $[0,4]$ por um polinômio cúbico através do método dos mínimos quadrados, onde f é tal que: $f(x) = 2 - x$ se $x \in [1,2]$, $f(x) = 0$ se $x \in [2,3]$, e $f(x) = x - 3$ se $x \in [3,4]$.

Questão 4 (2.5 pontos) Deseja-se determinar a aceleração da gravidade g. A tabela abaixo fornece resultados experimentais da velocidade de um corpo em queda livre em função do tempo. Estime o valor de g usando as médias das medidas de velocidade em cada instante, através de um método dos mínimos quadrados em que a contribuiçao da velocidade média no instante t para a estimativa de g seja inversamente proporcional à sua variância neste instante.
Observação: Se $\overline{v}(t_k)$ é a média das medidas de velocidade no instante t_k, então a variância associada a t_k é dada por:

$$var(t_k) = \frac{\sum_{j=1}^{3}(v_j(t_k) - \overline{v}(t_k))^2}{3}$$

t	$v_1(t)$	$v_2(t)$	$v_3(t)$
0.00	1.15	1.05	0.90
0.36	4.53	4.70	4.60
0.55	6.10	6.00	6.00
0.69	7.70	7.60	7.60