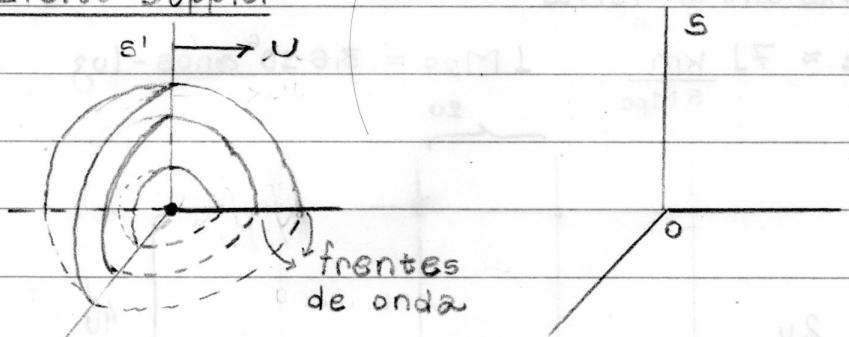


P2 - FÍSICA IV - Carlos Eugênio

Sérgio Mishima

• Efeito Doppler



$$E = \frac{E_0 \cdot \cos(kr - wt)}{r}$$

$S'$  → referencial da fonte

$$\lambda_0, f_0 = \frac{c}{\lambda_0} \rightarrow \text{comprimento de onda e a frequência da fonte em } S'$$

$$\lambda, f = \frac{c}{\lambda} \rightarrow \text{comprimento de onda e a frequência da fonte em } S$$

No referencial S

$$\begin{cases} \lambda = cT - UT = (c - U)T \\ f = \frac{c}{\lambda} \end{cases} \Rightarrow f = \frac{c}{(c - U)T} \quad (A)$$

$$T = T_0 \frac{1}{\sqrt{1 - U^2/c^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{c^2 - U^2}} = \frac{cT_0}{\sqrt{(c-U)(c+U)}} \quad (B)$$

$$(B) \rightarrow (A) \quad f = \frac{\frac{c}{(c-U) \cdot c T_0 / \sqrt{(c-U)(c+U)}}}{\sqrt{(c-U)(c+U)}} = \frac{\sqrt{c+U}}{\sqrt{c-U}} f_0$$

$$\Rightarrow f = \frac{\sqrt{c+U}}{\sqrt{c-U}} f_0 \quad \underline{\text{fonte se aproximando de } 0}$$

Com a fonte se afastando de 0:

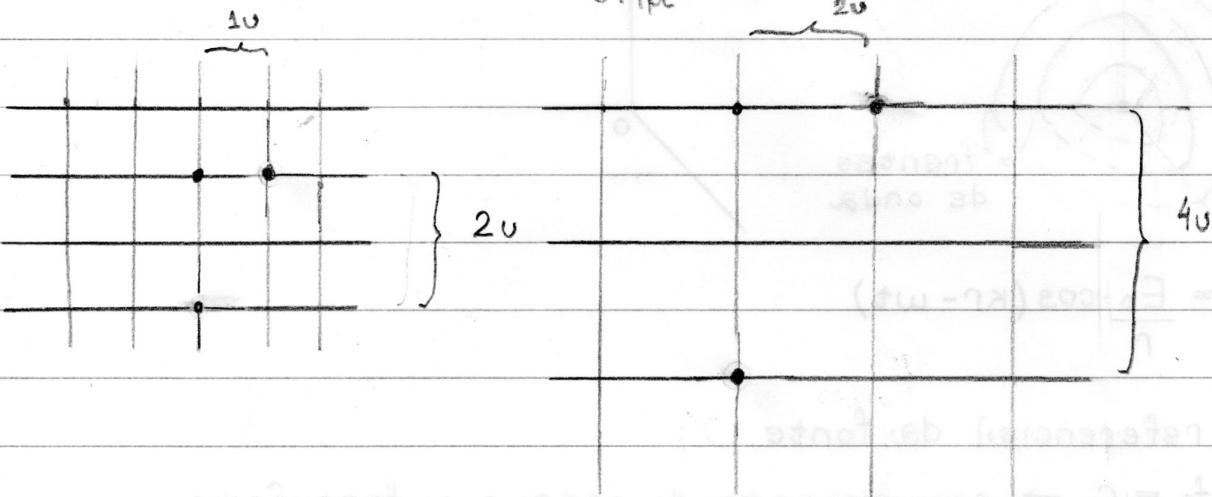
$$f = \frac{c - U}{\sqrt{c+U}} f_0$$

Edwin P. Hubble (1929)

$$V = H_0 \cdot r \quad \text{distância até a Terra}$$

$$\text{cte de Hubble} \approx 71 \text{ km s Mpc}^{-1}$$

$$1 \text{ Mpc} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ anos-luz}$$



$$V = \frac{\text{nº unidades}}{\texttempo}$$

$$V_1 = \frac{2-1}{\texttempo} = \frac{1 \text{ unidade}}{\texttempo}$$

$$V_2 = \frac{4-2}{\texttempo} = \frac{2 \text{ unidades}}{\texttempo}$$

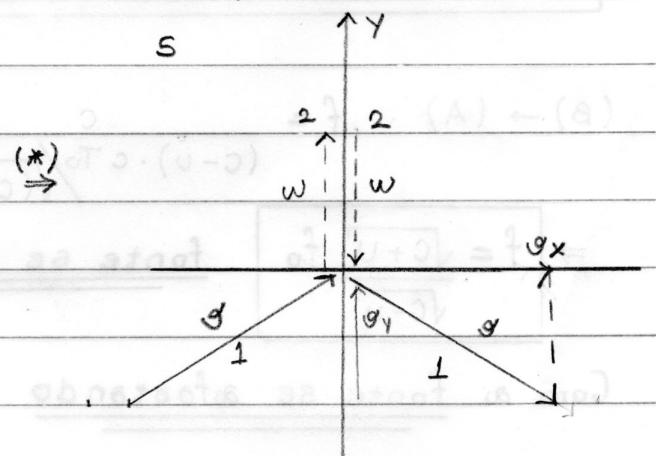
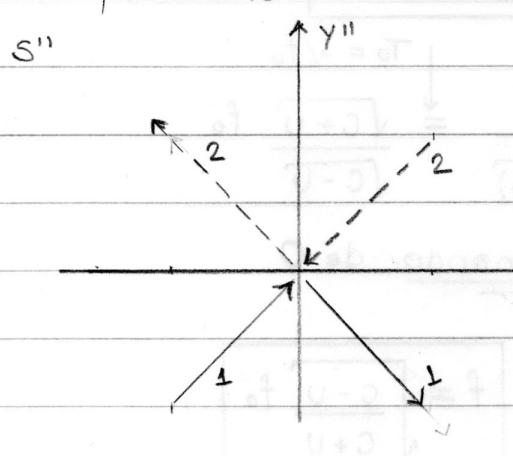
### Dinâmica Relativística

#### Momento Relativístico

$$\text{Vamos assumir que } \vec{p} = m_0 \cdot \vec{v}$$

função de  $v$

Vamos impor que o momento se conserva na colisão elástica de duas partículas idênticas com as mesmas velocidades



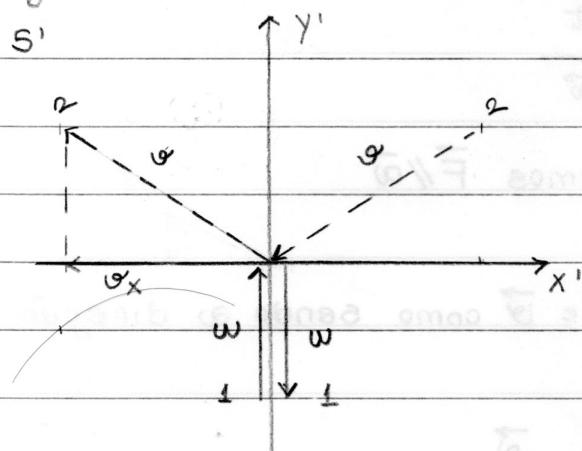
(\*) Observamos a colisão num referencial S que se move da direita para esquerda com velocidade  $-v_0x$ .

• conservação de momento:

- componente x: ok

$$\text{componente y: } 2m\omega \cdot w = 2m_\vartheta \cdot v_y \quad (\text{A})$$

Podemos relacionar  $v_y$  e  $w$ . Usando um referencial  $S'$  que se move da esquerda para direita com velocidade  $v_x$  em relação a  $S$



Relação entre as velocidades em  $S$  e  $S'$

$$v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - v_x^2/c^2}}{1 - v_x v/c}$$

No nosso caso  $v = v_x$  e  $v_{y'} = w$

$$\Rightarrow w = \frac{\omega_y \sqrt{1 - v_x^2/c^2}}{1 - v_x v/c} = \frac{\omega_y}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}} \quad (\text{B})$$

$$(\text{B}) \rightarrow (\text{A}): 2m\omega \cdot w = 2m_\vartheta \cdot w \sqrt{1 - v_x^2/c^2}$$

$$m_w = m_\vartheta \sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}} \quad (\text{C})$$

$$\vartheta^2 = \vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 = \vartheta_x^2 + w^2 (1 - \frac{v_x^2}{c^2}) \Rightarrow \text{quando } w \rightarrow 0 \Rightarrow \vartheta_x \rightarrow \vartheta$$

No limite em que  $w \rightarrow 0$

$$m_0 = m_\vartheta \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow m_\vartheta = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (\text{D})$$

$$\Rightarrow \vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

## Fórmula Relativística

A 2<sup>a</sup> lei de Newton não muda desde que escrita como:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \text{ com } \vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Note que em geral

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right] \neq \underbrace{\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}_{m} \cdot \underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{\vec{a}}$$

Apenas quando  $\vec{F} \parallel \vec{v}$  ou  $\vec{F} \perp \vec{v}$  temos  $\vec{F} \parallel \vec{a}$

- 1º caso:  $\vec{F} \parallel \vec{v}$

Podemos escolher a direção de  $\vec{F}$  e  $\vec{v}$  como sendo a direção X

$$\vec{F} = F \vec{i} \in \vec{v} = v \vec{i}$$

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{m_0 v \vec{i}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right] = \frac{m_0 \vec{v}}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \vec{i}$$

- 2º caso:  $\vec{F} \perp \vec{v}$

Neste caso a força não executa trabalho e o módulo da velocidade  $v$  é constante

// 17/9/15

## Trabalho e energia na relatividade

Definição de trabalho

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

↑  
deslocamento infinitesimal

A variação da energia cinética K de um pêndulo é igual ao trabalho para levá-lo do repouso até a velocidade  $v$

Assim, a taxa de variação da energia cinética é:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW}{dt} \stackrel{(1)}{=} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d\vec{p} \cdot \vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right] \cdot \vec{v} = \frac{m_0 \vec{v} \cdot \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{m_0 \vec{v} \cdot \vec{v} (-\frac{1}{2})(-2v/c^2) dv/dt}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{m_0/2 \cdot \frac{d\vartheta^2}{dt}}{(1 - \vartheta^2/c^2)^{1/2}} + \frac{m_0 \cdot \vartheta^2/2 \cdot \frac{d\vartheta^2}{dt}}{(1 - \vartheta^2/c^2)^{3/2}} \quad \frac{d\vec{\vartheta} \cdot \vec{\vartheta}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(\vartheta^2)}{dt} \\
 &= \frac{m_0/2 \frac{d\vartheta^2}{dt}}{(1 - \vartheta^2/c^2)^{1/2}} + \frac{m_0 \cdot \vartheta^2/2c^2 \cdot \frac{d\vartheta^2}{dt}}{(1 - \vartheta^2/c^2)^{3/2}} \\
 &= \frac{m_0/2 \cdot \frac{d\vartheta^2}{dt}}{(1 - \vartheta^2/c^2)^{1/2}} \left( 1 + \frac{\vartheta^2/c^2}{1 - \vartheta^2/c^2} \right) = \frac{m_0}{2} \frac{\frac{d\vartheta^2}{dt}}{(1 - \vartheta^2/c^2)^{1/2}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 c^2}{(1 - \vartheta^2/c^2)^{1/2}} \right) \\
 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \vartheta^2/c^2}} \right] \Rightarrow K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \vartheta^2/c^2}} + cte
 \end{aligned}$$

Como a energia cinética se anula quando  $\vartheta=0 \Rightarrow cte = -m_0 c^2$

$$K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \vartheta^2/c^2}} - m_0 c^2$$

Límite de baixas velocidades ( $\vartheta/c \ll 1$ )

$$(1+\alpha)^x \approx 1 + \alpha x, \text{ para } x \ll 1 \Rightarrow (1 - \vartheta^2/c^2)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{\vartheta^2}{c^2}$$

$$K \approx m_0 c^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\vartheta^2}{c^2} \right) - m_0 c^2 \Rightarrow K = \frac{m_0 c^2}{2} \Rightarrow \text{energia cinética newtoniana}$$

Energia de repouso e  $E = m_0 c^2$

A expressão da energia cinética contém um termo que depende do movimento e um termo que independe dele ( $m_0 c^2 = cte$ )

Podemos interpretar

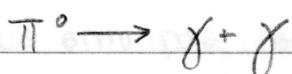
$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \vartheta^2/c^2}} = E$$

Como a energia total da partícula é  $m_0 c^2$  como uma energia que existe mesmo quando a partícula está em repouso.

$$E = K + m_0 c^2$$

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \vartheta^2/c^2}} \equiv m_0 c^2$$

Uma comprovação desta energia de repouso é o decaimento de píons neutros em 2 fótons.



Em relatividade a conservação da massa e da energia não é independente, pode haver conversão de uma em outra. Temos agora o princípio da conservação da massa-energia

Vamos derivar agora uma expressão que relaciona a energia e o momento

$$\left\{ \begin{array}{l} E = \frac{m_0 c^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \Rightarrow \left(\frac{E}{m_0 c^2}\right)^2 = \frac{1}{1 - v^2/c^2} \\ p = \frac{m_0 v/c}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \Rightarrow \left(\frac{pc}{m_0 c^2}\right)^2 = \frac{v^2/c^2}{1 - v^2/c^2} \end{array} \right. \quad \downarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{E}{m_0 c^2}\right)^2 - \left(\frac{pc}{m_0 c^2}\right)^2 = 1 \Rightarrow E^2 = (m_0 c^2)^2 + (pc)^2$$

Esta expressão sugere que podem existir partículas com massa de repouso  $m_0 = 0$ , mas  $E$  e  $p$  diferentes de zero. Neste caso

$$E = pc$$

Estas partículas existem e são os fótons.

$$\left. \begin{array}{l} E = \frac{1}{2} m_0 \cdot v^2 \\ p = m_0 \cdot v \end{array} \right\} \text{(Newton)} \quad \left. \begin{array}{l} E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ p = \frac{m_0 \cdot v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{array} \right\} \text{(Einstein)}$$

### Pressão de radiação

No eletromagnetismo mostramos que a densidade de energia é:

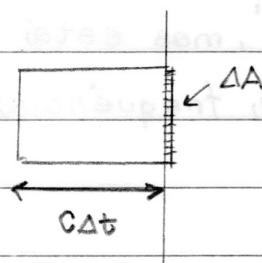
$$\mu = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2 M_0} B^2$$

A expressão

$$p = \frac{E}{c} \Rightarrow \frac{p}{\Delta V} = \frac{E/\Delta V}{c} \Rightarrow \boxed{P = \frac{\mu}{c}}$$

densidade volum. de momento

Este momento é transportado com velocidade  $c$ . Portanto o momento transferido em  $\Delta t$ , com incidência normal, em uma superfície completamente absorvente é:



$$\Delta p = c \Delta t \cdot \Delta A \cdot \underbrace{P}_{\text{m/c}} = \Delta t \cdot \Delta A \cdot \mu$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t \cdot \Delta A} = \mu \Rightarrow P_{\text{rad}} = \mu = \frac{s}{c} = \frac{B^2}{c M_0} = C_0 \cdot E^2$$

(completamente absorvente)

Para superfícies completamente refletores

$$4p = 2c \Delta t \Delta A P \Rightarrow P_{\text{rad}} = 2\mu = \frac{2s}{c}$$

11 22/9/15

Resumo

$$\text{Doppler: } f = \sqrt{\frac{c + v}{c - v}} f_0$$

$$\text{Dinâmica: } \vec{p} = m_0 \gamma \vec{v}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$K = m_0 \gamma c^2 - m_0 c^2, \quad E = \underbrace{m_0 \gamma c^2}_{m} = m c^2$$

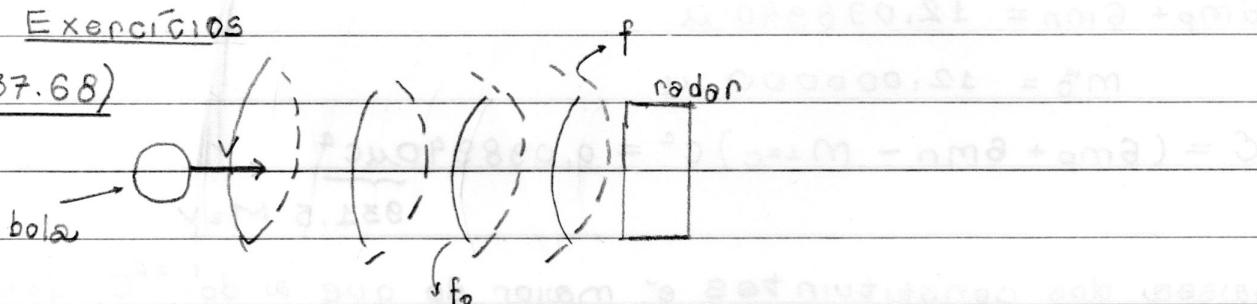
$$E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2$$

Pressão de rádioação  $P_{\text{rad}} = \frac{2 \langle s \rangle}{c}$  ou  $P_{\text{rad}} = \frac{\langle s \rangle}{c}$

(refletor) (absorvente)

Exercícios

• (37.68)



Onde é a velocidade da bola se

$$\frac{f - f_0}{f_0} = 2,86 \cdot 10^{-7}$$

No referencial da bola o radar se aproxima com velocidade  $v$ :

$$f' = \sqrt{\frac{c + v}{c - v}} f_0$$

$f'$  no ref. da bola.

A bola reflete as ondas com frequência  $f'$ , mas está em movimento em relação ao radar. O radar vê a frequência:

$$f = \sqrt{\frac{c+\nu}{c-\nu} f'} = \frac{c+\nu}{c-\nu} f_0$$

Como  $\nu \ll c$

$$\frac{c+\nu}{c-\nu} = \frac{1 + \frac{\nu}{c}}{1 - \frac{\nu}{c}} = \left(1 + \frac{\nu}{c}\right) \left(1 - \frac{\nu}{c}\right)^{-1}$$

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x \Rightarrow \left(1 + \frac{\nu}{c}\right) \left(1 - \frac{\nu}{c}\right)^{-1} \approx 1 + \frac{2\nu}{c}$$

$$\Rightarrow f = \left(1 + \frac{2\nu}{c}\right) f_0 = f_0 + \frac{2\nu}{c} f_0 \Rightarrow \frac{f-f_0}{f_0} = \frac{2\nu}{c} = 2,86 \cdot 10^{-7}$$

$$\Rightarrow \nu = \frac{2,86 \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^8}{2} \approx 42,9 \text{ m/s} \equiv 154 \text{ km/h}$$

• (1) O núcleo de  $^{12}\text{C}$  tem 6 prótons e 6 nêutrons com massas

$$m_p = 1,007825 \mu$$

$$m_n = 1,008665 \mu$$

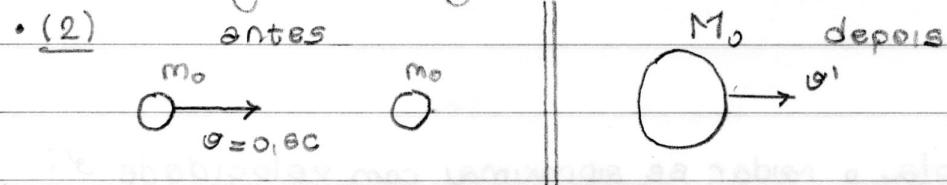
Qual é a energia necessária para separar o  $^{12}\text{C}$  em seus constituintes?

$$6m_p + 6m_n = 12,098940 \mu$$

$$m_{^{12}\text{C}} = 12,000000 \mu$$

$$E = (6m_p + 6m_n - m_{^{12}\text{C}})c^2 = \underbrace{0,098940 \mu c^2}_{931,5 \text{ MeV}}$$

A massa dos constituintes é maior do que a do  $^{12}\text{C}$  devido à energia de ligação



Colisão completamente inelástica entre duas partículas

a) Calcule  $\gamma'$

Conservação de energia

$$m_0 \gamma c^2 + m_0 c^2 = M_0 \gamma' c^2$$

$$\sim \frac{1}{\sqrt{1-\theta^2/c^2}} \quad \sim \frac{1}{\sqrt{1-\theta'^2/c^2}}$$

$$m_0 (\gamma + 1) = M_0 \gamma' \quad (A)$$

Conservação de momento

$$m_0 \gamma v = M_0 \gamma' \theta' \quad (B)$$

$$(B) \div (A) \Rightarrow \frac{\gamma v}{\gamma + 1} = \theta'$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma + 1 \\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(0.6)^2}} = \frac{5}{4} \end{array} \right. \Rightarrow \theta' = \frac{5/4}{1+5/4} 0.6c = \frac{c}{3}$$

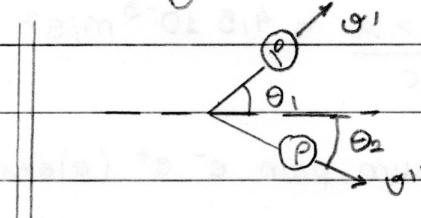
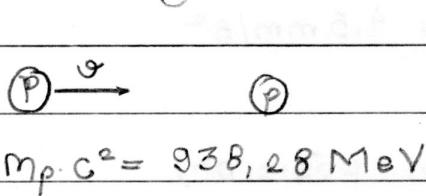
b) Calcule  $M_0$ :

$$(A) \Rightarrow M_0 = \frac{(\gamma + 1)m_0}{\gamma'}$$

$$\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{9}}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \Rightarrow M_0 = \frac{3\sqrt{2}}{2} m_0$$

Obs.: ao contrário do que acontece na mecânica newtoniana, a energia se conserva numa colisão elástica.

(3) Um próton com  $K = 437 \text{ MeV}$  colide elasticamente com outro próton em repouso. Depois da colisão os prótons têm a mesma energia. Determine o ângulo entre eles.



Como a energia no estado final é a mesma  $\theta' = \theta'' \Rightarrow \theta_1 = \theta_2 = \theta$  por simetria.

Conservação de energia

$$m_p \gamma c^2 + m_p c^2 = m_p \gamma' c^2 + m_p \gamma' c^2 \Rightarrow \gamma + 1 = 2\gamma' \quad (A)$$

Conservação de momento

$$m_p \gamma \sigma = m_p \gamma' v' \cos \theta + m_p \cdot \gamma' v' \cos \theta$$

$$\rightarrow \gamma v = 2 \gamma' v' \cos \theta \quad (\text{B})$$

$$E_{\text{kin}} = m_p \cdot \gamma c^2 - m_p c^2 = m_p c^2 (\gamma - 1)$$

$$\Rightarrow \gamma = 1 + \frac{E_{\text{kin}}}{m_p c^2} = 1 + \frac{437}{938,28} \approx 1,4857$$

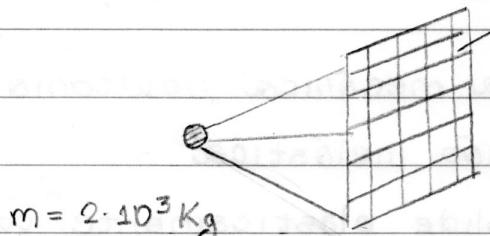
$$\gamma' = \frac{\gamma + 1}{2} = 1,2328 \quad (\text{A})$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - v'^2/c^2} \Rightarrow \gamma^2 - \frac{\gamma^2 v'^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \frac{\gamma^2 v'^2}{c^2} = \gamma^2 - 1 \Rightarrow \gamma v' = c \sqrt{\gamma^2 - 1} \quad (\text{C})$$

$$(\text{C}) \text{ em } (\text{B}): c \sqrt{\gamma^2 - 1} = 2 c \sqrt{\gamma^2 - 1} \cos \theta$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{2 \sqrt{\gamma^2 - 1}} \approx 0,743 \Rightarrow \theta \approx 42^\circ \text{ e } 2\theta \approx 84^\circ$$

## • (4) Vela solar perfeitamente reflectora



$$A = 1 \text{ km}^2$$

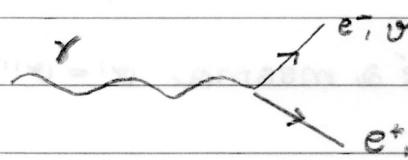
$$I = \langle s \rangle = 1340 \text{ W/m}^2$$

Calcule a aceleração da nave

$$\text{Praed} = 2 \frac{\langle s \rangle}{c} \quad \left. \right\} \Rightarrow F = 2 \frac{\langle s \rangle \cdot A}{c}$$

$$F = \text{Praed} \cdot A$$

$$\Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{2 \langle s \rangle A}{mc} \approx 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2 = 4,5 \text{ mm/s}^2$$

• (5) Um fóton cria um par  $e^- e^+$  (elétron - pósitron)

Mostre que se um terceiro corpo que absorver parte do momento, a reação não conserva simultaneamente energia e momento (não ocorre)

## Conservação de energia

$$E_\gamma = m_0 c \cdot c^2 + m_0 c' c^2$$

$$\frac{E_\gamma}{c} = m_0 c + m_0 c' c \quad (I)$$

$$E_\gamma = pc$$

## Conservação de momento (direção x)

$$\frac{E_\gamma}{c} = m_0 c \cdot v_x + m_0 c' c \cdot v_x' \quad (II)$$

momento  
do fóton

$$(I) - (II) \Rightarrow 0 = m_0 c \underbrace{(c - v_x)}_{> 0} + m_0 c' c \underbrace{(c - v_x')}_{> 0} \Rightarrow \text{absurdo} \quad (\text{não ocorre})$$

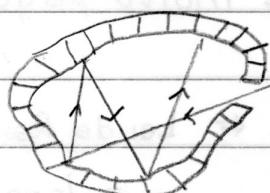
// 24/9/15

## Introdução à física quântica

### Radiação do corpo negro

Corpo negro é um objeto que absorve toda energia que sobre ele incide

Uma cavidade com uma abertura é uma ótima aproximação para um corpo negro

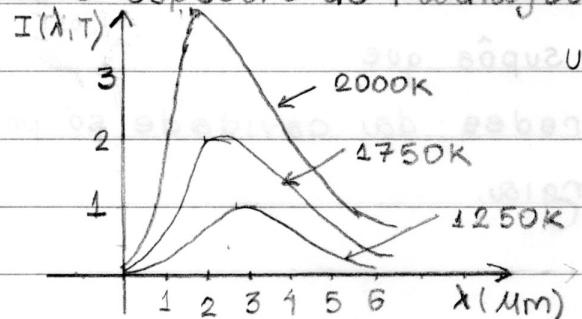


A intensidade da radiação total emitida só depende da temperatura T do corpo negro

$$I = \sigma \cdot T^4 \quad 5,67051 \cdot 10^{-8} \text{ W/(m}^2 \cdot \text{K}^4\text{)}$$

(Lei de Stefan-Boltzmann)

O espectro de radiação é mostrado na figura abaixo:



Unidade de  $I(\lambda, T)$ :  $10^{-8} \text{ W/m}^2$

emitância espectral

$I(\lambda, T) d\lambda$  fornece a potência por

Unidade de área no intervalo  $[\lambda, \lambda + d\lambda]$

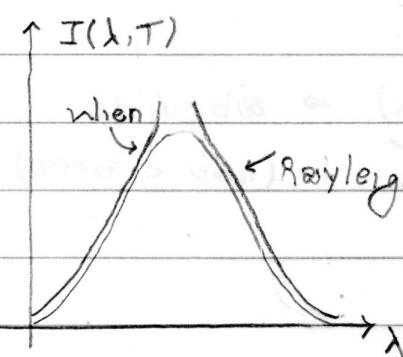
Note que quando  $T$  aumenta o máximo da distribuição se desloca.

$$\lambda_{\text{máx.}} \cdot T = 0,2898 \cdot 10^{-2} \text{ mK}$$

(Lei de deslocamento de Wien)

O cálculo teórico clássico do corpo negro, conhecido como Lei de Rayleigh Jeans fornece

$$I(\lambda, T) = \frac{2\pi c k T}{\lambda^4} \quad \text{cte de Boltzmann}$$



Empiricamente sabe-se que para λ pequeno

$$I(\lambda, T) = \frac{\omega}{\lambda^5} e^{-\nu/\lambda T}, \omega \text{ e b ctes}$$

(Lei de Wien)

Em 1900, Max Planck

$$I(\lambda, T) = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5 [\exp(hc/\lambda kT) - 1]} \quad (\text{Lei de Planck})$$

Onde  $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$  é o cte de Planck

Note que se  $\lambda$  é muito grande  $hc/(\lambda kT)$  é muito pequeno  
 $\Rightarrow e^{hc/(\lambda kT)} \approx 1 + hc/(\lambda kT)$

$$\Rightarrow I(\lambda, T) = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{hc/(\lambda kT)} = \frac{2\pi c k T}{\lambda^4} \Leftarrow \text{Lei de Rayleigh-Jeans}$$

No limite,  $\lambda$  pequeno  $\Rightarrow hc/(\lambda kT)$  é muito grande

$$\Rightarrow I(\lambda, T) = \frac{2\pi h c^2 e^{-hc/(\lambda kT)}}{\lambda^5} \Leftarrow \text{Lei de Wien}$$

Para deduzir a expressão Planck supôs que

(1) As moléculas oscilantes das paredes da cavidade só poderiam ter valores discretos de energia.

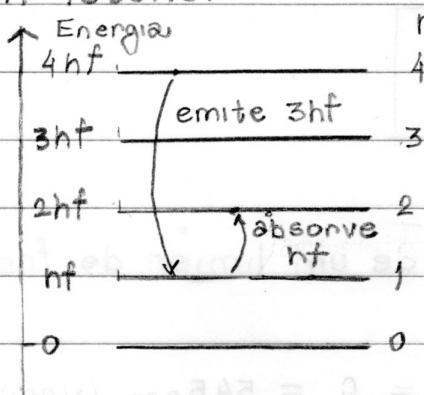
$$E_n = nhf$$

$n^{\circ}$  inteiro  $\nearrow$  frequência do oscilador

As energias nem quantizadas (não nem contínuas). Os estados de energia permitidos são os estados quânticos.

(2) As moléculas emitem ou absorvem energias em unidades discretas, os quanta (ou fôtons).

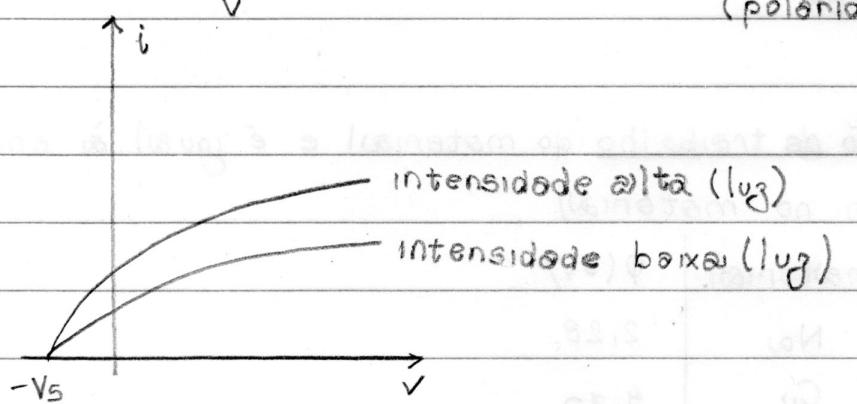
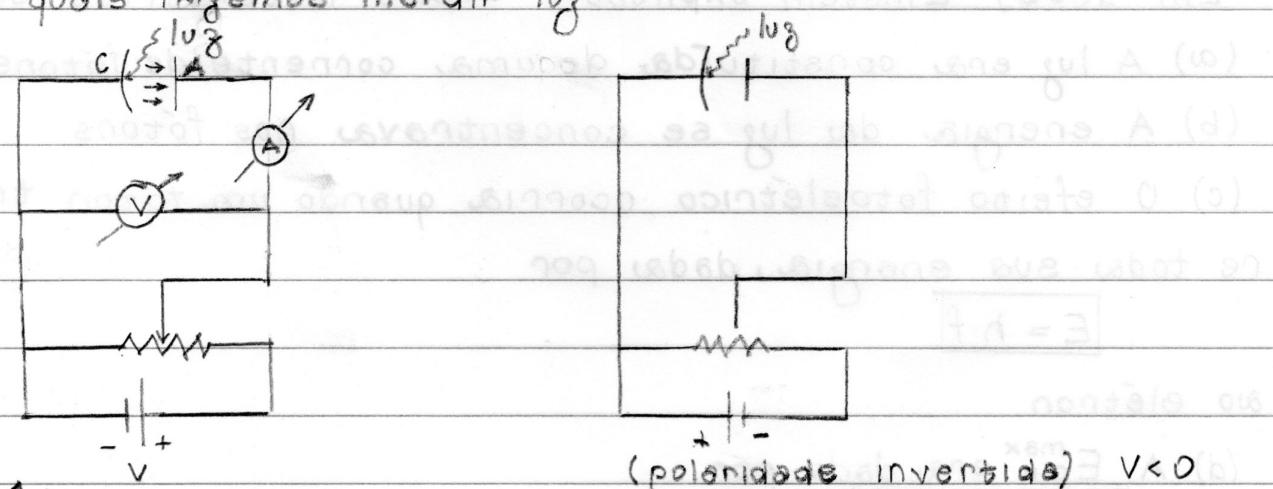
As transições ocorrem quando as moléculas absorvem ou emitem fôtons.



### Efeito fotoelétrico

Hertz (final do século XIX).

Emissão de elétrons pela superfície de certos materiais sobre os quais fazemos incidir luz.



Quando se inverte a polaridade ( $V < 0$ ) o catodo passa a atrair os elétrons e o anodo passa a repeli-los.

Note que a  $E_{\text{cin}}^{\max}$  dos elétrons está relacionada a  $V_s = V_c - V_A$  ( $> 0$  com polaridade invertida).

$$\text{Cons. energia: } \frac{1}{2}mv^2 - eV_c = -eV_A$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = E_{\text{cin}}^{\max} = e(V_c - V_A) = eV_s$$

Experimentalmente verifica-se que:

(1) Nenhum elétron é emitido abaixo de um limiar de freqüência característico do material.

$$(f_c = 5,5 \cdot 10^{14} \text{ Hz para o Na} \Rightarrow \lambda_c = \frac{c}{f_c} = 545 \text{ nm (verde)})$$

(2) A emissão ocorre em  $10^{-9}$  s, um tempo muito menor do que o previsto pela teoria clássica.

Em 1905, Einstein explicou o efeito fotoelétrico supondo que:

- (a) A luz era constituída de uma corrente de fótons
- (b) A energia da luz se concentrava nos fótons
- (c) O efeito fotoelétrico ocorria quando um fóton transferisse toda sua energia, dada por

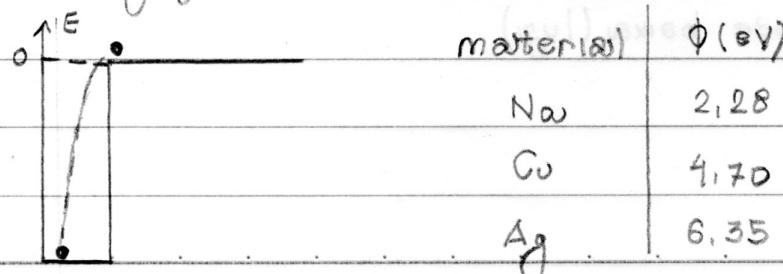
$$E = h \cdot f$$

ao elétron

(d) A  $E_{\text{cin}}^{\max}$  era dada por

$$E_{\text{cin}}^{\max} = hf - \phi$$

onde  $\phi$  é chamado função de trabalho do material e é igual à energia de ligação do elétron no material.



→ Só fôtons com energia maior do que  $\phi$  podem arrancar elétrons.

No limiar:  $E_{\text{cin}}^{\text{máx}} = 0 \Rightarrow h \cdot f_0 - \phi$

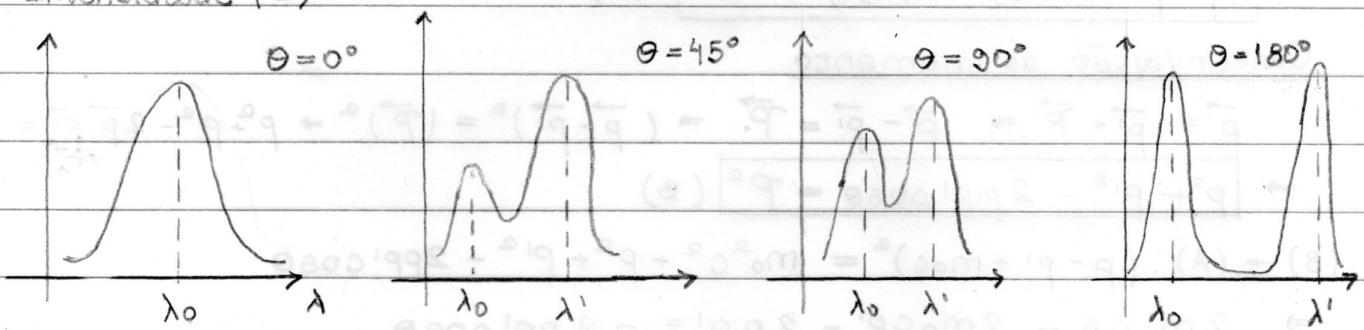
$$\Rightarrow f_0 = \frac{\phi}{h} \quad \lambda_0 = \frac{c}{f_0} = \frac{ch}{\phi}$$

29/9/15

### Efeito Compton

Arthur Compton e Peter Debye (1923)

#### Intensidade ( $I$ )



Teoria Clássica → prevê que o comprimento dos raios X espalhados deveria depender do tempo de exposição da amostra, e também da intensidade dos raios X incidentes.

Experimentalmente, o deslocamento  $\lambda' - \lambda_0$  só dependia do ângulo de espalhamento  $\theta$ .

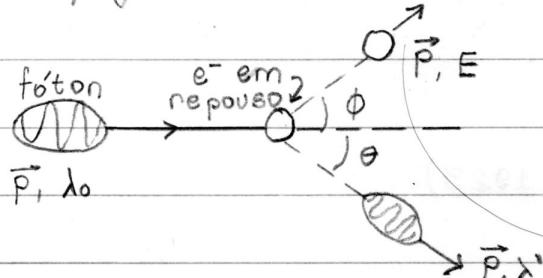
Compton mostrou que o pico em  $\lambda_0$  é provocado pelos raios X espalhados pelos elétrons fortemente ligados aos átomos. O pico em  $\lambda'$  provém do espalhamento dos raios X praticamente livres dos átomos.

Compton deduziu que (com as ideias de Einstein)

$$\lambda' - \lambda_0 = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos\theta) \quad h: \text{cte de Planck}$$

$m_0$ : massa do elétron

(equação de deslocamento de Compton)



$$E^2 = (m_0 c^2)^2 + (p_0)^2$$

$$p_0 = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow E_0 = \frac{hc}{\lambda}$$

Conservação de energia

$$p \cdot c + m_0 c^2 = p' \cdot c + E \quad (\div c)$$

$$(p - p' + m_0 c)^2 = \frac{E^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} [(m_0 c^2)^2 + p^2 c^2]$$

$$\Rightarrow (p - p' + m_0 c)^2 = m_0 c^2 + p^2 \quad (A)$$

Conservação de momento

$$\vec{p} = \vec{p}' + \vec{p} \Rightarrow \vec{p} - \vec{p}' = \vec{p} \Rightarrow (\vec{p} - \vec{p}')^2 = (\vec{p})^2 \Rightarrow p^2 + p'^2 - 2 \vec{p} \cdot \vec{p}' = p^2$$

$$\Rightarrow p^2 + p'^2 - 2 p \cdot p' \cos\theta = p^2 \quad (B)$$

$$(B) \rightarrow (A): (p - p' + m_0 c)^2 = m_0^2 c^2 + p^2 + p'^2 - 2 p p' \cos\theta$$

$$\Rightarrow 2 m_0 c p - 2 m_0 c p' - 2 p p' = -2 p p' \cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{m_0 c}{p'} - \frac{m_0 c}{p} = 1 - \cos\theta$$

### Problemas

#### Corpo negro

- Lei de desloc. de Wien:  $\lambda_{\max} \cdot T = 0,2898 \cdot 10^{-2} \text{ mK}$

$$- \text{Planck: } I(\lambda, T) = \frac{2 \pi h c^2}{\lambda^5 [\exp(hc/\lambda kT) - 1]}$$

1) Calcule  $\lambda_{\max}$  emitido pelo corpo humano ( $T \approx 35^\circ\text{C}$ )

$$T = 273 + 35 = 308 \text{ K}$$

$$\lambda_{\max} \approx \frac{0,29 \cdot 10^{-2}}{308} = 9,42 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 9420 \text{ nm (infravermelho)}$$

2) A partir da fórmula de Planck obtenha a aproximação de Wien ( $\lambda$  pequeno) e a lei de Stefan-Boltzmann

Para  $\lambda$  pequeno:  $\frac{1}{e^{(hc/\lambda KT)} - 1} \approx \frac{1}{e^{(hc/\lambda KT)}}$ , substituindo na lei de Planck:

$$I(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2 \cdot \exp(-hc/\lambda KT)}{\lambda^5}$$

A intensidade total:

$$I = \int_0^\infty \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{d\lambda}{\exp(hc/\lambda KT) - 1}$$

$$\text{Defino } x = \frac{hc}{\lambda KT} \rightarrow \lambda = \frac{hc}{KT} \cdot \frac{1}{x} \quad d\lambda = -\frac{hc}{KT} \cdot \frac{1}{x^2} dx$$

para  $\lambda=0 \Rightarrow x=\infty$ ; para  $\lambda=\infty \Rightarrow x=0$

$$I = \frac{2\pi hc^2}{(hc/KT)^4} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{2\pi^5 K^4}{15 h^3 c^2} T^2$$

3) Considere o Sol como um corpo negro

$$R_s = 6,96 \cdot 10^8 m$$

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ J/(smK)} \Rightarrow I = \sigma T^4 = \frac{P_{\text{total}}}{4\pi R_s^2} \Rightarrow T = \left( \frac{P_{\text{total}}}{4\pi \sigma R_s^2} \right)^{1/4} = 5,7 \cdot 10^3 K$$

$$P_{\text{total}} = 3,77 \cdot 10^{26} W$$

#### • Efeito Fotoelétrico

$$- E_{\text{máx}} = K_{\text{máx}} = hf - \Phi$$

$$4) \Phi_{Li} = 2,3 \text{ eV}, \Phi_{Be} = 3,9 \text{ eV} \text{ e } \Phi_{Hg} = 4,5 \text{ eV}$$

Iluminando o Li, o Be e o Hg com luz com  $\lambda = 400 \text{ nm}$ , quais materiais apresentarão o efeito fotoelétrico e quais serão os  $K_{\text{máx}}$ ?

$$K_{\text{máx}} = \frac{h \cdot c}{\lambda} - \Phi = \frac{(4,135 \cdot 10^{-15})(3 \cdot 10^8)}{4 \cdot 10^{-9}} - \Phi = 3,1 - \Phi \geq 0$$

Só o Li apresenta o efeito fotoelétrico.

$$K_{\text{máx}} = 3,1 - 2,3 = 0,8 \text{ eV}$$

(5) Luz ultravioleta com  $I = 0,055 \text{ W/m}^2$  incide sobre uma superfície com  $\Phi = 3,44 \text{ eV}$ . Os elétrons têm  $v_{\max} = 4,2 \cdot 10^5 \text{ m/s}$ . Calcule o nº de elétrons/ $\text{cm}^2$  emitidos. Suponha que cada fóton arranca um fotoelétron.

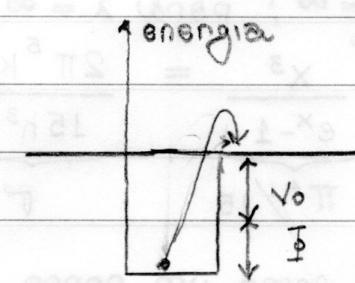
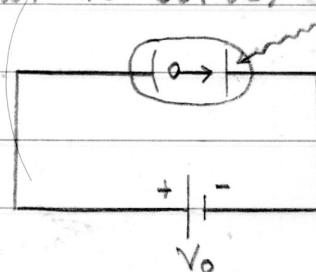
$$K_{\max} = E_f - \Phi \Rightarrow E_f = \frac{1}{2} \cdot m_0 v_{\max}^2 + \Phi$$

$$\Rightarrow E_f = \frac{1}{2} \cdot (9,11 \cdot 10^{-31}) (4,2 \cdot 10^5)^2 \cdot (3,44) (1,6 \cdot 10^{-19})$$

$$\Rightarrow E_f = 6,3 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$\text{nº fótons} = \frac{I}{E_f} = \frac{0,055}{6,3 \cdot 10^{-19}}$$

6) Numa fotocélula com  $\Phi = 3,1 \text{ eV}$ , com polarização inversa, o linear de comprimento de onda é 270 nm. Qual é o valor de  $V_0$  (potencial de corte)?



$$K_{\max} = hf - \Phi = \frac{hc}{\lambda} - \Phi$$

Conservação de energia: ( $V_A$  = potencial do anodo;  $V_C$  = potencial do catodo  $V_C - V_A = V_0$ )

$$K_{\max} - eV_C = -eV_A \Rightarrow \frac{hc}{\lambda} - \Phi = e(V_C - V_A) = eV_0$$

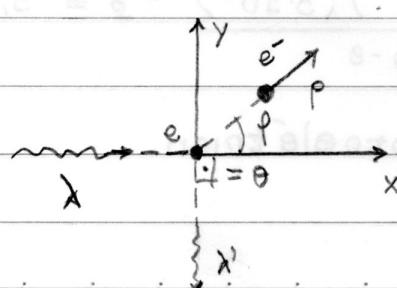
$$\Rightarrow V_0 = \frac{1}{e} \left[ \frac{hc}{\lambda} - \Phi \right] = \frac{1}{1,6 \cdot 10^{-19}} \left[ \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{2,7 \cdot 10^{-7}} - 3,1 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \right]$$

$$\Rightarrow V_0 = 1,5 \text{ V}$$

7) P3-2011

$$\text{Dado: } \lambda_0 = h/mc$$

Compton



a) Calcule  $P$  do elétron

Conservação de momento

$$\text{direção X: } h/\lambda_0 = P \cos \varphi$$

$$\text{direção Y: } 0 = P \sin \varphi = h/\lambda'$$

$$P^2 \cos^2 \phi + P^2 \sin^2 \phi = h^2 \left( \frac{1}{\lambda_0^2} + \frac{1}{\lambda'^2} \right) \Rightarrow P^2 = h^2 \left( \frac{1}{\lambda_0^2} + \frac{1}{\lambda'^2} \right) \quad (\text{I})$$

Deslocamento Compton:  $\lambda' = \lambda_0 + \frac{h}{m c} (1 - \underbrace{\cos \theta}_{\lambda_0}) \Rightarrow \lambda' = 2\lambda_0 \quad (\text{II})$

$$(\text{II}) \rightarrow (\text{I}): P^2 = h^2 \left( \frac{1}{\lambda_0^2} + \frac{1}{4\lambda_0^2} \right) \Rightarrow P = \frac{\sqrt{5} h}{2\lambda_0} \Rightarrow P = \frac{\sqrt{5}}{2} m c$$

b) Calcule as energias cinéticas do elétronico

Conservação de energia:  $\frac{hc}{\lambda_0} + mc^2 = \frac{hc}{\lambda'} + E$

$$K = E - mc^2 = \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{2\lambda_0} = \frac{1}{2} mc^2$$

outra forma:  $E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$

$$K = E - mc^2 = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2} - mc^2 = \frac{mc^2}{2}$$

$\downarrow \frac{\sqrt{5}}{2} m c$

8) P3 - 2013 - Compton

$\theta$  é tal que  $K$  do elétron é máxima e  $E_f = \frac{hc}{\lambda} = m_0 c^2$

a) Calcule  $\theta$

$$K = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} \quad \text{p/ } K \text{ ser máximo, } \lambda' \text{ deve ser o maior possível, porém } \lambda' = \lambda + \frac{h(1-\cos \theta)}{m_0 c}$$

$$\Rightarrow \theta = \pi \text{ e } \lambda' = \lambda + \frac{2h}{m_0 c}$$

b) Calcule  $\lambda' - \lambda$ , expresse sua resposta em termos de  $h, m_0$  e  $c$

Do item a)  $\Delta h = \lambda' - \lambda = \frac{2h}{m_0 c}$

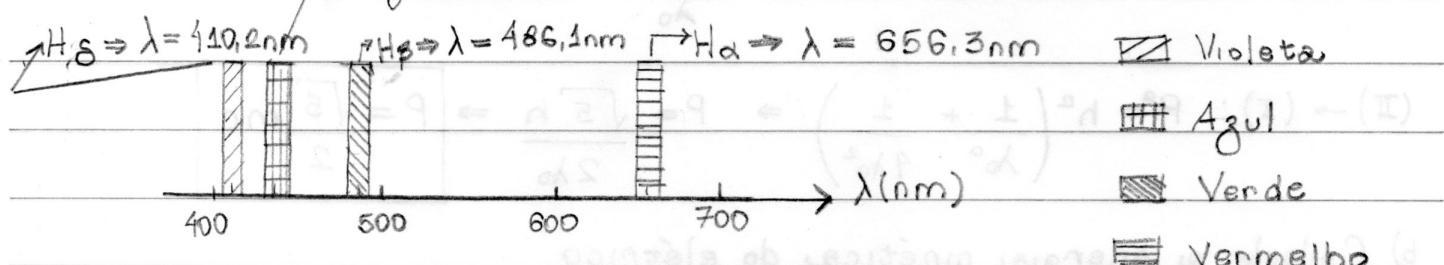
c) Determine  $\lambda'/\lambda \Rightarrow E_f = \frac{hc}{\lambda} = m_0 c^2 \Rightarrow \lambda = \frac{h}{m_0 c}$

$$\lambda' - \lambda = \frac{2h}{m_0 c} \Rightarrow \lambda' - \frac{h}{m_0 c} = \frac{2h}{m_0 c} \Rightarrow \lambda' = \frac{3h}{m_0 c} = 3\lambda \Rightarrow \frac{\lambda'}{\lambda} = 3$$

## Espectros atômicos

Gases rarefeitos submetidos a descargas elétricas emitem um espectro de linhas, ou seja, apenas frequências são emitidas

$$\rightarrow H\gamma \Rightarrow \lambda = 434,1 \text{ nm}$$



Entre 1860 e 1885 foram acumulados uma grande quantidade de medições espectroscópicas

John J. Balmer em 1885 encontrou uma fórmula para os 4 primeiros do hidrogênio

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 3, 4, 5, 6 \quad R_H = 1,0973732 \cdot 10^{-7} \text{ m}^{-1}$$

éste el efecto de Rydberg

Depois encontraram outras séries

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 2, 3, 4, \dots \Rightarrow \text{série ultravioleta, de Lyman}$$

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n=4,5,6,\dots \Rightarrow \text{série infravermelha de Pauschen}$$

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n=5,6,7,\dots \Rightarrow \text{série intravermelha de Brückett}$$

## Modelos atómicos

Rutherford  $\Rightarrow$  modelo planetário  $\Rightarrow$  evidência de um núcleo que concentra cargas positivas em decorrência do espalhamento de partículas  $\alpha$  incidentes em uma fina folha de ouro  $\Rightarrow$  Problema: elétrons ao se movimentarem em torno do núcleo perdem energia e rapidamente colidiriam com o núcleo

## O modelo de Bohr

Se aplica para o H e íons hidrogenoides (íons com 1 elétron) como o  $\text{He}^+$  e o  $\text{Li}^{++}$

Bohr supôs que:

1. O elétron se move em uma órbita circular sob a ação das forças de Coulomb
2. Apenas algumas órbitas são estáveis. Nelas a energia está fixa e as mecânicas clássicas se aplicam.
3. A radiação é emitida quando o elétron cai de um estado estacionário para outro com energia menor. A frequência  $f$  da luz emitida é:

$$f = \frac{E_i - E_f}{h}, \quad E_i > E_f \quad E_i \rightarrow \text{energia do estado inicial}$$

$E_f \rightarrow \text{energia do estado final}$

4. As órbitas permitidas são aquelas que satisfazem

$$\underline{m \cdot \omega \cdot r} = n \cdot \hbar$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$\underline{= L} \text{ (momento angular)}$

## Níveis de energia do H



$$E = \frac{1}{2} \cdot m \omega^2 r - \frac{k e^2}{r} \quad (\text{A})$$

$$F_{\text{op}} = \frac{m \omega^2 r}{r} = \frac{k e^2}{r^2} \Rightarrow m \omega^2 = \frac{k e^2}{r} \quad (\text{B})$$

$$(\text{B}) \rightarrow (\text{A}) \Rightarrow E = -\frac{k e^2}{2r} \quad (\text{C})$$

$$m \omega r = n \hbar \Rightarrow m^2 \omega^2 r^2 = n^2 \hbar^2 \Rightarrow m \omega^2 = \frac{\hbar^2 n^2}{mr^2} \quad (\text{D})$$

$$(\text{B}) \rightarrow (\text{D}) \Rightarrow \frac{k e^2}{r} = \frac{\hbar^2 n^2}{mr^2} \Rightarrow r_n = \frac{\hbar^2 n^2}{mk e^2} \quad (\text{E}) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

A órbita com menor raio tem  $n=1$

$$r_1 = a_0 = \frac{k^2}{m k e^2} \Rightarrow \text{raio de Bohr}$$

Em termos de  $a_0$ :

$$r_n = a_0 n^2 \quad (F) \quad n=1, 2, 3, \dots$$

$$(F) \rightarrow (C) \Rightarrow E_n = -\frac{k e^2}{2 a_0} \cdot \frac{1}{n^2} = -\frac{13,6 \text{ eV}}{n^2}$$

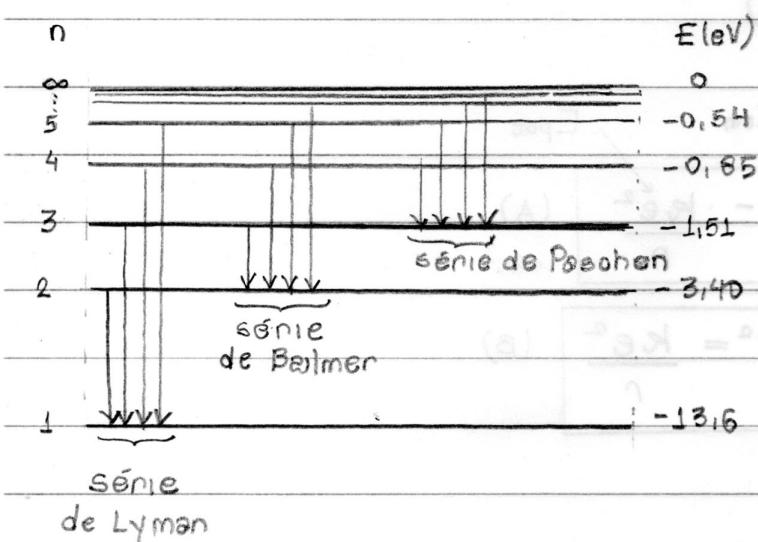
Comprimento de onda do fóton

$$f = \frac{E_i - E_f}{h} = -\frac{k e^2}{2 a_0 h} \left( \frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right)$$

$$\frac{f}{c} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = -\frac{k e^2}{2 a_0 h c} \left( \frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right)$$

Como  $\frac{k e^2}{2 a_0 h c} = R_H$  com erro menor do que 1% o modelo de

Bohr explica os raios observados



Para um íon hidrogenoide com núcleo de carga  $Z$ , a teoria de Bohr fornece

$$r_n = \frac{n^2 a_0}{Z}, \quad E_n = -\frac{k e^2}{2 a_0} \cdot \frac{Z^2}{n^2} \quad n=1, 2, 3, \dots$$

## Teoria de de Broglie (1923)

A luz tem um caráter dual: exibe características ondulatórias (difração, refração) e características corpusculares (efeito Compton)

Louis de Broglie postulou que a matéria, de modo análogo à luz, também exibia este caráter dual

Para o fóton vale:

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda}; p = E/c = \frac{h}{\lambda}$$

Note que  $\lambda$  pode ser calculado a partir de  $p$

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

de Broglie associou a umas partículas de massa  $m$ , velocidade  $v$  e momento  $p = mv$ , o comprimento de onda

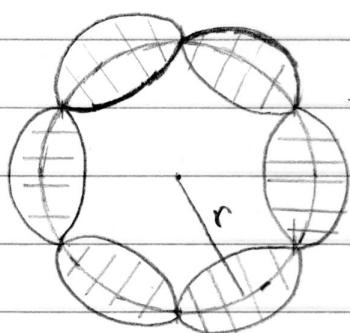
$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

obs.: expressões não-relativísticas

Através da energia, ele atribuiu uma frequência  $f$  a estas ondas:

$$f = \frac{E}{h}$$

Esta teoria "explicava" as órbitas permitidas de Bohr. Nas órbitas onde cabiam um número inteiro de comprimentos de onda



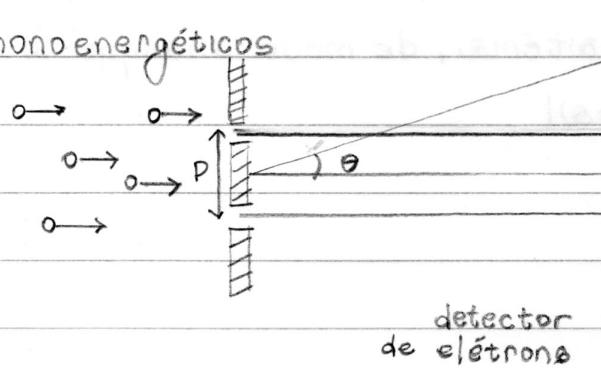
$$\left. \begin{aligned} \frac{2\pi r}{\lambda} &= n \\ \lambda &= \frac{h}{mv} \end{aligned} \right\} \quad \frac{2\pi r}{h/mv} = n \Rightarrow 2\pi rmv = nh$$

$$\Rightarrow mv \cdot r = n\hbar \quad (\text{quantização de Bohr})$$

## Dupla fenda com elétrons

elétrons

monoenergéticos



O detector mede o nº de elétrons por intervalo de tempo no ponto onde ele foi colocado (o nº de elétrons por unidade de tempo desempenha o papel de intensidade)

Analogamente ao que ocorre na experiência de Young a localização dos máximos é dada por

$$\Delta s \sin \theta = m\lambda, \text{ onde } \lambda = \frac{h}{mv} \text{ (de Broglie)}$$

// 8/10/15

PR\_2013\_Q3

(I) Calcule a potência irradiada por uma pessoa com  $1,8\text{m}^2$  de área a  $37^\circ\text{C}$ . Qual é o comprimento de onda predominante?

$$\underbrace{I = \sigma T^4}_{\text{Pot}/A} \Rightarrow \text{Pot} = \sigma T^4 A = (5,7 \cdot 10^{-8})(273+37)^4 \cdot 1,8$$

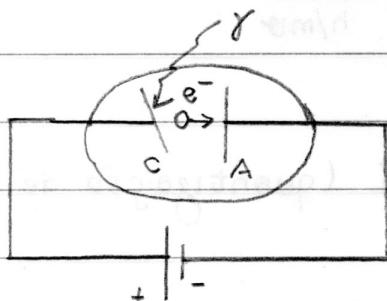
$$\text{Pot}/A$$

$$\Rightarrow \text{Pot} = 9,5 \cdot 10^2 \text{W}$$

$$\lambda_{\text{máx}} \cdot T = \text{cte} = 2,9 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \lambda_{\text{máx}} = \frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{310}$$

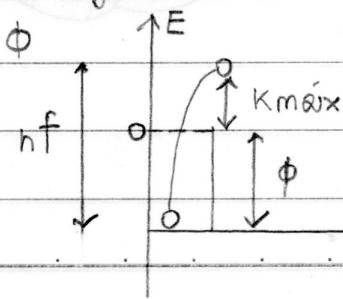
$$\Rightarrow \lambda_{\text{máx}} = 9,4 \cdot 10^{-3} \text{nm (infravermelho)}$$

(II)



a) Use a conservação de energia para obter  $V_0$  em função de  $f$ ,  $\Phi$ ,  $h$

$$K_{\text{máx}} = hf - \Phi$$



$$\text{Cons. energia: } -eV_c + K_{\text{máx}} = -eV_A$$

$$K_{\text{máx}} = e(V_0 - V_A) = eV_0$$

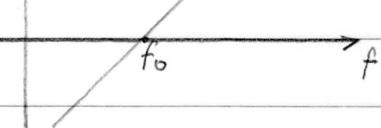
$$\left\{ \begin{array}{l} K_{máx} = hf - \phi \Rightarrow eV_0 = hf - \phi \Rightarrow V_0 = \frac{hf - \phi}{e} \\ K_{máx} = eV_0 \end{array} \right.$$

b) A partir do gráfico  $V_0 \times f$  como podemos obter  $\phi$  e  $h$ ?

 $V_0$ 

Na intersecção com o eixo das frequências vale:

$$\frac{hf_0}{e} = \frac{\phi}{e} \Rightarrow \phi = hf_0$$



O coeficiente angular da reta fornece  $h/e$

P3-2013-Q3

Luz ultravioleta, com  $120\text{ nm} < \lambda < 400\text{ nm}$  atravessa, um tubo transparente com gás  $\text{He}^+$

Dados  $E_n = -\frac{13,6 Z^2}{n^2} \text{ eV}$   $h = 4,1 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$   $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

a) Determine o intervalo de energia dos fótons incidentes

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow E = \frac{(4,1 \cdot 10^{-15}) \cdot (3 \cdot 10^8 \cdot 10^9)}{\lambda}$$

$$E = \frac{1230}{\lambda} \text{ eV} \cdot \text{nm}$$

$$\text{Para } \lambda = 120\text{ nm} \Rightarrow E = \frac{1230}{120} \approx 10\text{ eV}$$

$$\Rightarrow 3,1\text{ eV} \leq E_\gamma \leq 10\text{ eV}$$

$$\text{Para } \lambda = 400\text{ nm} \Rightarrow E = \frac{1230}{400} = 3,1\text{ eV}$$

b) Adotando o modelo de Bohr e supondo que o  $\text{He}^+$  está no estado  $n=2$ , qual é o maior comprimento de onda  $\lambda_{máx}$  que pode ser absorvido pelo gás

A energia mínima (que dão o comprimento de onda máximo)

$$E: E_{máx} = -13,6 \cdot 2^2 \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^2} \right) = 7,6 \text{ eV}$$

$\xrightarrow[2]{3}$  transição de menor energia

$$\Rightarrow E_{\min} = 7,6 \text{ eV} = \frac{h \cdot c}{\lambda_{\max}} \Rightarrow \lambda_{\max} = \frac{hc}{E_{\min}} = \frac{1230}{7,6} = 160 \text{ nm}$$

c) Calcule a variação de momento do  $\text{He}^+$  ao absorver o fóton

Por conservação de momento a variação do momento do  $\text{He}^+$  é igual ao momento do fóton:  $p = \frac{h}{\lambda_{\max}} = \frac{(4,1 \cdot 10^{-15}) \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{1,6 \cdot 10^{-7} \text{ m}} \quad (1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J})$

$$\Rightarrow p = 4,1 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

P3 - 2007\_01

Átomo de H no modelo de Bohr

a) Partindo das mecânicas newtoniana calcule a velocidade do elétron em função de r

$$F_{\text{Coulomb}} = \frac{m \cdot \vartheta^2}{r} = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}}_{\text{F. Coulomb}} \Rightarrow \vartheta = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m r}}$$

órbita circular F. Coulomb ( $K \cdot q \cdot q / r^2$ )

b) Determine  $\lambda$  de de Broglie em função de r. Sabendo-se que numa órbita permitida cabe um número inteiro de comprimentos de onda, calcule o raio desta órbita.

$\lambda$  de de Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{m\vartheta} = \frac{h}{m\sqrt{\frac{e^2}{(4\pi\epsilon_0 m r)}}} = \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 n \cdot h^2}{m \cdot e^2}}$$

$$\text{Órbitas permitidas: } 2\pi r = n\lambda = n\sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 \cdot n \cdot h^2}{m \cdot e^2}}$$

$$\Rightarrow r_n = \frac{n^2 \cdot h^2}{m \cdot (e^2 / 4\pi\epsilon_0)}$$

c) Determine as energias do elétron na órbita n

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m \vartheta^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \\ m \vartheta^2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \end{aligned} \right\} E = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \Rightarrow E_n = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{m (e^2 / 4\pi\epsilon_0)}{n^2 \cdot h^2} \Rightarrow E_n = -13,6 \text{ eV} \left(\frac{1}{n^2}\right)$$