MAP 2121 - CÁLCULO NUMÉRICO (POLI)

Prova Substitutiva - 10/12/01 - Duração: 2 horas e 30 minutos

Questão 1 (2.5 pontos): Mostre que a função $f(x) = x^2 - 10\cos x$ possui uma única raíz positiva. Determine um intervalo $[a, b]$ tal que o método de Newton convirja para a raíz positiva da equação para todo x_0 em $[a, b]$. Calcule 3 iterações com o método de Newton partindo de $x_0 = 1$. Sem utilizar o valor da solução, determine se x_3 dista menos que 10^{-3} da raíz.

Questão 2 (2.5 pontos): Determine a, b e c de maneira a tornar mínimo o valor de:

$$\int_0^1 (a + bx + c\cos 2\pi x - \sin 2\pi x)^2 dx$$

Questão 3 (2.5 pontos): Desejamos aproximar o valor de $\log_2 5/2$ através de interpolação polinomial, usando para tal os valores conhecidos de $\log_2 x$, nos pontos 1, 2, 4 e 8. Usando diferenças divididas, calcule os polinômios interpoladores de $\log_2 x$ nos pontos 2 e 4 (linear), 2, 4 e 8 (quadrático) e 1, 2, 4 e 8 (cúbico). Delimite o erro cometido na aproximação de $\log_2 5/2$ em cada caso. Dado: erro na interpolação é menor ou igual a

$$\frac{max_{y\in[x_0,x_n]}|f^{(n+1)}(y)|}{(n+1)!}|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)|$$

Questão 4 (2.5 pontos): É dada uma função contínua f definida em [0,4], tal que $f(x) = x^2 - 3x + 2$ para $x \in [0, 1]$, $f(x) = -x^2 + 5x - 4$, para $x \in [1, 5/2]$ e $f(x) = 3(2 - x/2)$ em $[5/2, 4]$.

a) Calcule $\int_0^4 f(x)dx$ pelo método de 2-Simpsons e 4-Simpsons (ou seja, com espaçamentos h=1 e 1/2). Algum destes resultados fornece o valor exato da integral? Justifique!

b) Usando os valores de f apenas nos pontos 0, 1/2, 1, 7/4, 5/2 e 4 obtenha o valor exato da integral! Justifique! (Obs: trabalhe com frações)