COLETÂNEA
DE
PROVAS

PROVA: ______________________

MAP-121 CÁLCULO NUMÉRICO
1a Prova -1996

Nome:
No USP:
Turma:

1a Questão

a) Utilize o método de Newton para encontrar uma aproximação da solução positiva da equação abaixo com uma precisão $\epsilon = 0.01$. Justifique a sua escolha para a aproximação inicial x_0 e a convergência do método.

$$e^x = \frac{3 - x^3}{2}$$

2a Questão

a) Escolha uma das funções abaixo para determinar o valor da raiz cúbica de 5 utilizando o método das aproximações sucessivas. Justifique tudo o que for necessário para assegurar a convergencia do método.

$$\Phi_1(x) = \frac{x^3}{5} - 20; \quad \Phi_2(x) = \frac{x^4}{5}; \quad \Phi_3(x) = \frac{2x^3 + 5}{3x^2}.$$

b) Estime o número de iterações "n" que assegure um erro $e_n = |\bar{x} - x_n| \leq 10^{-5}$

c) A partir dos valores de x_1 e x_2 obtidos com o método das aproximações sucessivas, estime o erro e_2 :

FORMULÁRIO

A função Φ para o método de Newton é dada por:

$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

MAP121 CAL NUM

ESBOÇO DAS SOLUÇÕES DA 1ª PROVA/96 (TURMAS A e B.)

Alexandre 01/09/97

QUESTÃO 01 - (A)

NEWTON: $f(x) = \ln(x) - e^{-x}$; $f'(x) = 1/x + e^{-x}$; $f''(x) = -(1/x^2 + e^{-x})$

$I = [1,2]$ ← intervalo de trabalho.

i) $f(1)\, f(2) = (-0.367)(0.558) < 0$

ii) $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in [1,2]$

iii) $f''(x) < 0$, $\forall x \in [1,2]$

$$\phi(x) = x - \frac{\ln(x) - e^{-x}}{1/x + e^{-x}}$$

Pelo Teo. 01 a seq. dada pelo mét. de Newton converge se x_0 for tomado convenientemente. Por exemplo:

$$x_0 \begin{cases} 1, & \text{se } \phi(1) \in [1,2] \\ 2, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$\phi(1) = 1.269 \in [1,2] \Rightarrow x_0 = 1$

Como sabemos, para ϕ do mét. de Newton que f satisfaz as condições do teo. 01, os três primeiros termos das seq.

$$x_{n+1} = \phi(x_n), \; n \geq 0,$$

definem o comportamento da seq. (e podemos então calcular $\bar{x}$ com precisão pré-fixada $\delta = 0.01$):

$x_1 = \phi(x_0) = 1.26841$
$x_2 = \phi(x_1) = 1.309108$
$x_3 = ? \; \phi(x_2) = 1.309799$
$\phi(\bar{x}) = 1.30979958$

? →
$x_1 = \phi(x_0) = 1.269$
$x_2 = \phi(x_1) = 1.040$
$x_3 = \phi(x_2) = 1.2389$
} oscilante?

why?

$x_4 = \phi(x_3) = 1.0688$
$x_5 = \phi(x_4) = 1.21646$

Questão 02 - (A)

$f(x) = \sin(3x) - \cos x$; $f(\bar{x}) = 0 \iff \boxed{\sin(3\bar{x}) - \cos(\bar{x}) = 0}$

$\phi(x) = \frac{1}{3}\,\mathrm{tg}(x)$

$I = [0, \pi/6]$

$\phi_1'(x) = \dfrac{1/3}{\cos^2(x)} \rightarrow \min|\phi_1'| < 1$

$f(0) < 0 \quad f(\pi/6) > 0 \Rightarrow f(0)\,f(\pi/6) < 0$

$\phi_1''(x) = \dfrac{1/3\,(2)}{\cos^3(x)} < 0$

$f' = 3\cos(3x) + \sin(x) > 0 \quad x \in [0, \pi/6]$

$\searrow$ f estritamente cresc. em $[0, \pi/6]$

$\Downarrow$

ϕ_1' estritamente decresc.

tenho raiz isolada em $[0, \pi/6]$

No $\bar{x}$ pto fixo:

$\sin(\bar{x}) - 3\bar{x}\cos(\bar{x}) = 0$ $\quad \bar{x} = 0$ é ponto fixo

$\tilde{f}(x) = \sin(x) - 3x\cos(x)$

$\tilde{f}'(x) = \cos(x) - 3\cos(x) - 3x\sin(x) = -2\cos(x) + 3x\sin(x)$

$\tilde{f}''(x) = 2\sin x + 3\sin x + 3x\cos x = 5\sin x + 3x\cos x > 0 \Rightarrow \tilde{f}'$ cresc.

$\tilde{f}(0) = -2$ $\quad \tilde{f}(\pi/6) < 0$

$-1.732 + \frac{3\pi}{6} \cdot 0.5$

-2 $\quad \pi/6$

$\tilde{f}' < 0 \quad x \in [0, \pi/6] \Rightarrow \tilde{f}$ estritamente decresc.

$\tilde{f}(0) = 0 \Rightarrow \tilde{f}(x) < 0, \quad x \in [0, \pi/6]$

$\therefore$ Único ponto fixo de $\phi_1(x)$ é $\bar{x} = 0$ que não é sol. de

$f(x) = \sin(3x) - \cos(x)$

$\therefore$ ptos fixos de $\phi_1(x)$ em $[0, \pi/6]$ não são sol. do problema neste intervalo.

$\phi_3(x) = \arccos(\sin(3x))$

- zeros x pontos fixos:

$$\bar{x} = \phi_3(\bar{x}) = \arccos(\sin(3x)) \Longrightarrow \underbrace{-\cos(\bar{x}) - \sin(3\bar{x})}_{=f(\bar{x})} = 0 \Longrightarrow$$

se $\bar{x}$ é pto fixo de ϕ_3 então $\bar{x}$ é zero de $f(x)$.

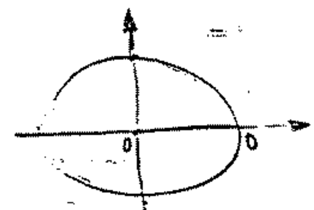
- $x \in [0, \pi/6]$.

$$\phi_3'(x) = \underbrace{\arccos'(\sin 3x)} \cdot \cos(3x) \cdot 3 =$$

$0 < 3x < \pi/2$

$$= \frac{-1}{\pm\sqrt{1-\sin^2(3x)}} \cos(3x) \cdot 3 \Rightarrow \phi_3'(x) = \frac{-3\cos(3x)}{\pm|\cos(3x)|} = (-3)(\pm 1)$$

escolher



Queremos que:

$$x = 0 \rightarrow \phi_3(0) = \arccos(0) = \begin{cases} \pi/2 \\ 3\pi/2 \end{cases}$$

$$x = \pi/6 \rightarrow \phi_3(\pi/6) = \arccos(1) = \begin{cases} 0 \\ 2\pi \end{cases}$$

$$\arccos(\cos(x)) = x \xrightarrow{d/dx} \arccos'(\cos(x))(-\sin x) = 1$$

$$\arccos'(\cos(x)) = \frac{-1}{\sin(x)} = \frac{-1}{\pm\sqrt{1-\cos^2(x)}}$$

$-1 < u < 1$: $\arccos'(u) = \dfrac{-1}{\pm\sqrt{1-u^2}}$

$\phi_2(x) = \frac{1}{3}\arcsin(\cos(x)) = \frac{1}{3}\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right) = \boxed{\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}$

$\bar{x}$ pto. fixo $\phi_2(x)$:

$3\bar{x} = \frac{\pi}{2} + \bar{x} \Rightarrow \bar{x} = \pi/4$

mas $f(\pi/4) \neq 0$

$\phi_2'(\pi/4) = \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}\,\frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

$\arcsin(x)$

$\pi \leq x \leq \pi/2$

~~ramo~~ correto

$(0, \pi/6)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1}\cos x + \cos\frac{\pi}{2}\,\cancel{\sin x}$

$\sin(3\bar{x}) = \cos(\bar{x}) \Rightarrow \sin(3\bar{x}) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\bar{x}\right)$

$3\bar{x} = \frac{\pi}{2}+\bar{x}$

$\bar{x} = \frac{\pi}{4}$

$0 < \frac{\pi}{2}$

$0 < \bar{x} < \pi/6$

$0 < 3\bar{x} < \pi/2$

$\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi$

$\arcsin(\sin x) = x$

$\arcsin'(\sin x)\cdot\cos x = 1$

$\arcsin'(u) = \frac{1}{\pm\sqrt{1-u^2}}$

$-1 < u < 1$

QUESTÃO 01 - B

Newton :

$$\boxed{f(x) = 2e^x + x^3 - 3}$$ ⟸ difícil de estimar o sinal de ϕ' !!!

$$f'(x) = 2e^x + 3x^2$$

$$f''(x) = 2e^x + 6x$$

$I = [0, 1]$

$$\begin{cases} i) \ f(0).f(1) < 0 \\ ii) \ f'(x) \neq 0, \ \forall x \in [0,1] \\ iii) \ f''(x) > 0, \ \forall x \in [0,1] \end{cases}$$

$x_0 = 0$, pois :

ϕ de newton : $\phi(x) = x - \dfrac{2e^x + x^3 - 3}{2e^x + 3x^2} =$

$$= \frac{2xe^x + 3x^3 - 2e^x - x^3 + 3}{2e^x + 3x^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\phi(x) = \frac{(2x-2)e^x + 2x^3 + 3}{2e^x + 3x^2}}$$

$\phi(0) = \dfrac{1}{2} \in [0,1]$

$x_0 = 0$

$$\phi'(x) = \frac{\left(2e^x + (2x-2)e^x + 6x^2\right)\left(2e^x + 3x^2\right) - \left[\left((2x-2)e^x + 2x^3 + 3\right)\left(2e^x + 6x\right)\right]}{\left(2e^x + 3x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(2e^x + 6x^2\right)\left(2e^x + 3x^2\right) - \left(2e^x + 6x\right)\left((2x-2)e^x + 2x^3 + 3\right)}{(\quad)^2}$$

e o sinal de ϕ ?

$\delta = 0.01$

$x_0 = 0$

$$\boxed{x_1 = \phi(0) = 1/2 = 0.50000}$$

$$x_2 = \phi(1/2) = \frac{-1e^{1/2} + \frac{1}{4} + 3}{2e^{1/2} + 3/4} = \frac{-1.64872 + 0.25 + 3}{3.29744 + 0.75} = \frac{1.60128}{4.04744}$$

$$\boxed{x_2 = 0.395627}$$

$= 0.395627.$

$$x_3 = \phi(0.395627) =$$

$$= \frac{(-1.208746)\,1.485315 + 3 + \cancel{}^{\,0.1238476}}{2 \times 1.485315 + \cancel{}_{\,0.469562}} = \frac{1.339870}{3.440192} = 0.38947$$

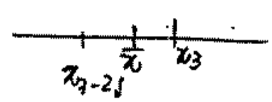
$$\boxed{x_3 = 0.389475}$$

monotônica decrescente.

$$x_4 = \phi(\underbrace{0.389475}_{x_3} - \underbrace{0.02}_{2\delta}) = \phi(0.369475)$$

$$= \frac{(-1.26105)(1.44697) + 3 + 0.100875}{2.893949 + 0.409535} =$$

$$= \frac{1.276173}{2.893949 + 0.409535} = 0.38631 \Rightarrow x_3 - 2\delta < \phi(x_3 - 2\delta)$$



pare!

$$\boxed{\tilde{x} = 0.389475 - 0.01}$$

a) $\phi_1(\bar{x}) = \frac{\bar{x}^3}{5} \cdot 20 = \bar{x} \Rightarrow \bar{x}^3 - 100 = 5\bar{x} \Rightarrow \boxed{\bar{x}^3 - 5\bar{x} - 100 = 0}$

$5 - 5\sqrt[3]{5} - 100 \neq 0$

↑ não serve pois $\bar{x} = \sqrt[3]{5}$ não é ponto fixo de ϕ_1.

$$\begin{cases} \phi_2(\bar{x}) = \frac{\bar{x}^4}{5} = \bar{x} \Rightarrow \bar{x}^2 - 5 = 0, \quad \bar{x} = 0 \quad \bar{x} \text{ é ponto fixo.} \\ \phi_2'(x) = \frac{4x^3}{5} \end{cases}$$

1) ϕ_2, ϕ_2' contínuas em $[1,2]$

2) $k = \max_{x \in [1,2]} |\phi_2'| = \frac{32}{5} > 1 \Rightarrow$ diminuir intervalo

$\phi'(x) = 1 = \frac{4x^3}{5} \Rightarrow$

$x^3 = \frac{5}{4} \Rightarrow x = \sqrt[3]{5/4}$

$\phi'(1) = 0.8$

$\phi_2'(\sqrt[3]{5/4}) = 1.0$

$\phi_2'(\sqrt[3]{5}) = 4$

$f(1) = -4$

$f(\sqrt[3]{5/4}) = \frac{5}{4} - 5 < 0 \Rightarrow$ não corta o eixo!

$f'(x) = 3x^2 > 0$ cresc.

não dá pra usar pois $|\phi'| > 1$ ao redor de $\bar{x} = \sqrt[3]{5}$!

$\phi_3(x) = \frac{2x^3+5}{3x^2}$, $\phi_3'(x) = \frac{6x^2 \cdot 3x^2 - (2x^3+5)\,6x}{9x^4} = \frac{18x^4 - 12x^4 - 30x}{9x^4} = \frac{2}{3}\frac{(x^3-5)}{x^3}$

i) ϕ_3, ϕ_3' são cont. em $[1,2]$ ii) $k = \max|\phi_3'|$

④

$\phi_3'(1) = \frac{2}{3}\cdot\frac{(-4)}{1} = -8/3 > 2!$ não serve / $\phi_3'(2) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8} = 1/4$ ✓

novo intervalo : $[1.5, 2]$

$f(1.5)\,f(2) < 0$ $\quad$ $f(x) = x^3 - 5$

$$\phi_3'' = \frac{\frac{2}{3}(3x^2)(x^3) - \frac{2}{3}(x^3-5)\,3x^2}{x^6} = \frac{\cancel{2x^5} - 2x^5 + 10x}{x^6} = \frac{10}{x^5}$$

$\Rightarrow \phi_3'' > 0$ em $[1.5, 2]$ $\Rightarrow \phi_3'$ estrit. cresc. $\Rightarrow$ máx. min. no bordo $\phi_3'(1.5) = -0.32$

$\phi_3'(2) = 0.25$

$$\max_{[1.5,2]} |\phi_3'| = |\phi_3'(1.5)| = 0.32$$

1) ϕ_3, ϕ_3' cont. em $[1.5, 2]$

2) $\max_{[1.5,2]} |\phi_3'| = 0.32 < 1$

3) x_0 mais próx. de $\bar{x}$

$\tilde{x} = 1.75$

$$\phi(\tilde{x}) = \frac{15.71875}{3\tilde{x}^2} = 1.5718$$

$\phi(\tilde{x}) < \tilde{x} \Rightarrow x_0 = 1.5$

b)

$$n \geq \frac{\log\left(\frac{10^{-5}}{0.5}\right)}{\log 0.32}$$

$|x_n - \bar{x}| \leq k^n |x_0 - \bar{x}| \leq k^n (b-a) = \underset{\sim}{10^{-5}}$ e

$k^n = 10^{-5}/(b-a) \Rightarrow n \log k = \log\left(10^{-5}/b-a\right)$

$$n \geq \frac{\log(10^{-5}/(b-a))}{\log k}$$

$x_1 = \phi(x_0)$

$x_2 = \phi(x_1)$.

c) $\quad e_2 = |\bar{x} - x_2| \leq \frac{k}{1-k}|x_2 - x_1|$.

Cálculo Numérico

Prova 01 – 00/00/1996 – www.ime.usp.br/~roma.

Questão 1:

Utilize o Método de Newton para encontrar uma aproximação da solução positiva da equação abaixo com uma precisão $\delta = 0.01$. Justifique a sua escolha para a aproximação inicial x_0 e a convergência do método.

$$e^x = \frac{3 - x^3}{2}$$

Solução:

Achar um $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tal que $e^{\bar{x}} = \frac{3-\bar{x}^3}{2}$, é equivalente a encontrar um $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(\bar{x}) = 0$, com

$$f(x) = 2e^x + x^3 - 3. \tag{1}$$

Para calcular tal $\bar{x}$, vamos usar o Método de Newton.
De (1), temos que

$$f'(x) = 2e^x + 3x^2$$

Logo, temos a sequência

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

Então,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2e^{x_n} + x_n^3 - 3}{2e^{x_n} + 3x_n^2} \equiv \phi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{2}$$

Vamos conferir que a f satisfaz as condições para a convergência do Método de Newton[1].

Seja $I = [a, b] = [0, 1]$. Temos que

- $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 2(e - 1) > 0$ e portanto $f(0).f(1) < 0$.
- $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$.

[1] Ver o apêndice. ao final deste gabarito.

- $f''(x) = 2e^x + 6x$ não troca de sinal em I.

Então a sequência obtida ao aplicar o Método de Newton a f converge para a única raiz $x \in I$. Escolhendo $x_0 = 1$ e fazendo 3 iterações para determinar o comportamento da sequência, temos

n	x_n	$\phi(x_n)$
0	1.00000	0.592659
1	0.592659	0.415889
2	0.415889	0.386772
3	0.386772	

Observamos que a sequência é decreciente, pelo que afirmamos que a escolha do valor inicial $x_0 = 1$ é correta. Calculamos agora a solução aproximada, com uma precisão pre-fixada de $\delta = 0.001$.

n	x_n	$x_n - 2\delta$	$\phi(x_n - 2\delta)$	$x_n - 2\delta \geq \phi(x_n - 2\delta)$?
0	1.00000	0.980000	0.581698	Sim
1	0.581698	0.561698	0.408006	Sim
2	0.408006	0.388006	0.386096	Sim
3	0.386096	0.366096	0.386409	Não

Logo, $x \approx x_3 - \delta = 0.376096$.

outros materiais? www.ime.usp.br/~roma ■

Questão 2:

a) Escolha uma das funções abaixo para determinar o valor da raíz cúbica de 5 utilizando o Método das Aproximações Sucessivas. Justifique tudo o que for necessário para assegurar a convergência do método.

$$\Phi_1(x) = \frac{x^3}{5} - 20, \qquad \Phi_2(x) = \frac{x^4}{5}, \qquad \Phi_3(x) = \frac{2x^3 + 5}{3x^2}$$

b) Estime o número de iterações "n" que assegure um erro $e_n = |\bar{x} - x_n| \leq 10^{-5}$.

c) A partir dos valores de x_1 e x_2 obtidos com o Método das Aproximações Sucessivas, estime o erro $e_2 = |\bar{x} - x_2|$

Solução:

a) Temos as funções

$$\Phi_1(x) = \frac{x^3}{5} - 20, \qquad \Phi_2(x) = \frac{x^4}{5}, \qquad \Phi_3(x) = \frac{2x^3 + 5}{3x^2}$$

Verificamos primeiro se $\bar{x} = \sqrt[3]{5}$ é ponto fixo de alguma dessas funções.

- $\Phi_1(x) = \frac{x^3}{5} - 20$.

$$\Phi_1(\bar{x}) = \Phi_1(\sqrt[3]{5}) = \frac{(\sqrt[3]{5})^3}{5} - 20 = 19 \implies \bar{x} \neq \Phi_1(\bar{x}).$$

Então, $\bar{x} = \sqrt[3]{5}$ não é ponto fixo de Φ_1.

- $\Phi_2(x) = \frac{x^4}{5}$.

$$\Phi_2(\bar{x}) = \Phi_2(\sqrt[3]{5}) = \frac{(\sqrt[3]{5})^4}{5} = \sqrt[3]{5} = \bar{x} \implies \bar{x} = \Phi_2(\bar{x}).$$

Então, $\bar{x} = \sqrt[3]{5}$ sim é ponto fixo de Φ_2.

- $\Phi_3(x) = \frac{2x^3+5}{3x^2}$.

$$\Phi_3(\bar{x}) = \Phi_3(\sqrt[3]{5}) = \frac{2(\sqrt[3]{5})^3 + 5}{3(\sqrt[3]{5})^2} = \sqrt[3]{5} = \bar{x} \implies \bar{x} = \Phi_3(\bar{x}).$$

Então, $\bar{x} = \sqrt[3]{5}$ sim é ponto fixo de Φ_3.

Veamos agora se as funções Φ_2 e Φ_3 satisfazem as condições do teorema que garanti a convergência[2] do processo iterativo.

Para $\Phi_2(x) = \frac{x^4}{5}$.

i) $\Phi_2'(x) = \frac{4}{5}x^3$. Logo, Φ_2 e Φ_2' são contínuas em qualquer intervalo I que contenha $\bar{x}$, ponto fixo de Φ_2.

ii) Seja I um intervalo qualquer, tal que $\bar{x} = \sqrt[3]{5} \in I$. Logo, temos que $\Phi_2'(\bar{x}) = \Phi_2'(\sqrt[3]{5}) = 4$ e portanto $\max_{x\in I} |\Phi_2'(x)| \geq 4$, com o qual, não pode-se garantir a convergência do processo iterativo.

Para $\Phi_3(x) = \frac{2x^3-5}{3x^2} = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3x^2}$.

i) $\Phi_3'(x) = \frac{2}{3} - \frac{10}{3x^3}$. Logo, Φ_3 e Φ_3' são contínuas em qualquer intervalo I que contenha $\bar{x}$, ponto fixo de Φ_3, mas que não contenha o ponto $x = 0$.

ii) Seja $I = [\frac{3}{2}, 2]$. Temos

$$\frac{3}{2} \leq x \leq 2 \Longrightarrow \frac{2}{3} - \frac{80}{81} \leq \Phi_3'(x) \leq \frac{2}{3} - \frac{10}{24} \Longrightarrow -0.320988 \leq \Phi_3'(x) \leq 0.250000,\ \forall x \in I.$$

Então, $K = \max_{x\in I} |\Phi_3'(x)| \leq 0.320988 < 1$.

iii) Para garantir que $x_n \in I$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, vamos considerar x_0 o extremo de I mais próximo de $\bar{x}$. Seja $\tilde{x} = \frac{7}{4}$ o ponto medio de I. Agora, $\Phi_3(\tilde{x}) = \frac{503}{294} < \frac{7}{4} = \tilde{x}$, pelo que sabemos que $\frac{3}{2}$ é o extremo mais próximo a $\bar{x}$. Logo, seja $x_0 = \frac{3}{2}$.

Como se cumpiem todas as hipoteses do teorema, concluimos que $x_n \xrightarrow{n\to\infty} \bar{x}$.

b) Por indução, verifica-se facilmente que

$$\|x_n - \bar{x}\| \leq K^n \|x_0 - \bar{x}\| \tag{1}$$

Como $\bar{x} \in [\frac{3}{2}, \frac{7}{4}]$, temos que $\|x_0 - \bar{x}\| \leq \frac{1}{4}$. Além, $K = 0.320988$. Logo, de (1), temos

$$\frac{\ln \|x_0 - \bar{x}\| - 5 \ln 10}{-\ln K} = 8.91160 \quad \Longrightarrow \quad n = 9.$$

c) Sabemos que

$$\|x_n - \bar{x}\| \leq \frac{K}{1-K} \|x_n - x_{n-1}\|.$$

Então,

$$\|x_2 - \bar{x}\| \leq \frac{K}{1-K} \|x_2 - x_1\|, \quad \text{com } K = 0.320988.$$

[2] Ver o apêndice, ao final deste gabarito.

Aplicando

$$x_{n+1} = \phi_3(x_n), \quad \text{com } x_0 = \frac{3}{2},$$

temos a tabela

n	x_n	$\phi(x_n)$
0	1.50000	1.74074
1	1.74074	1.71051
2	1.71051	

Logo, $\|x_2 - \bar{x}\| \leq 0.014276$.

Apêndice

Teorema (Convergência do Método de Newton):

Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ duas vezes difereciável, com f'' contínua. Suponha que

i) $f(a).f(b) < 0$

ii) $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in [a,b]$

iii) f'' não troca de sinal em $[a,b]$.

Então a sequência obtida aplicando-se o Método de Newton a f converge para a única raiz $\bar{x}$ de f em $[a,b]$ se for escolhido $x_0 \in [a,b]$ convenientemente. Por exemplo escolhendo-se

$$x_0 = \begin{cases} a & \text{se } \phi(a) \in [a,b] \\ b & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

a sequência $x_{n+1} = \phi(x_n)$, $n = 0, 1, \cdots$, onde

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

convergirá para $\bar{x}$.

Teorema:

Seja $\bar{x}$ uma raiz de uma função f, isolada num intervalo $I = [a,b]$ e seja ϕ uma função tal que $\bar{x} = \phi(\bar{x})$. Se

i) ϕ e ϕ' são contínuas em I.

ii) $K = \max_{x \in I} |\phi'(x)| < 1$.

iii) $x_0 \in I$ e $x_{n+1} = \phi(x_n) \in I$, para $n = 1, 2, \cdots$.

Então a sequência $\{x_n\}$ converge para $\bar{x}$.

Cálculo Numérico

Prova 1A – 25/09/1997 – www.ime.usp.br/~roma.

Questão 1 (4.0 pontos):

É dado o sistema linear

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 &= 5 \end{cases}$$

a) Resolva o sistema pelo método da eliminação de Gauss com condensação pivotal, utilizando ponto flutuante com 2 algarismos significativos.

b) Efetue uma iteração de refinamento da solução.

c) Verifique se o sitema linear dado satisfaz o Critério de Sassenfeld. em caso negativo, troque a posição das equações no sistema, de forma que, para o sistema equivalente assim obtido, o Critério das Linhas assegure a convergência do Método de Gauss-Seidel.

d) Calcule duas iterações pelo Método de Gauss-Seidel a partir de $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^T = (0,0,0)^T$.

Solução:

a) Construindo a matriz aumentada, e resolvendo pelo Método de Eliminação de Gauss com condensação pivotal, temos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 6 & 5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{4} & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 5 \end{array}\right)_{p_1=2}$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} 4 & -2 & 1 & & -2 \\ \hline \frac{1}{4} = 0.25 & -5+0.5=-4.5 & -2-0.25=-2.3 & & 1+0.5=1.5 \\ \frac{2}{4} = 0.5 & 1+1=2 & 6-0.5=5.5 & & 5+1=6 \end{array}\right)$$

$p_1=2$

$$\left(\begin{array}{c|cc|c} 4 & -2 & 1 & -2 \\ \hline 0.25 & \boxed{-4.5} & -2.3 & 1.5 \\ 0.5 & 2 & 5.5 & 6 \end{array}\right)$$

$p_1=2 \quad p_2=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 2 \\ \hline 0.25 & -4.5 & -2.3 & 1.5 \\ 0.5 & \frac{2}{-4.5} = -0.44 & 5.5-1.0=4.5 & 6+0.66=6.7 \end{array}\right)$$

$p_1=2 \quad p_2=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 2 \\ \hline 0.25 & -4.5 & -2.3 & 1.5 \\ 0.5 & -0.44 & 4.5 & 6.7 \end{array}\right)$$

$p_1=2 \quad p_2=2$

Resolvendo o sistema triangular, temos

$$x_3 = 1.5, \qquad x_2 = -1.1 \qquad x_1 = -1.4,$$

ou $x = (-1.4, -1.1, 1.5)^T$.

b) Devemos encontrar $c = (c_1, c_2, c_3)^T$ tal que $\bar{x} = \tilde{x} + c$. Nestas condições, $A\bar{x} = b = A\tilde{x} + Ac$, com o qual, $Ac = b - A\tilde{x} = r$. Calculando r (usando dupla precisão), temos que $r = (-0.1, -0.1, -0.1)^T$. Assim, temos que resolver o sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1 \\ -0.1 \\ -0.1 \end{pmatrix}$$

Agora devemos "transformar" o vetor r para podermos trabalhar com a matriz A já triangularizada.

$$\begin{pmatrix} -0.1 \\ -0.1 \\ -0.1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -0.1 \\ -0.1 \\ -0.1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -0.1 \\ -0.1 \\ -0.1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$p_1=2 \quad p_2=2$

$$\begin{pmatrix} -0.1 \\ -0.1-(0.25)(-0.1)=-0.08 \\ -0.1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -0.1 \\ -0.08 \\ -0.1-(0.5)(-0.1)=-0.05 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -0.1 \\ -0.08 \\ -0.05-(-0.44)(-0.08)=-0.09 \end{pmatrix}$$

Assim, o sistema triangular a resolver é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & -0.1 \\ 0 & -4.5 & -2.3 & -0.08 \\ 0 & 0 & 4.5 & -0.09 \end{array}\right)$$

cuja solução é

$$c_3 = -0.02, \qquad c_2 = 0.03 \qquad c_1 = -0.01,$$

ou $c = (-0.01, 0.03, -0.02)^T$. Logo, $\bar{x} = \tilde{x} + c = (-1.41, -1.07, 1.48)^T$.

c) Observamos que

$$\beta_1 = \frac{1}{|1|}(|-5| + |-2|) = 7.$$

Então,

$$M = \max_{1 \le i \le 3} \beta_i > 1.$$

Portanto o sistema não satisfaz o critério de Sassenfeld[1]. Rearranjando as equações, temos

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Verificamos que o sistema satisfaz o Critério das Linhas[2].

$$\begin{gathered} |4| > |-2| + |1| \\ |-5| > |1| + |-2| \\ |6| > |2| + |1| \end{gathered}$$

Portanto, o método de Gauss-Seidel converge.

[1] Ver o apêndice, ao final deste gabarito.
[2] Ver o apêndice, ao final deste gabarito.

d) As equações definidas pelo Método de Gauss-Seidel são:

$$x_1^{n+1} = \frac{1}{4}(-2 + 2x_2^n - x_3^n)$$
$$x_2^{n+1} = -\frac{1}{5}(1 - x_1^{n+1} + 2x_3^n)$$
$$x_3^{n+1} = \frac{1}{6}(5 - 2x_1^{n+1} - x_2^{n+1})$$

Seja $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$. Aplicando as equações acima, temos

$$x^{(1)} = (-0.5, -0.3, 1.05)^T$$
$$x^{(2)} = (-0.9125, -0.8025, 1.271)^T$$

Questão 2 (3.0 pontos):

É dado o polinômio $p(x) = x^3 - 0.25x^2 + 0.75x - 2$.

a) Delimite um intervalo que contenha um único zero real $\bar{x}$ de $p(x)$.

b) Mostre que o Método de Newton é convergente para $\bar{x}$ caso tomemos $x_0 = 1$. Justifique!

c) Calcule o zero real de $p(x)$ com precisão $\varepsilon = 0.01$ a partir de $x_0 = 1$.

Solução:

a) $p(x) = x^3 - 0.25x^2 + 0.75x - 2$.
Então, $p'(x) = 3x^2 - 0.5x + 0.75$ e $p''(x) = 6x - 0.5$.
$p''(x) = 0 \iff x = \frac{1}{12}$. Logo, $x = \frac{1}{12}$ é um possível ponto de inflexão.

$$p'(x) = 3x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} = 3\left(x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{4}\right) = 3\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{35}{144}\right] > 0, \Longrightarrow p'(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Então p é estrítamente crescente. Logo, p ten um único zero real. Observamos que $p(1) = -0.5$ e $p(2) = 6.5$. Pelo Teorema de Bolzano, existe um $\bar{x} \in I = [a, b] = [1, 2]$ tal que $p(\bar{x}) = 0$.

b) O Método de Newton é da forma

$$x_{n+1} = \phi(x_n), \ n = 0, 1, 2, \cdots, \text{ com } \phi(x) = x - \frac{p(x)}{p'(x)}.$$

Agora conferimos que a sequência obtida ao aplicar o Método de Newton converge[3] para $\bar{x} \in I$. Claramente observa-se que p é duas vezes continuamente diferenciável em I. Além disso, temos que

i) $p(a).p(b) = p(1).p(2) < 0$.
ii) $p'(x) \neq 0$ em I.
iii) $p''(x)$ não troca de sinal em I.

Logo, a sequência gerada pelo Método de Newton converge para a única raiz de p em $I = [1, 2]$, se for escolhido $x_0 \in I$ convenientemente. Escolhendo $x_0 = 1$ e fazendo algumas iterações para determinar o comportamento da sequência, temos

n	x_n	$\phi(x_n)$
0	1.00000	1.15385
1	1.15385	1.13735
2	1.13735	1.13714
3	1.13714	

[3] Ver o apêndice, ao final deste gabarito

c) Da tabela mostrada em b), observa-se que $x_1 > x_2 > x_3$ (a sequência é decrescente). Seja $x_1 = 1.15385$ e $\varepsilon = 0.01$. Temos que $x_1 - 2\varepsilon = 1.13385$. Logo $\phi(x_1 - 2\varepsilon) = 1.13715$. Como $x_1 - 2\varepsilon < \phi(x_1 - 2\varepsilon)$, temos que $\tilde{x} \approx \bar{x}$, com $\tilde{x} = x_1 - \varepsilon = 1.14385$.

Questão 3 (3.0 pontos):

a) Mostre que a função $\phi(x) = \cos(\frac{3x}{2} - 1)$ possui um único ponto fixo $\bar{x}$ no intervalo $[0, \frac{4}{3}]$.

b) Determine um intervalo I tal que para todo $x_0 \in I$ a sequência $x_{n+1} = \phi(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, convirja para o ponto fixo $\bar{x}$ de ϕ. Justifique!

c) Delimite o erro de truncamento $|x_n - \bar{x}|$ obtido ao se escolher $x_0 = 0.95$.

Solução:

a) Seja $f(x) = x - \phi(x)$. Mostrar que a função ϕ possui um único ponto fixo $\bar{x}$ em $I = [0, \frac{4}{3}]$ é equivalente a mostrar que a função f possui um único zero $\bar{x}$ em I. logo, temos

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \cos(\frac{3x}{2} - 1), \\ \Longrightarrow f'(x) &= 1 + \frac{3}{2}\sin(\frac{3x}{2} - 1), \\ \Longrightarrow f''(x) &= \frac{9}{4}\cos(\frac{3x}{2} - 1) > 0, \forall x \in I. \end{aligned}$$

Além disso, temos que $f'(x) = 0$, se $\tilde{x} = \frac{2}{3}(\arcsin(-\frac{2}{3} + 1)) = 0.180182$ (ponto mínimo). Observa-se que $f'(x) < 0$, no intervalo $[0, \tilde{x})$, e $f'(x) > 0$, no intervalo $(\tilde{x}, \frac{4}{3}]$. Como $f(0) = -0.540302$ e $f(\tilde{x}) = -0.565174$, e f é estritamente decrescente em $[0, \tilde{x}]$, temos que não existe um $\bar{x} \in [0, \tilde{x}]$, tal que $f(\bar{x}) = 0$. Por outro lado, como $f(\tilde{x}) = -0.565174$ e $f(\frac{4}{3}) = 0.793028$, e f é estritamente crescente em $[\tilde{x}, \frac{4}{3}]$, temos que existe um único $\bar{x} \in [\tilde{x}, \frac{4}{3}]$, tal que $f(\bar{x}) = 0$.

b) Vamos procurar um intervalo I, con $\bar{x} \in I$, tal que se cumplan as hipóteses do teorema que nos garanti a convergência[4] da sequência $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, gerada por $x_{n+1} = \phi(x_n)$, $x_0 \in I$. Temos que

$$\phi(x) = \cos(\frac{3x}{2} - 1), \qquad \phi'(x) = -\frac{3}{2}\sin(\frac{3x}{2} - 1).$$

i) Observamos que ϕ e ϕ' são contínuas em $\mathbb{R}$, e em particular em qualquer intervalo I que contenha o ponto fixo $\bar{x}$.

ii) Seja $K = \max_{x \in I} |\phi'(x)|$. Deseamos que $K < 1$. Então, o intervalo I deve ser tal que $\max_{x \in I} |\frac{3}{2}\sin(\frac{3x}{2} - 1)| < 1$. Então, $\max_{x \in I} |\sin(\frac{3x}{2} - 1)| < \frac{2}{3}$. Em particular,

[4] Ver o apêndice, ao final deste gabarito.

podemos escolher I tal que $\max_{x\in I}|\sin(\frac{3x}{2}-1)| \leq \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$, com o qual temos

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \leq \sin(\frac{3x}{2}-1) \leq \frac{1}{2} \\ \Longrightarrow \quad & -\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{9}+\frac{2}{3} \\ \Longrightarrow \quad & I = [-\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}, \frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}] \ \text{ e } \ K = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

iii) Facilmente pode-se verificar que para qualquer $x \in I$, $\phi(x) \in I$, com o qual, se $x_0 \in I$, teremos que $x_n \in I$, $n = 1, 2, \cdots$.

c) Sabemos que

$$\|x_n - x\| \leq \frac{K}{1-K}\|x_n - x_{n-1}\|.$$

Tomando $x_0 = 0.95$ e fazendo as iterações, obtemos a seguinte tabela

n	x_n	$\phi(x_n)$
0	0.950000	0.911039
1	0.911039	0.933566
2	0.933566	0.920925
3	0.920925	0.928149
4	0.928149	0.924061
5	0.924061	

Logo,

$$\|x_5 - \bar{x}\| \leq \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}\|x_5 - x_4\| \quad \Longrightarrow \quad \|x_5 - \bar{x}\| \leq 0.012264.$$

outros materiais? www.ime.usp.br/~roma ■

Freqüentemente, existem várias formas de se resolver um mesmo exercício. As sugestões apresentadas aqui foram elaboradas por Olga Harumi Saito e Nelson Leonardo Vidaurre Navarrete, alunos de pós-graduação inscritos no PAE, IME-USP, objetivando a clareza da exposição. Este gabarito pode ser obtido gratuitamente via Internet seguindo os links apropriados a partir de www.ime.usp.br/~roma. Junho/2000.

Apêndice

Critério de Sassenfeld:

Seja

$$M = \max_{1 \le i \le n} \beta_i,$$

onde os β_i são definidos como

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \left|\frac{1}{a_{11}}\right| \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}|, \\
\beta_i &= \left|\frac{1}{a_{ii}}\right| \left[\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|\beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|\right], \quad i = 2, \cdots, n.
\end{aligned}$$

A condição $M < 1$ é suficiente para que as aproximações obtidas pelo Método de Gauss-Seidel convirjam para a solução do sistema $Ax = b$.

Critério das linhas:

Uma condição suficiente para garantir a convergência do Método de Gauss-Seidel, quando aplicada a um sistema $Ax = b$, com $a_{ii} \neq 0$, é

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad i = 1, \cdots, n.$$

Teorema (Convergência do Método de Newton):

Seja $f : [a, b] \dashrightarrow \Re$ duas vezes difereciável, com f'' contínua. Suponha que

i) $f(a).f(b) < 0$

ii) $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$

iii) f'' não troca de sinal em $[a, b]$.

Então a sequência obtida aplicando-se o Método de Newton a f converge para a única raiz $\bar{x}$ de f em $[a, b]$ se for escolhido $x_0 \in [a, b]$ convenientemente. Por exemplo, escolhendo-se

$$x_0 = \begin{cases} a & \text{se } \phi(a) \in [a, b] \\ b & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

a sequência $x_{n+1} = \phi(x_n)$, $n = 0, 1, \cdots$, onde

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

convergirá para $\bar{x}$.

Teorema:

Seja $\bar{x}$ uma raiz de uma função f, isolada num intervalo $I = [a, b]$ e seja ϕ uma função tal que $\bar{x} = \phi(\bar{x})$. Se

i) ϕ e ϕ' são contínuas em I.

ii) $K = \max_{x \in I} |\phi'(x)| < 1$.

iii) $x_0 \in I$ e $x_{n+1} = \phi(x_n) \in I$, para $n = 1, 2, \cdots$.

Então a sequência $\{x_n\}$ converge para $\bar{x}$.

USP Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo Numérico

Prova 1 – 22/09/1998 – www.ime.usp.br/~roma.

Questão 1 (2.0 pontos):

a) Seja p um número inteiro positivo. Mostre que a sequência

$$x_{n+1} = \frac{1}{p}\left((p-1)x_n + \frac{a}{x_n^{p-1}}\right)$$

pode ser utilizada para calcular $\sqrt[p]{a}$, quando $a \geq 0$.

b) Utilizado a), calcular $\sqrt[3]{7}$ com precisão pré-fixada $\varepsilon = 0.001$.

Solução:

a) Veamos primeiro se $\bar{x} = \sqrt[p]{a}$ é ponto fixo de ϕ, com

$$\phi(x) = \frac{1}{p}\left((p-1)x + \frac{a}{x^{p-1}}\right).$$

$$\begin{aligned}
\phi(\bar{x}) &= \phi(\sqrt[p]{a}) = \frac{1}{p}\left((p-1)\sqrt[p]{a} + \frac{a}{(\sqrt[p]{a})^{p-1}}\right) \\
&= \frac{1}{p}\left(\frac{(p-1)a + a}{(\sqrt[p]{a})^{p-1}}\right) = \frac{1}{p}\left(\frac{pa}{(\sqrt[p]{a})^{p-1}}\right) \\
&= \frac{(\sqrt[p]{a})^{p}}{(\sqrt[p]{a})^{p-1}} = \sqrt[p]{a} \\
&= \bar{x}.
\end{aligned}$$

Logo, $\bar{x}$ é ponto fixo de ϕ.

Veamos agora se a função ϕ satisfaz as condições do teorema que garanti a convergência do processo iterativo.

[1] Ver o apêndice, ao final deste gabarito.

i) De (1), temos que

$$\phi'(x) = \frac{p-1}{p}\left(1 - \frac{a}{x^p}\right).$$

Logo, ϕ e ϕ' são contínuas em qualquer intervalo I que contenha $\sqrt[p]{a}$, mas não o ponto 0.

ii) No possível, queremos que

$$K = \max_{x \in I} |\phi'(x)| < 1, \tag{2}$$

para algum intervalo apropriado I. Logo, podemos obter condições para tal intervalo I. De (2), temos que

$$\begin{aligned} & -1 < \frac{p-1}{p}\left(1 - \frac{a}{x^p}\right) < 1 \\ \Longrightarrow\ & -1 < \frac{p-1}{p}\left(1 - \frac{a}{x^p}\right) \ \text{ e } \ \frac{p-1}{p}\left(1 - \frac{a}{x^p}\right) < 1 \\ \Longrightarrow\ & x > \sqrt[p]{a}\left(\frac{p-1}{2p-1}\right)^{\frac{1}{p}} \ \text{ e } \ x^p > -a(p-1). \end{aligned}$$

A segunda desigualdade é obvia, assumindo $p \geq 2$. A primeira desigualdade nos diz a condição que deve cumplir o intervalo I para que $K < 1$, em (2), isto é, para qualquer intervalo $I = [b, c]$ com $b > \sqrt[p]{a}(\frac{p-1}{2p-1})^{\frac{1}{p}}$, temos que $K < 1$.

iii) Para garantir que $x_n \in I$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, podemos escolher como x_0 o extremo de I mais próximo de $\bar{x}$.

Como se cumplem todas as hipoteses do teorema, concluimos que $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \bar{x}$.

b) Temos que $p = 3$, $a = 7$. Do ítem a), sabemos que devemos escolher um intervalo $I = [b, c]$, com $b > \sqrt[3]{7}.\sqrt[3]{0.4} = 1.40946$, que contenha o ponto $\bar{x} = \sqrt[3]{7}$. Logo, seja $I = [1.7, 2]$. Vamos escolher como x_0 o extremo de I mais próximo de $\bar{x}$. Seja $\tilde{x} = 1.85$, ponto medio de I. Agora, $\phi(\tilde{x}) = 1.91510 > 1.85 = \tilde{x}$, pelo que sabemos que 2 é o extremo mais próximo a $\bar{x}$. Logo, fazemos $x_0 = 2$.

Aplicando a relação (1), com $x_0 = 2$, temos a seguinte tabela

n	x_n	$\phi(x_n)$
0	2.00000	1.91666
1	1.91666	1.91294
2	1.91294	1.91293
3	1.91293	

Observa-se que $x_1 > x_2 > x_3$, com o qual vemos que a sequência é decrescente. Trabalhando com precisão pré-fixada $\varepsilon = 0.001$, construímos a seguinte tabela

n	x_n	$x_n - 2\varepsilon$	$\phi(x_n - 2\varepsilon)$	$x_n - 2\varepsilon \geq \phi(x_n - 2\varepsilon)$?
0	2.00000	1.99800	1.91650	Sim
1	1.91650	1.91450	1.91293	Sim
2	1.91293	1.91093	1.91293	Não

Logo, $\bar{x} \approx x_2 - \varepsilon = 1.91293 - 0.001 = 1.91193$.

outros materiais? www.ime.usp.br/~roma ■

Questão 2 (3.0 pontos):

Aplique o Método de Newton para calcular o maior zero de $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$. Efetue quatro iterações utilizando aritmética de ponto flutuante com três algarismos significativos, apresentando os resultados numa tabela. Faça também um esboço gráfico de f.

Solução:

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$. Logo,

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 7, \quad f''(x) = 6x - 10.$$

$f''(x) = 0 \iff x = \frac{5}{3}$, o qual é um possível ponto de inflexão.
$f'(x) = 0 \iff x = 1$ ou $x = \frac{7}{3}$. Como $f'(x) = 3[(x - \frac{5}{3})^2 - \frac{4}{9}]$, temos que $x = 1$ é um máximo local para f, e $x = \frac{7}{3}$ é um mínimo local. Com istos dados, obtemos a gráfica de f'.

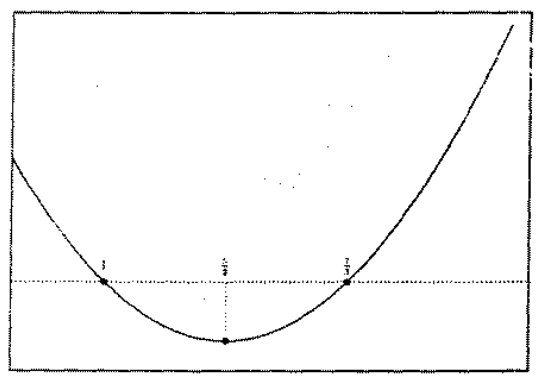


Figura 1: Gráfica da função f'.

Avaliando f nos pontos $x = 1, \frac{7}{3}, \frac{5}{3}$ e 4, temos que $f(1) = 0$, $f(\frac{7}{3}) = -1.185$, $f(\frac{5}{3}) = -0.5926$ e $f(4) = 9$. De isto, podemos concluir que no intervalo $I = [\frac{5}{3}, 4]$ f possui um zero. Além disso, podemos fazer um esboço da gráfica de f.

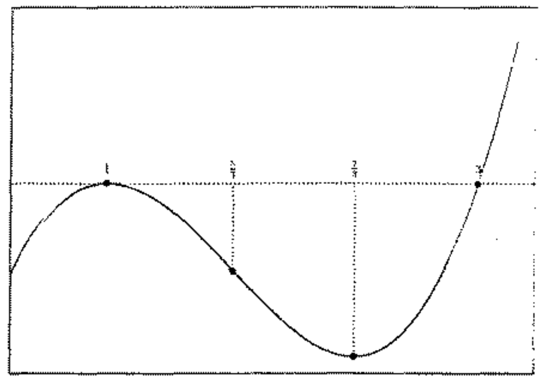


Figura 2: Gráfica da função f.

Aplicando o Método de Newton para f, temos a sequência

$$x_{n+1} = \phi(x_n), \ n = 0, 1, 2, \cdots \quad \text{com} \quad \phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Logo, temos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 5x_n^2 + 7x_n - 3}{3x_n^2 - 10x_n + 7}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

Escolhendo $x_0 = 4$, montamos a seguinte tabela

n	x_n	$\phi(x_n)$
0	4.00	3.40
1	3.40	3.10
2	3.10	3.01
2	3.01	3.00
4	3.00	3.00

outros materiais? www.ime.usp.br/~roma ■

Questão 3 (2.0 pontos):

Utilizando o método de eliminação de Gauss, calcule o determinante e a seguir a inversa da matriz abaixo. Efetue todos os cálculos utilizando frações.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solução:

Resolvendo pelo Método de Eliminação de Gauss, temos

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} -1 & 0 & 2 & 0 \\ \hline \frac{4}{-1} = -4 & 1+0=1 & 3+8=11 & 1+0=1 \\ \frac{2}{-1} = -2 & 2+0=2 & -1+4=3 & 1+0=1 \\ \frac{0}{-1} = 0 & 0-0=0 & 1-0=1 & 0-0=0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} -1 & 0 & 2 & 0 \\ \hline -4 & \boxed{1} & 11 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 11 & 1 \\ \hline -2 & \frac{2}{1} = 2 & 3-22=-19 & 1-2=-1 \\ 0 & \frac{0}{1} = 0 & 1-0=1 & 0-0=0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 11 & 1 \\ -2 & 2 & \boxed{-19} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 11 & 1 \\ -2 & 2 & -19 & -1 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{-19} & 0 - \frac{1}{19} = -\frac{1}{19} \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 11 & 1 \\ -2 & 2 & -19 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{-19} & -\frac{1}{19} \end{pmatrix}$$

Logo, $|A| = (-1)(1)(-19)(-\frac{1}{19}) = -1$.
Para calcular a inversa de A, temos que resolver os sistemas $Ax_i = b_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, onde $b_1 = (1,0,0,0)^T$, $b_2 = (0,1,0,0)^T$, $b_3 = (0,0,1,0)^T$, $b_4 = (0,0,0,1)^T$. A solução de cada sistema corresponde à i-ésima coluna da inversa de A. Vamos explicar para $i = 1$, isto é, temos que resolver o sistema.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} \\ \xi_2^{(1)} \\ \xi_3^{(1)} \\ \xi_4^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

onde $x_1 = (\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \xi_3^{(1)}, \xi_4^{(1)})^T$.
Agora, devemos primeiro "transformar" b para podermos trabalhar com a matriz A já triangularizada.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0-(-4)(1)=4 \\ 0-(-2)(1)=2 \\ 0-0(1)=0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2-2(4)=-6 \\ 0-0(4)=0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \\ 0-(-\frac{1}{19})(-6)=-\frac{6}{19} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \\ -\frac{6}{19} \end{pmatrix}$$

cuja solução é $x_1 = (-1, -2, 0, -6)^T$. Aplicando o mesmo método para b_2, b_3 e b_4, temos as soluções

$$x_2 = (0, -1, 0, 2)^T, \qquad x_3 = (0, 1, 0, -1)^T, \qquad x_4 = (2, 8, 1, -19)^T$$

com o qual, a inversa de A é

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & -1 & -19 \end{pmatrix}.$$

outros materiais? www.ime.usp.br/~roma ■

Questão 4 (3.0 pontos):

É dado o sistema linear:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 6x_3 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases}$$

(a) Resolva o sistema dado pelo método de Gauss com condensação pivotal, utilizando ponto flutuante com 2 algarismos significativos.
(b) Efetue uma iteração de refinamento da solução.
(c) Verifique se o sistema linear dado satisfaz o Critério de Sassenfeld. Em caso negativo, troque a posição das equações no sistema, de forma que, para o sistema equivalente assim obtido, o Critério das Linhas assegure a convergência do Método de Gauss-Seidel.
(d) Para o sistema obtido em (c), calcule duas iterações pelo Método de Gauss-Seidel a partir de $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = (0, 0, 0)$.

Solução:

a) Temos o seguinte sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Usando o Método de Eliminação de Gauss com condensação pivotal e aritmética de ponto flotante com 2 algarismos significativos, temos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 6 & 3 \\ 4 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

$$\underset{p_1=2}{\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{4} & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 3 \\ 1 & -5 & -2 & -4 \end{array}\right)}$$

$$\underset{p_1=2}{\left(\begin{array}{c|ccc|c} 4 & -2 & 1 & & 2 \\ \hline \frac{2}{4} = 0.5 & 1 + 1 = 2 & 6 - 0.5 = 5.5 & & 3 - 1 = 2 \\ \frac{1}{4} = 0.25 & -5 + 0.5 = -4.5 & -2 - 0.25 = -2.3 & & -4 - 0.5 = -4.5 \end{array}\right)}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & | & 2 \\ 0.25 & \boxed{-4.5} & -2.3 & | & -4.5 \\ 0.5 & 2 & 5.5 & | & 2 \end{pmatrix}$$
$$p_1=2 \quad p_2=3$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & | & 2 \\ 0.25 & -4.5 & -2.3 & | & -4.5 \\ 0.5 & \frac{2}{-4.5} = -0.44 & 5.5 - 1.0 = 4.5 & | & 2-2=0 \end{pmatrix}$$
$$p_1=2 \quad p_2=3$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & | & 2 \\ 0.25 & -4.5 & -2.3 & | & -4.5 \\ 0.5 & -0.44 & 4.5 & | & 0 \end{pmatrix}$$
$$p_1=2 \quad p_2=3$$

Resolvendo o sistema triangular, temos

$$x_3 = 0.00, \qquad x_2 = 1.0, \qquad x_1 = 1.0,$$

ou

$$x = (1, 1, 0)^T$$

b) Usamos dupla precisão para o refinamento da solução (4 algarismos significativos).

Devemos encontrar $c := (c_1, c_2, c_3)^T$ tal que $x = \bar{x} + c$. Nestas condições, $Ax = b = A\bar{x} + Ac$, com o qual, $Ac = b - A\bar{x} = r$. Calculando r, temos que $r = (0, 0, 0)^T$, e portanto, a solução do sistema $Ac = r$ é $c = (0, 0, 0,)^T$.

Logo, temos que $\bar{x} = \tilde{x} = (1, 1, 0)$, o qual é lógico, pois essa é a solução exata.

c) Da equação (1), temos

$$\beta_1 = \frac{1}{|2|}(|1| + |6|) = \frac{7}{2} > 1$$

Logo,

$$M = \max_{1 \le i \le 3} \beta_i > 1$$

Por tanto, o sistema (1) não satisfaz o Critério de Sassenfeld[2]. Rearranjando as equações, temos o sistema equivalente

[2]Ver o apêndice, ao final deste gabarito.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

No sistema (2), observamos que

$$\begin{aligned} |4| &> |2| + |1| \\ |-5| &> |1| + |-2| \\ |6| &> |2| + |1| \end{aligned}$$

Logo, o sistema (2) satisfaz o Critério das Linhas[3], e portanto, o método de Gauss-Seidel converge.

d) O método de Gauss-Seidel, para o sistema (2), define as equações

$$\begin{aligned} x_1^{n+1} &= \frac{1}{4}(2 + 2x_2^n - x_3^n) \\ x_2^{n+1} &= -\frac{1}{5}(-4 - x_1^{n+1} + 2x_3^n) \\ x_3^{n+1} &= \frac{1}{6}(3 - 2x_1^{n-1} - x_2^{n+1}) \end{aligned} \tag{3}$$

Pegando $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ e aplicando (3) temos

$$x^{(1)} = (0.5, 0.9, 0.1833)^T, \qquad x^{(2)} = (0.9043, 0.9075, 0.0474)^T$$

Freqüentemente, existem várias formas de se resolver um mesmo exercício. As sugestões apresentadas aqui foram elaboradas por Olga Harumi Saito e Nelson Leonardo Vidaurre Navarrete, alunos de pós-graduação inscritos no PAE, IME-USP, objetivando a clareza da exposição. Este gabarito pode ser obtido gratuitamente via Internet seguindo os links apropriados a partir de www.ime.usp.br/~roma. Junho/2000.

[3]Ver o apêndice, ao final deste gabarito.

Apêndice

Teorema:

Seja $\bar{x}$ uma raiz de uma função f, isolada num intervalo $I = [a, b]$ e seja ϕ uma função tal que $\bar{x} = \phi(\bar{x})$. Se

i) ϕ e ϕ' são contínuas em I.

ii) $K = \max_{x \in I} |\phi'(x)| < 1$.

iii) $x_0 \in I$ e $x_{n+1} = \phi(x_n) \in I$, para $n = 1, 2, \cdots$.

Então a sequência $\{x_n\}$ converge para $\bar{x}$.

Critério de Sassenfeld:

Seja

$$M = \max_{1 \leq i \leq n} \beta_i.$$

onde os β_i são definidos como

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \left|\frac{1}{a_{11}}\right| \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}|, \\ \beta_i &= \left|\frac{1}{a_{ii}}\right| \left[\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| \right], \ i = 2, \cdots, n. \end{aligned}$$

A condição $M < 1$ é suficiente para que as aproximações obtidas pelo Método de Gauss-Seidel convirjam para a solução do sistema $Ax = b$.

Critério das linhas:

Uma condição suficiente para garantir a convergência do Método de Gauss-Seidel, quando aplicada a um sistema $Ax = b$, com $a_{ii} \neq 0$, é

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \ i = 1, \cdots, n.$$

Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo Numérico

Prova 01 – 12/09/1999 – www.ime.usp.br/~roma.

Questão 1 (2.0 pontos):

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua com um único zero $\overline{x} \in (a,b)$. Considere o seguinte método iterativo para calcular este zero com uma precisão $\varepsilon > 0$ dada (*método da tricotomia*). Na primeira etapa do processo, dividimos o intervalo $[a,b]$ em *três* partes de mesmo comprimento e decidimos em qual das três se encontra $\overline{x}$. Obtemos assim um novo intervalo e repetimos o processo, iterativamente desta forma até isolarmos $\overline{x}$ num intervalo de comprimento menor do que 2ε. Tomamos então o ponto médio deste intervalo como a aproximação desejada de $\overline{x}$. Sabendo que $1 < \sqrt[3]{7} < 2$, utilize este método para calcular $\sqrt[3]{7}$ com precisão $\varepsilon = 0.1$.

Solução:

Desejamos obter x tal que $x = \sqrt[3]{7}$, ou seja, x tal que $x^3 - 7 = 0$. Tomemos $f(x) = x^3 - 7$. O gráfico da função é

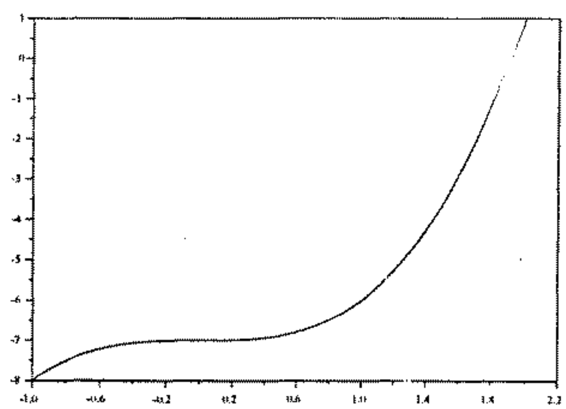


Figura 1: Gráfico da função f.

Para o Método da Tricotomia, apresentamos um algoritmo de resolução:

```
erro:=b−a;
n:=0;
nMax:=50;
while (erro>=2*eps) and (n<=nMax) do
  h:=erro/3;
  c:=a+h;
  d:=c+h;
  if (f(c)*f(b)<0)
    then
      if (f(c)*f(d)<0)
        then
          a:=c;
          b:=d;
        else
          if (f(c)*f(d)>0)
            then
              a:=d;
            else
              a:=d;
              b:=d;
              erro:=0;
          end if
        end if
    else
      if (f(c)*f(b)>0)
        then
          b:=c;
        else
          a:=c;
          b:=c;
          erro:=0;
      end if
  end if
  erro:=b−a;
  n:=n+1;
end do
x:=(a+b)/2
```

Observação: Este algoritmo vale nas condições do Teorema de Bolzano[1].
Para nosso problema, temos

$$f(x) = x^3 - 7, \qquad a = 1, \qquad b = 2, \qquad eps = 0.1$$

Assim, aplicando o algoritmo para esses dados, temos

[1]Ver o apêndice, ao final deste gabarito.

n	a	b	h	c	d	f(a)	f(b)	f(c)	f(d)	erro
0	1.000	2.000	0.3333	1.333	1.666	-6.000	1.000	-4.631	-2.376	0.3340
1	1.666	2.000	0.1113	1.777	1.888	-2.376	1.000	-1.389	-.2700	0.1120
2	1.888	2.000								

Logo, $x \approx \frac{a+b}{2} = 1.944$

Questão 2 (3.0 pontos):

Seja $f(x) = e^x - 4x^2$.

(a) Mostre que a equação $f(x) = 0$ possui três soluções reais.

(b) Utilize o método de Newton para calcular a maior das soluções com precisão pré-fixada de 0.01.

Solução:

a) Vamos estudar o comportamento da função $f(x) = e^x - 4x^2$ por intermédio de suas derivadas:

$$f'(x) = e^x - 8x$$
$$f''(x) = e^x - 8$$
$$f''(x_0) = 0 \iff x_0 = 3\ln(2)$$

Logo, $x_0 = 3\ln(2)$ é um ponto de inflexão.
Como $f''(x) < 0$, se $x < 3\ln(2)$, e $f''(x) > 0$, se $x > 3\ln(2)$, temos que f' tem um mínimo global em $x_0 = 3\ln(2)$.
Observamos que $f'(x_0) = 8(1 - 3\ln(3)) < 0$ e $f'(x_0) = 1 > 0$, donde existe um $x_1 \in (0, x_0)$ (e só um) tal que $f'(x) = 0$ ($f'' < 0$). Temos também que $f'(4) = e^4 - 32 > 0$, donde existe $x_2 \in (x_0, 4)$ (e só um) tal que $f'(x_2) = 0$ ($f'' > 0$). O esboço do gráfico de f' é dado por

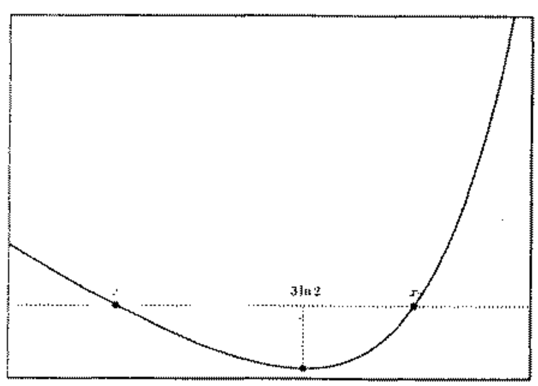


Figura 2: Gráfico da função f'.

Do gráfico, observamos que x_1 é um máximo local para f, e x_2 é um mínimo local. Como $f(0) = 1 > 0$, $f(x_0) = 8 - 4(3\ln(2))^2 < 0$ e $x_1 \in (0, x_0)$ é um máximo local, temos que existe um $y_2 \in (x_1, x_0)$ tal que $f(y_2) = 0$. Além disso, como $f(x_0) < 0$, $f(5) > 0$ e x_2 é um mínimo local, temos que existe $y_3 \in (x_2, 5)$ tal que $f(y_3) = 0$. Por fim, sabemos que $f(0) = 1 > 0$ e $f(-1) = e^{-1} - 4 < 0$. Então existe $y_1 \in (-1, 0)$ tal que $f(y_1) = 0$. Assim, o gráfico de $f(x) = e^x - 4x^2$ fica

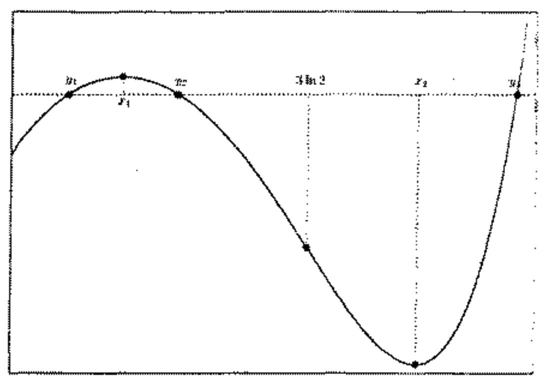


Figura 3: Gráfico da função f.

b) O Método de Newton é da forma

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Então

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} - 4x_n^2}{e^{x_n} - 8x_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

O maior dos zeros de $f(x)$ é $y_3 \in [x_2, 5]$ (veja considerações anteriores). Para decidirnos a monotonicidade da sequência de qproximações obtidas pelo Método de Newton ,apliquemos o método a partir de $x_0 = 5$

n	x_n	$\Phi(x_n)$
0	5.000	4.554
1	4.554	4.348
2	4.348	4.309
3	4.309	4.307

Como $x_1 > x_2 > x_3$, temos que a sequência de iteradas converge de forma monotonícamente decrescente. Assim, aplicamos

$$x_{n+1} = \Phi(x_n - 2\delta)$$

até que

$$x_n - 2\delta < \Phi(x_n - 2\delta)$$

com o qual temos

$$\tilde{x} \approx \bar{x}, \quad \tilde{x} = x_{n+1} - \delta$$

Para nosso problema, temos $x_0 = 5$, $\delta = 0.01$. Fazendo as iterações, obtemos a seguinte tabela:

n	x_n	$x_n - 2\delta$	$\Phi(x_n - 2\delta)$	¿$x_n - 2\delta \geqslant \Phi(x_n - 2\delta)$?
0	5.000	4.980	4.542	Sim
1	4.542	4.522	4.339	Sim
2	4.339	4.319	4.306	Sim
3	4.306	4.286	4.307	Não

Logo, $\tilde{x} = x_3 - \delta = 4.296$. **outros materiais? www.ime.usp.br/~roma** ■

Questão 3 (2.0 pontos):

Em um método de aproximações sucessivas, calcula-se a seqüência $x_{n+1} = \phi(x_n)$ a partir de um valor inicial x_0. Dê exemplos de funções $\phi(x)$ (com os repectivos x_0) tais que:

a) A seqüência x_n converge alternadamente.

b) A seqüência x_n converge monotonicamente.

c) A seqüência x_n não converge.

Justifique!

Solução:

a) Seja $f(x) = \frac{x^2}{9} - \frac{3x}{2}$. Queremos calcular a menor raiz de f, isto é, $x = 0$.

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{3x}{2} = 0 \Longleftrightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{x}{2} = x.$$

Logo, temos a sequência

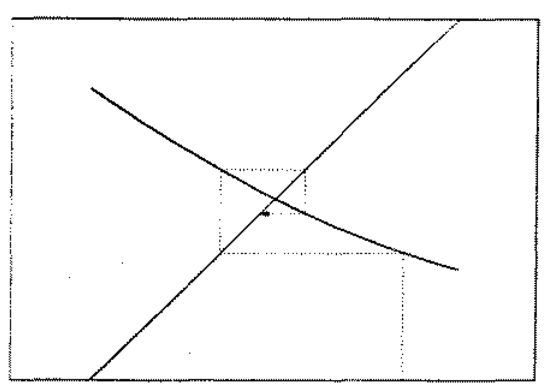
$$x_{n+1} = \phi(x_n), \ n = 0, 1, 2, \cdots, \quad \text{com } \phi(x) = \frac{x^2}{9} - \frac{x}{2}.$$

Seja $I = [-1, 1]$. Sabemos que deve-se cumplir que $-1 < \phi'(x) < 0$, $\forall x \in I$, para que a convergência seja alternada. Da equação anterior, temos que $\phi'(x) = \frac{2x}{9} - \frac{1}{2}$. Logo,

$$-1 < x < 1 \Longrightarrow -\frac{2}{9} < \frac{2x}{9} < \frac{2}{9} \Longrightarrow -\frac{13}{18} < \phi'(x) < -\frac{5}{18}.$$

Para a escolha do valor inicial x_0, tomamos o extremo de I mais próximo de x. Neste caso, podemos tomar qualquer extremo de I, pois x é o centro do intervalo I.

Logo, a sequência $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge alternadamente.



b) Seja $f(x) = x^2 - x$. Queremos calcular a maior raiz de f, isto é, $\bar{x} = 1$. Logo.

$$f(x) = 0 \iff x^2 - x = 0 \iff x^2 = x \iff x = \sqrt{x}.$$

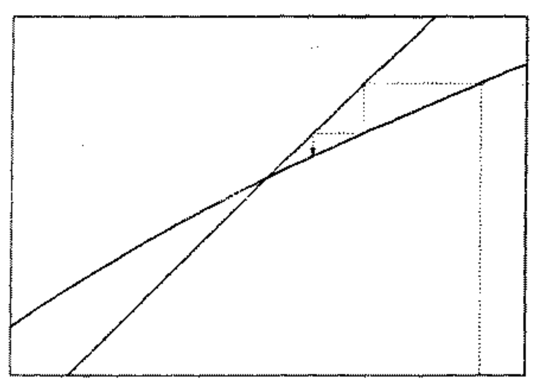
Então, temos a sequência

$$x_{n+1} = \phi(x_n),\ n = 0, 1, 2, \cdots. \quad \text{com } \phi(x) = \sqrt{x}.$$

Da relação anterior, temos que $\phi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. É obvio que ϕ e ϕ' são contínuas em qualquer intervalo I que contenha o ponto fixo $\bar{x}$ de ϕ, mas não o ponto zero. Para garantir a convergência monótona, precisamos que $0 < \phi'(x) < 1$, $\forall x \in I$, $x_0 \in I$ e $x_n \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Teremos $0 < \phi'(x) < 1$, se $x > \frac{1}{4}$. Então, podemos escolher $I = [0.5, 1.5]$. Para a escolha do valor inicial, tomamos como x_0 o extremo de I mais próximo de $\bar{x}$. Neste caso, podemos tomar qualquer extremo de I, pois $\bar{x}$ é o centro do intervalo I.

Logo. a sequência $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge monotonicamente.



c) Seja $f(x) = x^2 - x$. Queremos calcular a maior raiz de f, isto é, $x = 1$.

$$f(x) = 0 \iff x^2 - x = 0 \iff x^2 = x.$$

Logo, temos a sequência

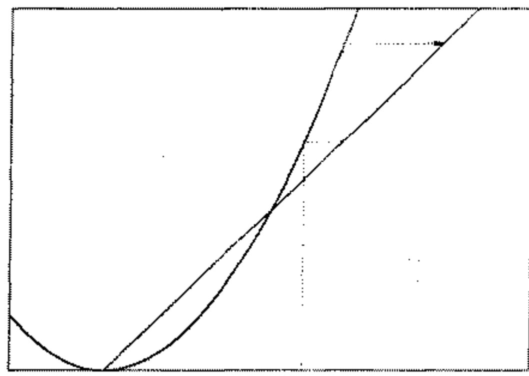
$$x_{n+1} = \phi(x_n),\ n = 0, 1, 2, \cdots, \quad \text{com } \phi(x) = x^2.$$

Seja $x_0 > 1$. Temos que

$$x_1 \ = \ x_0^2 > x_0 > 1$$

$$
\begin{aligned}
x_2 &= x_1^2 > x_1 > x_0 > 1 \\
x_3 &= x_2^2 > x_2 > x_1 > x_0 > 1 \\
&\ddots \\
x_{n+1} &= x_n^2 > x_n > \cdots > x_0 > 1
\end{aligned}
$$

Logo, a sequência $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ diverge.



Questão 4 (3.0 pontos):

Considere o sistema linear $Ax = b$ onde $b = (3, 2, -4)^T$ e

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Utilizando ponto flutuante com 2 algarismos significativos,
(a) Resolva o sistema dado pelo método de Gauss com condensação pivotal.
(b) Calcule a primeira coluna da matriz inversa de A.

Solução:

a) Construindo a matriz aumentada, e resolvendo pelo Método de Eliminação de Gauss com condensação pivotal, temos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 6 & 3 \\ 4 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{4} & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 3 \\ 1 & -5 & -2 & -4 \end{array}\right) \\ {\scriptstyle p_1=2} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|ccc|c} 4 & -2 & 1 & & 2 \\ \hline \frac{2}{4} = 0.5 & 1+1=2 & 6-0.5=5.5 & & 3-1=2 \\ \frac{1}{4} = 0.25 & -5+0.5=-4.5 & -2-0.25=-2.3 & & -4-0.5=-4.5 \end{array}\right) \\ {\scriptstyle p_1=2} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|cc|c} 4 & -2 & 1 & 2 \\ \hline 0.25 & \boxed{-4.5} & -2.3 & -4.5 \\ 0.5 & 2 & 5.5 & 2 \end{array}\right) \\ {\scriptstyle p_1=2 \quad p_2=3} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|c|c} 4 & -2 & 1 & 2 \\ \hline 0.25 & -4.5 & -2.3 & -4.5 \\ \hline 0.5 & \frac{2}{-4.5} = -0.44 & 5.5-1.0=4.5 & 2-2=0 \end{array}\right) \\ {\scriptstyle p_1=2 \quad p_2=3} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 2 \\ 0.25 & -4.5 & -2.3 & -4.5 \\ 0.5 & -0.44 & 4.5 & 0 \end{array}\right) \\ p_1=2 \quad p_2=3 \end{array}$$

Resolvendo o sistema triangular, temos

$$x_3 = 0.00, \qquad x_2 = 1.0, \qquad x_1 = 1.0, \quad \text{ou } x = (1, 1, 0)^T$$

b) Achar a primera coluna da inversa de A, é o mesmo que resolver $Ax = b$, com $b = (1, 0, 0)^T$. Devemos "transformar" b para podermos trabalhar com a matriz A já triangularizada.

$$\underset{p_1=2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \longrightarrow \underset{p_2=3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 - 0.25 * 0 = 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 - 0.5 * 0 = 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 + 0.44 * 0 = 1 \end{pmatrix}$$

Agora, o sistema triangular a resolver é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4.5 & -2.3 & 0 \\ 0 & 0 & 4.5 & 1 \end{array}\right)$$

cuja solução é

$$x_3 = 0.22, \qquad x_2 = -0.11, \qquad x_1 = -0.11,$$

ou $x = (-0.11, -0.11, 0.22)^T$.

outros materiais? www.ime.usp.br/~roma ■

Freqüentemente, existem várias formas de se resolver um mesmo exercício. As sugestões apresentadas aqui foram elaboradas por Olga Harumi Saito e Nelson Leonardo Vidaurre Navarrete, alunos de pós-graduação inscritos no PAE: IME-USP, objetivando a clareza da exposição. Este gabarito pode ser obtido gratuitamente via Internet seguindo os links apropriados a partir de www.ime.usp.br/~roma. Junho/2000.