MAP 2121 - CÁLCULO NUMÉRICO (POLI)

Prova 2 - 30/10/00 - Duração: 2 horas e 30 minutos

Questão 1 (2.5 pontos): Os polinômios $\{1, x, x^2 - 1/3\}$ são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ em relação ao produto interno $< f, g >= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$. Use este fato para aproximar a função $f(t) = 1 - |2t - 5|$ no intervalo $[2, 3]$ por polinômios de grau menor ou igual a 2 pelo método dos mínimos quadrados (segundo o produto interno $< f, g >= \int_2^3 f(t)g(t)dt$).

Questão 2 (2.5 pontos): Os preços de um ativo financeiro em 6 meses consecutivos ($t_i = i, i = 1, .., 6$) são os seguintes $R = (21.3, 21.8, 21.2, 21.3, 20.5, 21.0)$ (valores em reais). Desejamos estimar o comportamento dos preços segundo uma função linear $\bar{R}(t) = \alpha + \beta t$, atribuindo maior peso às observações mais recentes. Usaremos os seguintes pesos para os meses de 1 a 6: $\lambda = (0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0)$. Pede-se determinar: a reta de ajuste de mínimos quadrados $\bar{R}$, segundo o produto interno $< x, y >= \sum_{i=1}^{6} \lambda_i x_i y_i$, e a volatilidade da amostra, isto é, o valor σ dado por $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{6} \lambda_i (R_i - \bar{R}(t_i))^2$, onde R_i são as componentes do vetor R dos preços do ativo financeiro.

Questão 3 (2.5 pontos): Ao se utilizar o método dos mínimos quadrados na resolução de um problema, obtem-se a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} < g_1, g_1 > & < g_1, g_2 > & < g_1, g_3 > \\ < g_2, g_1 > & < g_2, g_2 > & < g_2, g_3 > \\ < g_3, g_1 > & < g_3, g_2 > & < g_3, g_3 > \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

a) Verifique se o critério de Sassenfeld para convergência do método de Gauss-Seidel é satisfeito para este sistema. b) É possível permutar a base $\{g_1, g_2, g_3\}$, de forma a garantir a convergência do método de Gauss-Seidel para o sistema resultante no método dos mínimos quadrados? Justifique.

Questão 4 (2.5 pontos): Uma barra linear de um metro de comprimento é mantida a 0 graus em um extremo e a 128 graus no outro. Desejamos determinar a temperatura da barra a cada 20 cm. Denominando de $T_0 = 0$ a temperatura de um extremo, de $T_5 = 128$ a temperatura no outro extremo e de T_1, T_2, T_3 e T_4 a temperatura nos pontos interiores e sabendo que a temperatura em cada ponto interior é igual à média aritmética da temperatura de seus dois pontos vizinhos: a) escreva um sistema linear para a determinação de T_1, T_2, T_3 e T_4. b) Calcule 4 iterações pelo método de Gauss-Seidel para a solução deste sistema a partir da aproximação inicial nula. c) Analise a convergência do método de Gauss-Seidel para a solução deste sistema.