MAP 2121 - CÁLCULO NUMÉRICO (POLI)

Prova 1 - 19/09/02 - Duração: 2 horas e 30 minutos

Questão 1 (1.5 pontos) Resolva o sistema linear a seguir pelo método de Eliminação de Gauss com condensação pivotal e aritmética de ponto flutuante com dois algarismos significativos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 0.5 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -0.5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Questão 2 (1.5 pontos) Aplicando-se o método de Gauss com condensação pivotal e aritmética de ponto flutuante com dois algarismos significativos ao seguinte sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 1.2x_1 + 3.2x_2 - 1.5x_3 &= -1 \end{aligned}$$

obtém-se o seguinte sistema escalonado:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2.0 & 1.0 & 3.0 & 1.0 \\ 0.6 & 2.6 & -3.3 & -1.6 \\ 0.5 & 0.58 & -0.6 & 2.4 \end{array}\right]$$

tendo-se efetuado as permutações $p_1 = 2$ e $p_2 = 3$. Utilizando esta matriz escalonada e sua solução $\tilde{x} = (9.5, -5.8, -4.0)$ faça uma etapa de refinamento do método de eliminação de Gauss.

Questão 3 (2.5 pontos) Dado o polinômio $x^3 - 5x^2 + 5$, que possui três raízes reais:

a) determine um intervalo de comprimento menor ou igual a um, onde o método de Newton converge para a maior raiz $\overline{x}$ do polinômio, para uma escolha de x_0 conveniente (exiba x_0);

b) determine $\overline{x}$ usando o método de Newton com precisão pré-fixada 10^{-3} e $x_0 = 5.0$.

Questão 4 (2.5 pontos) Considere as seguintes funções:

$$f(x) = \sin(x) - e^{-x} \qquad \text{e} \qquad \phi(x) = x - c(\sin(x) - e^{-x})$$

a) Mostre que $f(x)$ tem uma única raiz $\overline{x}$ em $[0, \pi/2]$.

b) Considere o processo iterativo $x_{n+1} = \phi(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Determine um intervalo de valores de c que garanta a convergência do processo para $\overline{x}$, partindo de $x_0 = 0$.

c) Para qual dos valores de c, determinados no ítem b, o processo iterativo converge mais rapidamente? Justifique.

Questão 5 (2.0 pontos) João possui uma fazenda no valor de 100 (valor este fixo ao longo do tempo), mais um rebanho de cabras que inicialmente vale 1, mas cujo valor dobra a cada ano. Pedro possui uma fazenda no valor de 30 (que também permanece fixo ao longo do tempo), mais um rebanho de cabras que inicialmente vale 1, mas cujo valor triplica a cada ano. Supondo que tal situação não muda em um período de 10 anos, mostre que haverá um instante $\overline{T} < 10$ anos a partir do qual Pedro será mais rico que João. Qual é aproximadamente o valor de $\overline{T}$ em anos (use o método de Newton com condiçao inicial $T_0 = 5$ e faça uma iteração)?