

Física IV

fig.if.usp.br/fisica4

Interferência de ondas luminosas

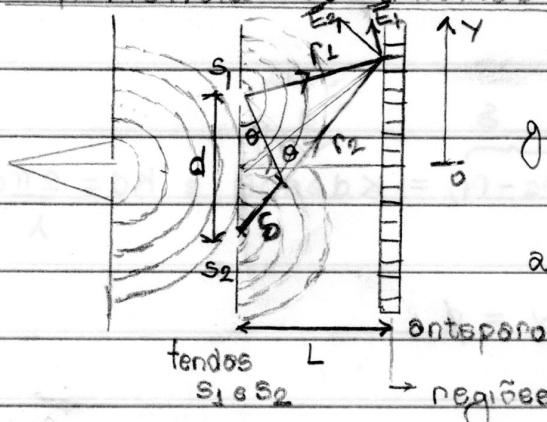
Condições para observar a interferência entre duas fontes de luz

1 - As fontes devem ser coerentes (as ondas mantêm uma fase relativa constante).

2 - As fontes devem preferencialmente ser monocromáticas (único comprimento de onda)

3 - O princípio da superposição deve ser aplicável.

Experiência de Thomas Young (1801)



A luz vem de uma única fonte o que garante a coerência

Temos $L \gg d$ e $d \gg \lambda$. Para evitar a difração, as ondas são estreitas $\ll \lambda$

largura da fenda

regiões iluminadas e de sombra

Interferência construtiva e destrutiva

A diferença de caminho óptico entre os raios 1 e 2 é

$$r_2 - r_1 \equiv s \approx d \sin \theta$$

Interferência construtiva $s = d \sin \theta = m\lambda$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2$)

Interferência destrutiva $s = d \sin \theta = \frac{(2m+1)\lambda}{2}$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

Podemos expressar estas condições em função de y

$$\sin \theta \approx \frac{y}{L} = y$$

Para as faixas brilhantes $d \sin \theta \approx \frac{dy_{bril}}{L} = m\lambda \Rightarrow |y_{bril}| = \frac{\lambda L}{d} m$

Para as faixas escurecidas $d \sin \theta \approx \frac{dy_{esc}}{L} = \frac{(2m+1)\lambda}{2} \Rightarrow |y_{esc}| = \frac{\lambda L}{d} (m + 1/2)$

Distribuição de intensidade das figuras de interferência

A intensidade I_0 ou P é proporcional à $|E_p|$ onde $\vec{E}_p = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

As ondas emitidas em S_1 e S_2 são estáticas

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 = \frac{E_0}{r_1} \cos(Kr_1 - wt) \\ E_2 = \frac{E_0}{r_2} \cos(Kr_2 - wt) \end{array} \right.$$

$$E_2 = \frac{E_0}{r_2} \cos(Kr_2 - wt)$$

Nota que \vec{E}_1 é muito aproximadamente paralelo a \vec{E}_2 ($L \gg d$)

Podemos colocar

$$\frac{E_0}{r_1} \approx \frac{E_0}{r_2} \equiv E_0$$

s

Não posso fazer $Kr_1 \approx Kr_2$ porque $K(r_2 - r_1) = Kd \sin\theta$ e $Kd = \frac{2\pi d}{\lambda} \gg 1$

Notação

$$\frac{K(r_2 - r_1)}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{s = d \sin\theta}{\lambda} = \frac{2\pi d y}{\lambda L} = \phi$$

$$I = \langle s \rangle = \frac{\langle E_p^2 \rangle}{M_0 C} \approx \frac{\langle (E_1 + E_2)^2 \rangle}{M_0 C}$$

$$E_p = E_1 + E_2 \approx E_0 [\cos(Kr_2 - wt) + \cos(Kr_1 - wt)]$$

$$= 2E_0 \cos \underbrace{\left[\frac{K(r_2 - r_1)}{2} \right]}_{\phi/2} \cos \underbrace{\left[\frac{K(r_2 + r_1)}{2} - wt \right]}_{=\pi/2}$$

$$\Rightarrow I = \frac{4}{M_0 C} \frac{E_0^2 \cos^2 \phi}{2} \underbrace{\cos^2 \left[\frac{K(r_2 + r_1)}{2} - wt \right]}_{>0}$$

$$I(\theta) = \frac{2E_0^2 \cos^2 \phi}{M_0 C} = I_0 \cos^2 \frac{\phi}{2} = I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi d \sin\theta}{\lambda} \right)$$

$I_0 \equiv$ intensidade para $\theta = 0$

$$\phi = \phi(0) = 2\pi d \sin\theta \circ \phi(0) = 0$$

Adição de ondas, fatores e números complexos

Dois fatores

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 \approx E_0 \cos(Kr_1 - wt) = E_0 \cos(wt' - Kr_1) \\ E_2 \approx E_0 \cos(Kr_2 - wt) = E_0 \cos(wt' - Kr_2) \end{array} \right.$$

Redefinindo a origem do tempo

$$t' = t + \frac{Kr_1}{w}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} wt' - Kr_1 = wt + Kr_1 - Kr_1 = wt \\ wt' - Kr_2 = wt + Kr_1 - Kr_2 = wt - K(r_2 - r_1) = wt - \phi \end{array} \right.$$

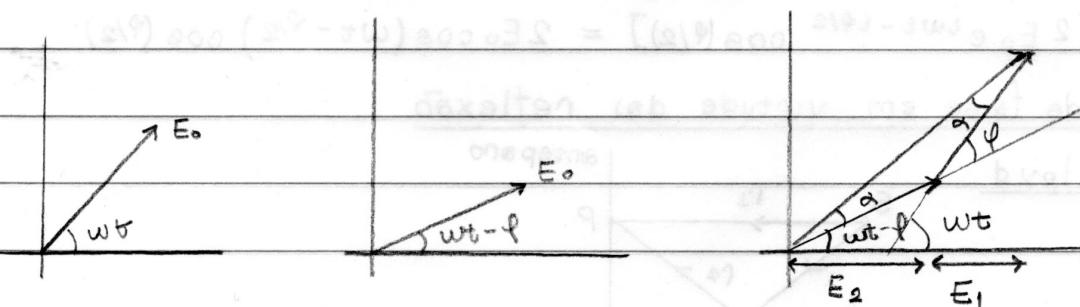
$$E_1 = E_0 \cos(wt)$$

$$E_2 = E_0 \cos(wt - \phi)$$

Os fatores se adicionam como vetores, isto garante que

$$E_p = E_1 + E_2 \text{ (projeção dos fatores)}$$

Os fatores são denotados pelos seus módulos



$$\left\{ \begin{array}{l} E_p = 2E_0 \cos \alpha \Rightarrow E_p = 2E_0 \cos \frac{\phi}{2} \\ 2\alpha = \phi \end{array} \right.$$

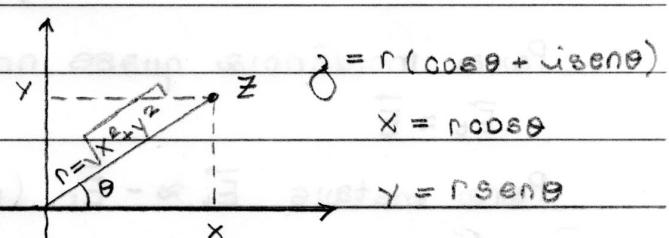
$$E_p = E_p \cos(wt - \phi + \alpha) = E_p \cos(wt - \phi/2)$$

$$E_p = 2E_0 \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(wt - \frac{\phi}{2}\right)$$

6/8/15

Números Complexos

$$z = x + iy ; x, y \in \mathbb{R} \text{ e } i = \sqrt{-1}$$



$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \Rightarrow e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots$$

$$e^{i\theta} = \underbrace{1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots}_{\cos\theta} + \underbrace{i\theta - \frac{i\theta^3}{3!} + \dots}_{i\cdot\text{sen}\theta}$$

Exponencial Complexa

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 = E_0 \cos(\omega t) \\ , \quad \varphi = 2\pi \text{ desenho} \end{array} \right.$$

$$E_2 = E_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

$$E_p = E_1 + E_2 = \operatorname{Re}(E_0 e^{i\omega t}) + \operatorname{Re}(E_0 e^{i(\omega t - \varphi)})$$

$$E_p = \operatorname{Re}[E_0 e^{i\omega t} + E_0 e^{i(\omega t - \varphi)}] \Rightarrow E_p = \operatorname{Re}[E_0 e^{i\omega t} (1 + e^{-i\varphi})]$$

$$\Rightarrow E_p = \operatorname{Re}[E_0 e^{i\omega t - i\varphi/2} (e^{i\varphi/2} + \bar{e}^{i\varphi/2})]$$

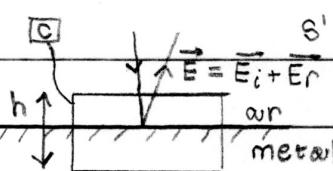
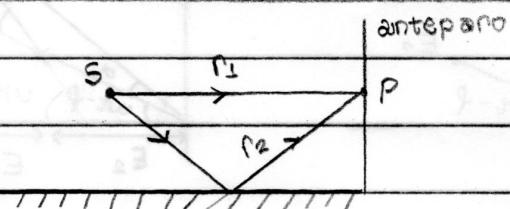
$$(e^{i\varphi/2} + \bar{e}^{i\varphi/2} = \cos(\varphi/2) + i\sin(\varphi/2) + \cos(-\varphi/2) + i\sin(-\varphi/2))$$

$$= 2 \cos(\varphi/2)$$

$$E_p = \operatorname{Re}[2 E_0 e^{i\omega t - i\varphi/2} \cos(\varphi/2)] = 2 E_0 \cos(\omega t - \varphi/2) \cos(\varphi/2)$$

Mudança de fase em virtude da reflexão

Espelho de Lloyd



$$\text{Faraday} \int_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_C \vec{B} \cdot dA$$

$$\vec{E} = \vec{0} \quad \text{helmuito p.} \quad \int_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \approx \overbrace{\vec{E} \cdot \vec{l}}^{\vec{E}_i + \vec{E}_r} = 0$$

$$(\vec{E}_i + \vec{E}_r) \cdot \vec{l} \approx 0 \Rightarrow \vec{E}_i + \vec{E}_r \approx 0$$

Para incidência quase normal

$$\vec{E}_t \approx \vec{E}$$

componentes tangenciais

Para metais $\vec{E}_i \approx -\vec{E}_r$ (incidência quase normal)

Para dielétricos (incidência quase normal)

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\text{Veloc. luz no vácuo}}{\text{Veloc. luz no meio}}$$

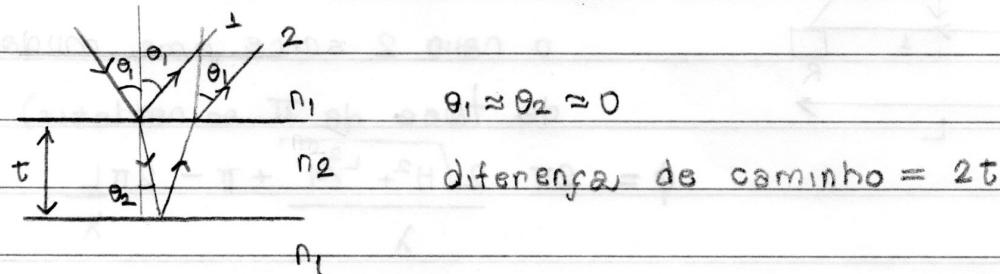
$n_2 > n_1$, há mudança de fase de π

$n_2 < n_1$ não há mudança de fase

Interferência em películas finas

Incidência quase normal

A mudança de fase, se ocorrer, será na reflexão



Caso $n_2 > n_1$ (bolhas de sabão)

$$\text{construtiva: } 2\pi \cdot \underbrace{\frac{2t}{\lambda_2}}_{\text{dist. percor. a mais}} - \pi = 2\pi m, \quad m=0,1,2,3,\dots$$

$$(\text{dist. percor. a mais}) \text{ raio 2} \quad \text{raio 1} \quad (n_2 > n_1)$$

$$\text{destrutiva: } 2\pi \cdot \underbrace{\frac{2t}{\lambda_2}}_{\text{raio 2}} - \underbrace{\pi}_{\text{raio 1}} = (2m+1)\pi$$

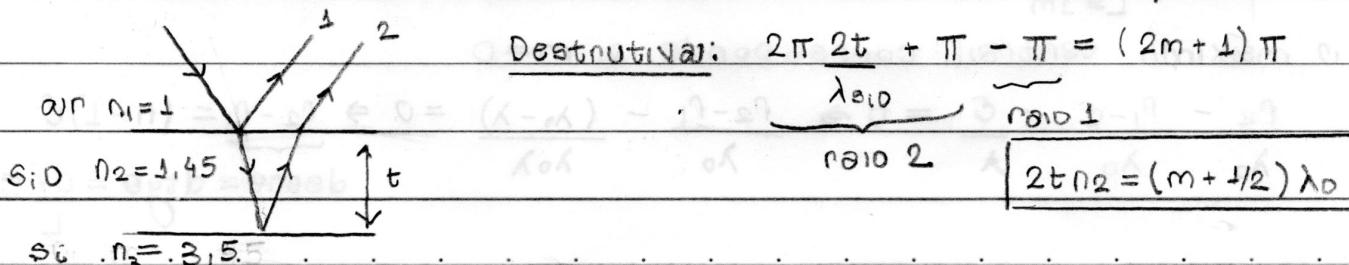
λ_2 é o comprimento de onda no meio 2

$$\left[n_2 = \frac{c}{v_2} = \frac{c}{\frac{c}{f} T} = \frac{c/f}{c_2/f} = \frac{\lambda_0}{\lambda_2} \right] \Rightarrow \lambda_2 = \frac{\lambda_0}{n_2}$$

$$\text{construtiva: } 2t n_2 = (m + \frac{1}{2}) \cdot \lambda_0 \quad m=0,1,2,3,\dots$$

$$\text{destrutiva: } 2t n_2 = (m + 1) \lambda_0 \quad m=0,1,2,3,\dots$$

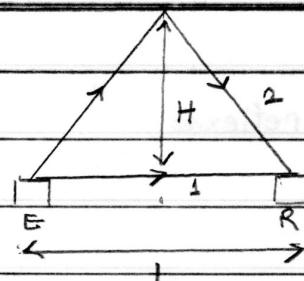
Revestimentos anti-refletores (lentes e células solares)



A menor espessura corresponde a $m=0$

$$t = \frac{\lambda}{4n} \text{ para } \lambda_0 = 550\text{nm}$$

P2-2012



ionosfera a) Calcule a relação entre H, L e λ para haver interferência destrutiva (considere que o raio 2 sofre uma mudança de fase de π ao refletir)

$$\phi = 2\pi \cdot \frac{2\sqrt{H^2 + L^2/4} + \pi - 2\pi L}{\lambda}$$

condição para interferência destrutiva $\phi = (2m+1)\pi$

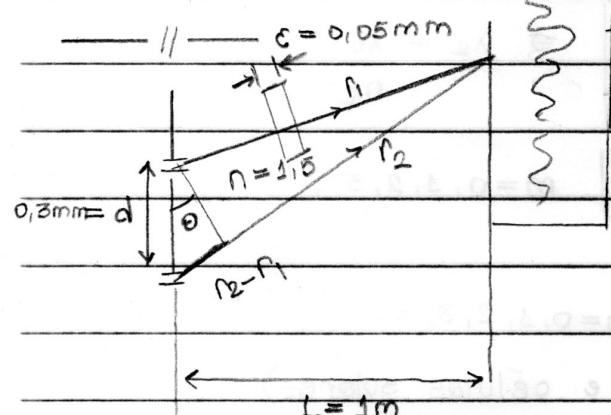
$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{2\sqrt{H^2 + L^2/4}}{L} + \pi - 2\pi L = (2m+1)\pi$$

$$2\sqrt{H^2 + L^2/4} - L = m\lambda$$

b) Dados $H = 10\text{km}$, $t = 50\text{kHz}$ e $L = 240\text{km}$. Mostre que nenhum sinal chega a R.

Subst. na equação do item a), sendo $\lambda = c/t = 6\text{km}$

$$2\sqrt{100 + 120^2} - 240 = 6m \Rightarrow m=10, \text{ satisfaz a equação}$$



Calcule o deslocamento y do máximo central:

$$\phi_2 - \phi_1 = 2\pi m \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\frac{2\pi r_2}{\lambda_0} - \left(\frac{2\pi(r_1 - C)}{\lambda_0} + \frac{2\pi C}{\lambda_0} \right) = m 2\pi$$

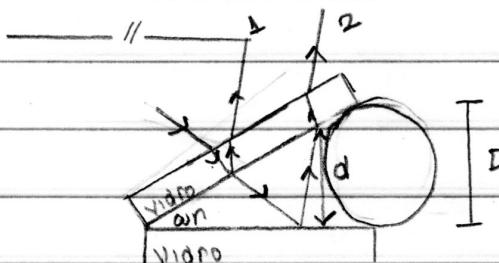
$r_2 - r_1 = m \lambda_0$

O máximo central corresponde a $m=0$

$$\frac{r_2 - r_1 - C}{\lambda_0} = 0 \Rightarrow \frac{r_2 - r_1}{\lambda_0} - \frac{(n-1)c}{\lambda_0} = 0 \Rightarrow \frac{r_2 - r_1}{\lambda_0} = \frac{(n-1)c}{\lambda_0}$$

$$\frac{dy}{L} = \frac{(n-1)c}{\lambda_0}$$

$$\Rightarrow y = \frac{(n-1)CL}{d} \approx 83 \text{ mm}$$



Calcule D sabendo que para $\lambda = 600 \text{ nm}$

observam-se 30 franges escuroas

Interferência destrutiva

$$\underbrace{\frac{2\pi \cdot 2d}{\lambda_0} + \pi}_{\text{raio 1}} - \underbrace{\pi}_{\text{raio 2}} = (2m+1)\pi \Rightarrow \frac{4\pi d}{\lambda_0} = 2\pi m \Rightarrow d = \frac{m\lambda_0}{2}$$

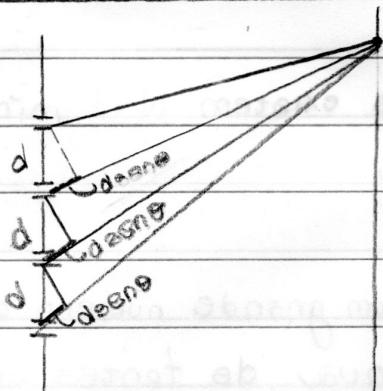
$m = 0, 1, 2, \dots$

Franges escuroas 0, 1, 2, ..., 29 $\Rightarrow m = 29$

$$D = 29 \cdot 6 \cdot 10^{-7} = 8,7 \mu\text{m}$$

2

Interferência com N fendas



A diferença de caminho entre raios consecutivos é: $r_{i+1} - r_i = dae(n-1)$
 \Rightarrow a diferença de fase é: $\varphi_{i+1} - \varphi_i = \frac{2\pi \cdot dae(n-1)}{\lambda} = \frac{2\pi \cdot dae \cdot n}{\lambda}$

Campos elétricos

$$E_1 = E_0 \cos(\omega t)$$

$$E_2 = E_0 \cos(\omega t - \frac{2\pi dae}{\lambda})$$

$$E_3 = E_0 \cos(\omega t - \frac{4\pi dae}{\lambda})$$

$$E_N = E_0 \cos(\omega t - (N-1) \frac{2\pi dae}{\lambda})$$

$$E_p = E_1 + E_2 + \dots + E_N$$

$$= \operatorname{Re} [E_0 \cdot e^{i\omega t} + E_0 \cdot e^{i\omega t - i\frac{2\pi dae}{\lambda}} + \dots + E_0 \cdot e^{i\omega t - (N-1) \frac{2\pi dae}{\lambda}}]$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad \operatorname{Re} [E_0 \cdot e^{i\omega t} (1 + e^{-i\frac{2\pi dae}{\lambda}} + e^{-i\frac{4\pi dae}{\lambda}} + \dots + e^{-i\frac{2\pi dae(N-1)}{\lambda}})]$$

$$E_p = \operatorname{Re} [E_0 \cdot e^{i\omega t} \left(\frac{1 - e^{-iN\frac{2\pi dae}{\lambda}}}{1 - e^{-i\frac{2\pi dae}{\lambda}}} \right)]$$

$$= \operatorname{Re} \left[E_0 \cdot e^{i\omega t} \frac{e^{-i\frac{N}{2}\frac{2\pi dae}{\lambda}} \left(e^{i\frac{N}{2}\frac{2\pi dae}{\lambda}} - e^{-i\frac{N}{2}\frac{2\pi dae}{\lambda}} \right)}{e^{-i\frac{1}{2}\frac{2\pi dae}{\lambda}} \left(e^{i\frac{1}{2}\frac{2\pi dae}{\lambda}} - e^{-i\frac{1}{2}\frac{2\pi dae}{\lambda}} \right)} \right]$$

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta - \cos(-\theta) - i \sin(-\theta) = 2i \sin \theta,$$

11 / 8 / 15 ⑧

$$E_p = \operatorname{Re} \left[E_0 \cdot e^{-i\omega t - (n-1)\phi} \frac{\sin(\frac{n\phi}{2})}{\sin(\frac{\phi}{2})} \right]$$

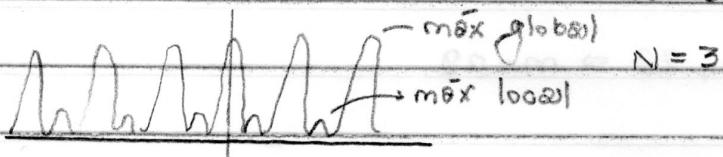
$$E_p = E_0 \frac{\sin(n\phi/2)}{\sin(\phi/2)} \cos[\omega t - (n-1)\phi]$$

$$\text{A intensidade } I = \langle S \rangle = \frac{\langle E_p^2 \rangle}{\mu_0 C}$$

$$I = \frac{E_0^2}{\mu_0 C} \left(\frac{\sin(n\phi/2)}{\sin(\phi/2)} \right)^2 \langle \cos^2[\omega t - (n-1)\phi] \rangle$$

$$I = \frac{E_0^2}{2\mu_0 C} \left(\frac{\sin(n\phi/2)}{\sin(\phi/2)} \right)^2 = J_1 \left(\frac{\sin(n\phi/2)}{\sin(\phi/2)} \right)^2$$

intensidade para $N=1$



máximos globais: ocorrem quando $d\sin\theta = n\lambda$

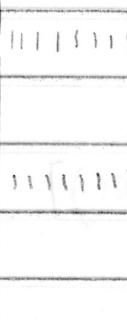
$$\Rightarrow 2\pi \frac{d\sin\theta}{\lambda} = 2\pi m$$

Entre 2 máximos globais existem $N-1$ mínimos
e $N-2$ máximos locais

Difração

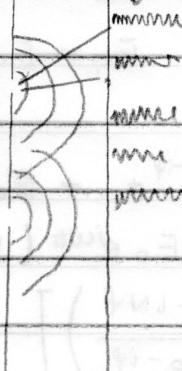
A difração é devido à interferência de um grande número de fontes coerentes ou de uma distribuição contínua de fontes coerentes

sem difração



M_N)
 M_1)
imagens das tendas

com difração



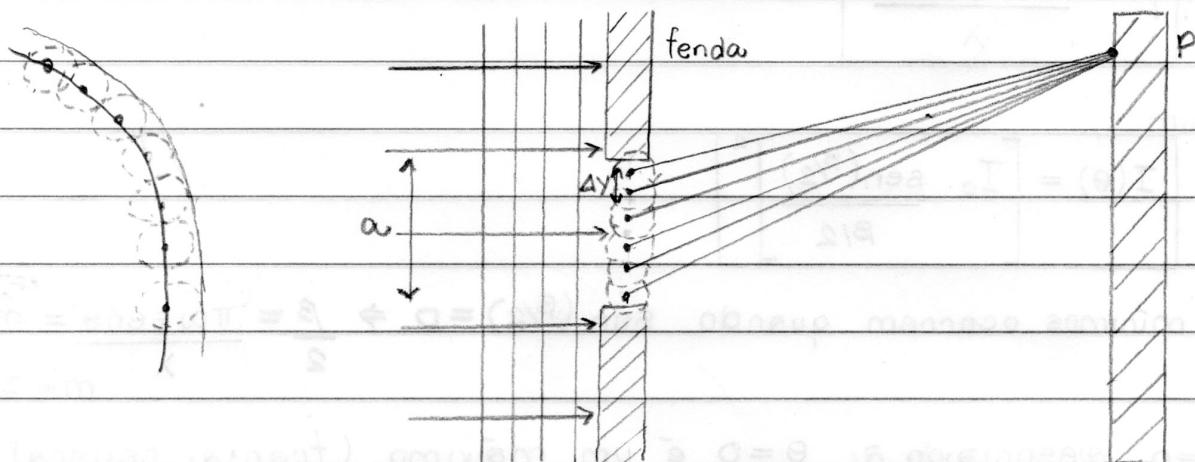
Difração de Fraunhofer: raios que interagem são aproximadamente paralelos e à fonte e à tela, estão muito longe do objeto que causa o desvio. Caso contrário, temos a Difração de Fresnel

13/8/15

Princípio de Huyghens

Permite obter a frente de onda, em $t+4t$, a partir da frente de onda em t .

"Cada ponto da frente de onda (pontos com a mesma fase) no instante t é uma fonte de ondas esféricas. A frente em $t+4t$ é a envoltória dessas ondas esféricas"



Dividimos a fenda de largura a em N gerais de largura

$$\Delta y = \frac{a}{N}$$

A diferença de fase de 2 raios consecutivos é:

$$\Delta\beta = 2\pi \frac{\Delta y \sin\theta}{\lambda}$$

Já vimos que para N fendas separadas por uma distância d ,

$$I(\theta) = \frac{E_0^2}{2M_0 C} \frac{\sin^2\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}, \quad \varphi = \frac{2\pi d \sin\theta}{\lambda}$$

No nosso caso: $d = \Delta y$ e $N = \frac{a}{\Delta y}$

$$I(\theta) = \frac{E_0^2}{2\mu_0 C} \frac{\sin^2 \left(\frac{\alpha \cdot \pi \Delta y \cdot \sin \theta}{\lambda} \right)}{\sin^2 \left(\pi \cdot \frac{\Delta y \cdot \sin \theta}{\lambda} \right)}$$

$\Delta y \approx N$

$\sin x \approx x$, para $x \approx 0$

Para $N \rightarrow \infty$

$$I(\theta) \rightarrow \frac{E_0^2}{2\mu_0 C} \frac{\sin^2 \left(\pi \alpha \sin \theta \right)}{\left(\frac{1}{N} \frac{\pi \alpha \sin \theta}{\lambda} \right)^2} = \frac{E_0^2 N^2}{2\mu_0 C} \left[\frac{\sin \left(\frac{\pi \alpha \sin \theta}{\lambda} \right)}{\frac{\pi \alpha \sin \theta}{\lambda}} \right]^2$$

$$\text{Note que } I(\theta=0) = \frac{E_0^2 N^2}{2\mu_0 C} \equiv I_0$$

Defina ainda

$$\beta \equiv \frac{2\pi \alpha \sin \theta}{\lambda}$$

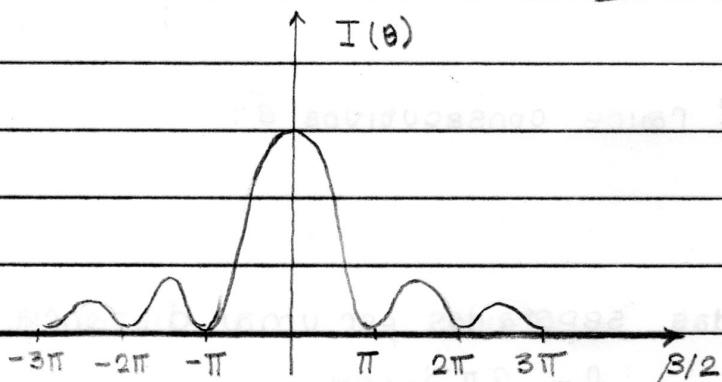
Assim,

$$I(\theta) = \left[I_0 \frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2$$

Os mínimos ocorrem quando $\sin(\beta/2) = 0 \Rightarrow \frac{\beta}{2} = \frac{m\pi}{2} \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots$

$m=0$, associando a $\theta=0$ é um máximo (trânsito central)

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \left(\frac{\pi \alpha \sin \theta}{\lambda} \right)}{\frac{\pi \alpha \sin \theta}{\lambda}} = 1$$



Os máximos locais ocorrem aproximadamente na metade da distância entre 2 mínimos
 $\beta_{\text{máx}} = \frac{\beta_{\min}(m+1) + \beta_{\min}(m)}{2} = (2m+1)\pi$

Valores exatos:

$$\beta_1 = 2.860\pi$$

$$\beta_2 = 4.96\pi$$

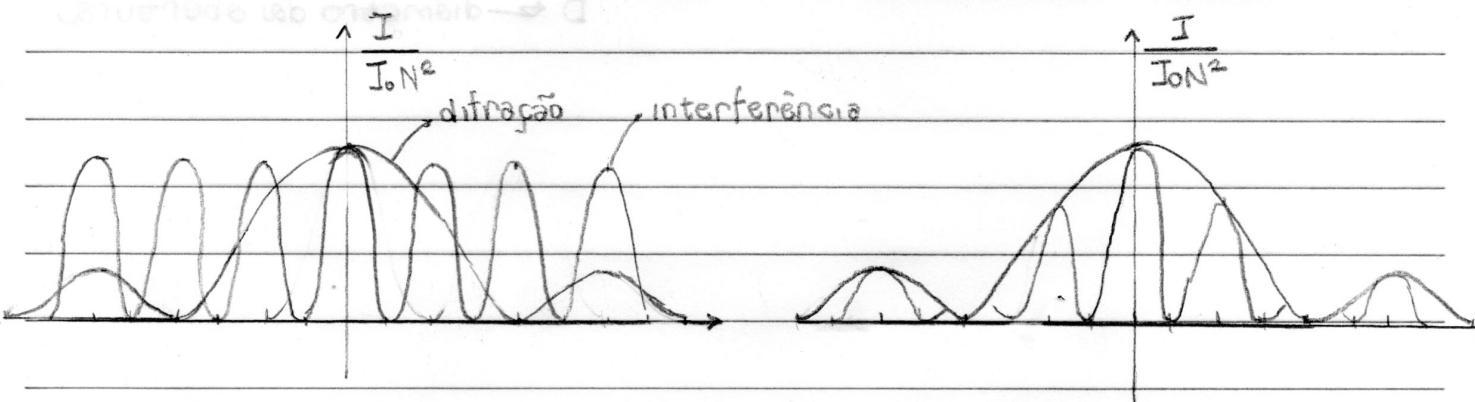
$$\beta_n = (2n+1)\pi$$

Geralmente o fenômeno da difração ocorre simultaneamente com a interferência. A difração modula a figura de interferência.

$$I = I_0 \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2 \left[\frac{\sin(\alpha/2)}{\alpha/2} \right]^2$$

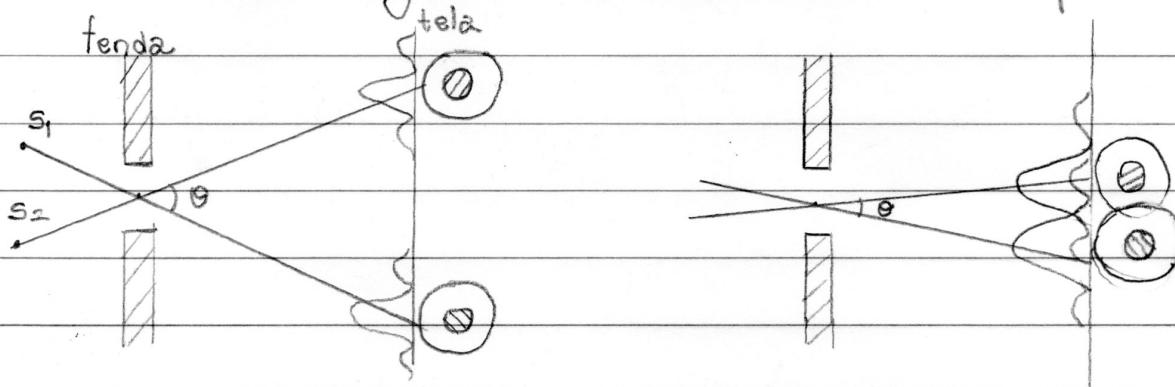
$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{difração}}$ $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{interferência}}$

$$\varphi = 2\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda}, \quad \beta = 2\pi \frac{\alpha \sin \theta}{\lambda}$$



Resolução de fendas simples

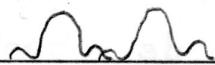
Consideremos a imagem de duas fontes luminosas puntiformes



Se a separação angular θ entre S_1 e S_2 for suficientemente grande, as fontes podem ser vistas separadamente (resolvidas)

Critério de resolução de Raleigh

“Quando o máximo central de uma imagem se sobrepõe ao primeiro mínimo de outra imagem, as duas imagens estão mínimamente resolvidas”



resolvidas



minimamente



não resolvidas

resolvidas

Mostramos que o 1º número de difração ocorre para

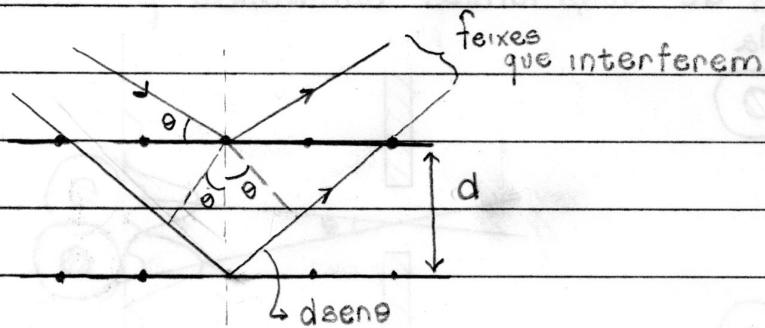
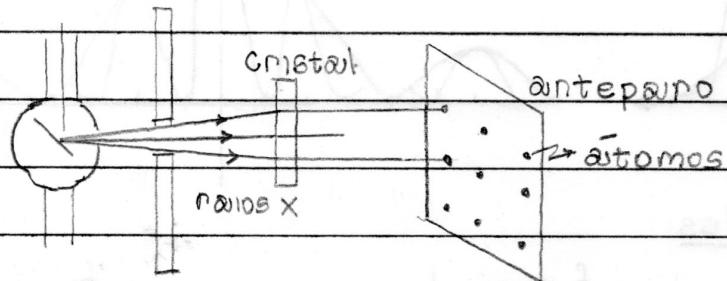
$$\beta_1 = 2\pi \Rightarrow \frac{2\pi a \operatorname{sen} \theta_m}{\lambda} = 2\pi. \text{ Para } \theta_m \approx 0, a \theta_m \approx 1 \Rightarrow \theta_m \approx \frac{\lambda}{a}$$

Para aberturas circulares: $\theta_m = 1,22 \frac{\lambda}{D}$

$D \leftarrow$ diâmetro da abertura

// 18/8/15

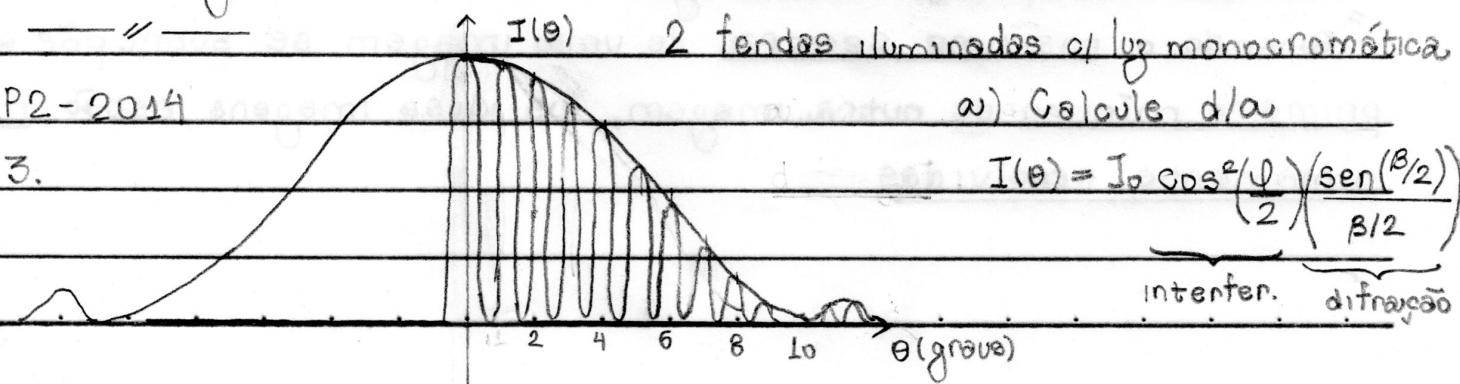
Difração de raios X em cristais



Interferência construtiva.

$$2d \operatorname{sen} \theta = m\lambda, m = 1, 2, 3, \dots \quad \text{Lei de Bragg}$$

Como $d \approx 10^{-10} \text{ m} = 1 \text{ \AA}$ precisamos usar comprimentos de onda λ na região dos raios X



mínimos: $\frac{\beta}{2} = m\pi$, $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ($m=0 \Rightarrow$ máximo central): $\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2}$
 (difração)

O mínimo em 10° corresponde a $m=1$

$$\frac{\beta}{2} = \frac{\pi \cdot a \operatorname{sen} 10^\circ}{\lambda} = \pi \Rightarrow a \operatorname{sen} 10^\circ = \lambda \quad (\text{I})$$

máximos: $\frac{\beta}{2} = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$
 (interferência)

O máximo em 10° corresponde a $n=10$

$$\frac{\beta}{2} = \pi \frac{d \operatorname{sen} 10^\circ}{\lambda} = 10\pi \Rightarrow d \operatorname{sen} 10^\circ = 10\lambda \quad (\text{II})$$

Dividindo (II) por (I): $d/a = 10$

b) Se $a \rightarrow a/2$, o número de franjas brilhantes entre os 2 primeiros mínimos aumenta $\Rightarrow \frac{a \operatorname{sen} \theta}{\lambda} = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} \theta_{\min} = \frac{\lambda}{a}$

$a \rightarrow a/2 \Rightarrow \theta_{\min}$ aumenta \Rightarrow "lengura" da curva de difração aumenta \Rightarrow cabem mais franjas

P2 - 2008

3. Duas fendas, largura a , separadas por $d = 4a$, iluminadas com luz monocromática. Distância entre o anteparo e as fendas $D \ggg d$

a) O 1° mínimo de difração ocorre para $\theta = 30^\circ$. Calcule λ

$$1^\circ \text{ mínimo: } \frac{\beta}{2} = \pi \Rightarrow a \operatorname{sen} \theta = \lambda \Rightarrow a \cdot \operatorname{sen} 30^\circ = \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{a}{2}$$

b) Calcula as aberturas angulares do máximo principal de difração
 $\text{abertura} = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$

c) Quantas regiões iluminadas devido à interferência são observadas na região compreendida pelo máximo principal de difração

18 / 8 / 15 (14)

máximos de interferência: $\frac{\theta}{2} = n\pi$

$$\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} = n\pi \Rightarrow \frac{d \sin \theta}{\lambda} = n \Leftrightarrow \frac{d \sin \theta}{\lambda/2} = n$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n_{\text{máx}}$$

$n_{\text{máx}}$ corresponde $\theta = 30^\circ$

$$\frac{d \sin 30^\circ}{\lambda/2} = n_{\text{máx}} \Rightarrow n_{\text{máx}} = 4$$

Os máximos correspondem a:

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cancel{\pm 4} \Rightarrow \text{eliminado pelas difrações.}$$

Existem 7 franges entre os primeiros mínimos de difração

P2-2014

2. Calcule d_{\min} entre 2 objetos na Lua que podem ser resolvidos pelo Hubble.

distância entre o H e a Lua = 380.000 km

diâmetro do espelho: $D = 2,4\text{m}$

Usando luz com $\lambda = 400\text{nm}$ (violeta)

$$\theta_{\min} = 1,22 \frac{\lambda}{D} = 2,0 \times 10^{-7} \text{ raud}$$

$$d_{\min} = r \cdot \theta_{\min} = (3,8 \cdot 10^8) (2 \cdot 10^{-7}) = 76\text{m}$$

Relatividade Restrita

Equação de onda para \vec{E} e \vec{B}

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}, \quad c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$$

Estas equações contêm a velocidade C que é uma quantidade que depende do referencial inercial

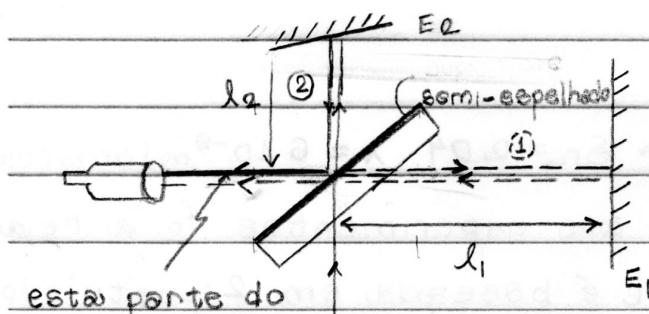
Compare com a 2º Lei de Newton

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}$$

onde só aparece a aceleração. A aceleração independe do referencial inercial.

Experimento de Michelson e Morley

Interferômetro de Michelson



esta parte do percurso é o fonte \vec{v}

\vec{v} : velocidade do interferômetro em relação ao éter

\vec{c} : velocidade da luz em relação ao éter

\vec{c}' : velocidade da luz no referencial do interferômetro

$$\text{Trecho } \textcircled{1} \text{ (ida)} \xrightarrow{\frac{\vec{c}}{\vec{v} - \vec{c}'}} t_{1i} = \frac{l_1}{c'} = \frac{l_1}{c-v}$$

$$\text{Trecho } \textcircled{1} \text{ (volta)} \xleftarrow[\frac{\vec{c}'}{\vec{c}' + \vec{v}}]{\frac{\vec{c}}{\vec{v}}} t_{1v} = \frac{l_1}{c'} = \frac{l_1}{c+v}$$

$$\text{tempo total: } t_1 = t_{1i} + t_{1v} = \frac{l_1}{c-v} + \frac{l_1}{c+v} = \frac{2cl_1}{c^2 - v^2} = \frac{2l_1}{c(1-\beta^2)}, \beta = \frac{v}{c}$$

$$\text{Trecho } \textcircled{2} \text{ (ida)} \xrightarrow{\vec{c}, \vec{c}', \vec{v}} t_{2i} = \frac{l_2}{c'} = \frac{l_2}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{l_2}{c\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\text{Trecho } \textcircled{2} \text{ (volta)} \xleftarrow[\vec{c}]{\vec{c}', \vec{v}} t_{2v} = \frac{l_2}{c'} = \frac{l_2}{c\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\text{tempo total: } t_2 = t_{2i} + t_{2v} = \frac{2l_2}{c\sqrt{1-\beta^2}}$$

diferença de caminho óptico

$$\Delta = c(t_1 - t_2) = \frac{2}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\frac{l_1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{l_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$$

Girando o aparelho de 90° , o papel dos espelhos se inverte

$$\tilde{t}_1 = \frac{2l_1}{c\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \tilde{t}_2 = \frac{2l_2}{c\sqrt{1-\beta^2}} \quad \tilde{\Delta} = c(\tilde{t}_1 - \tilde{t}_2) = \frac{2}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\frac{l_1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{l_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$$

$$\tilde{\Delta} - \Delta = \frac{2}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(l_1 + l_2 \right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx 1 + \beta^2$$

$$\tilde{\Delta} - \Delta \approx -(l_1 + l_2) \beta^2 \leftarrow 2^{\text{a}} \text{ ordem em } \beta = v/c$$

Em termos de números de franges

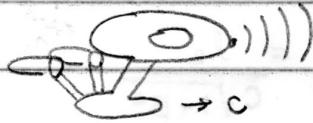
$$\frac{s_n}{\lambda} = \frac{\tilde{\Delta} - \Delta}{\lambda} \approx \frac{(l_1 + l_2)}{\lambda} \beta^2$$

$$\text{p/ } l_1 \approx l_2 \approx 1,2 \text{ m (M e M, 1881)} \Rightarrow s_n = 0,04, \lambda \approx 6 \cdot 10^{-9} \text{ m (amarelo)}$$

A única explicação que resistiu aos experimentos foi a relatividade restrita de Einstein que é baseada em 2 postulados

1. As leis da física são as mesmas em qualquer sistema de referência inercial
2. A velocidade da luz no vácuo é a mesma em qualquer sistema de referência inercial e não depende da velocidade da fonte

O postulado 2 implica que um observador não pode se deslocar na velocidade da luz no vácuo



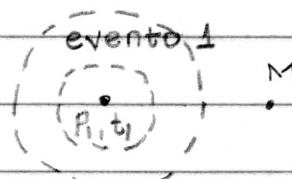
No referencial da nave, as frentes de onda se deslocam a velocidade c.

No referencial da Terra, as frentes de onda são estacionárias em relação à nave

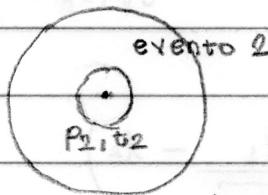
Os dois pontos de vista são contraditórios

Relatividade da simultaneidade

Definição de simultaneidade de Einstein



sinal luminoso

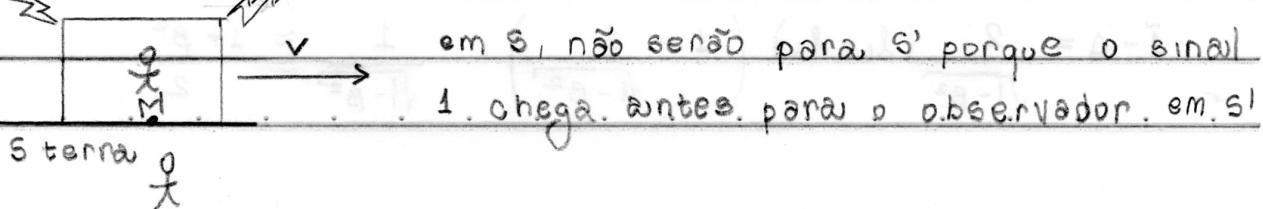


sinal luminoso

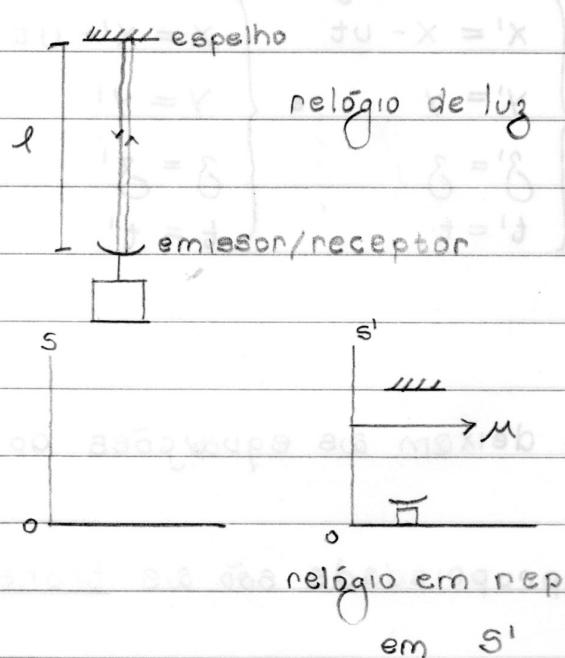
Os dois eventos são simultâneos se os sinais luminosos se encontram em M (ponto médio do segmento P₁P₂)

② $s'(t_{\text{rem}})$ ①

Se os eventos 1 e 2 são simultâneos

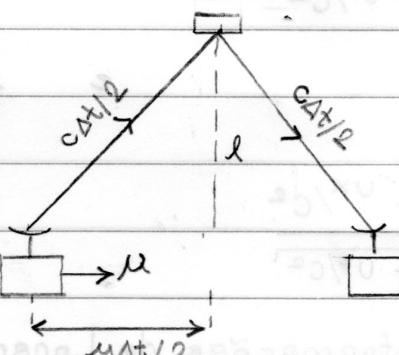
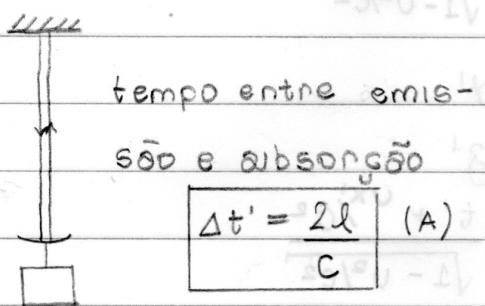


Dilatação do tempo



$$S \equiv S' \text{ em } t=0$$

• Referencial S'



$$\frac{\Delta t}{2} = \sqrt{l^2 + \left(\frac{\mu \Delta t}{2}\right)^2} \Rightarrow c^2 \Delta t^2 = l^2 + \mu^2 \frac{\Delta t^2}{4} \Rightarrow \Delta t^2 (c^2 - \mu^2) = l^2$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - \mu^2}} \Rightarrow \Delta t = \frac{2l}{c \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{c^2}}} \quad (B)$$

Comparando (A) e (B):

$$\Delta t = \Delta t' > \Delta t' \quad (\text{dilatação do tempo})$$

$$\sqrt{1 - \frac{\mu^2}{c^2}}$$

Transformações de Lorentz

Do ponto de vista matemático, dizer que a mecânica newtoniana é invariante para todos os observadores inertiais é equivalente a dizer que as equações

de Newton são invariantes pelas transformações de Galileu

$$\begin{aligned} & \text{Frame } S: \quad x, y, z \\ & \text{Frame } S': \quad x', y', z' \\ & \text{Velocity: } u \\ & \text{Position at } t=0: s' = s \\ & \text{Time: } t' = t \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x' + ut \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{array} \right.$$

As transformações de Galileu não deixam as equações do eletromagnetismo invariantes

As transformações que têm esta propriedade são as transformações de Lorentz

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' + \frac{ux'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \end{array} \right.$$

Vbs.: Transformações de Lorentz recobrem as de Galileu quando $u/c \ll \ll 1$ (baixas velocidades)

Dilatação do tempo (pelas transf. de Lorentz)

• Análise em S'

1º evento: emissão do fóton em x_f' em $t_f' = 0$

2º evento: absorção do fóton em x_f' em $\Delta t'$

$$t = \frac{t' + ux'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad t_e = 0 + \frac{ux_f'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad t_a = \frac{\Delta t' + ux_f'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

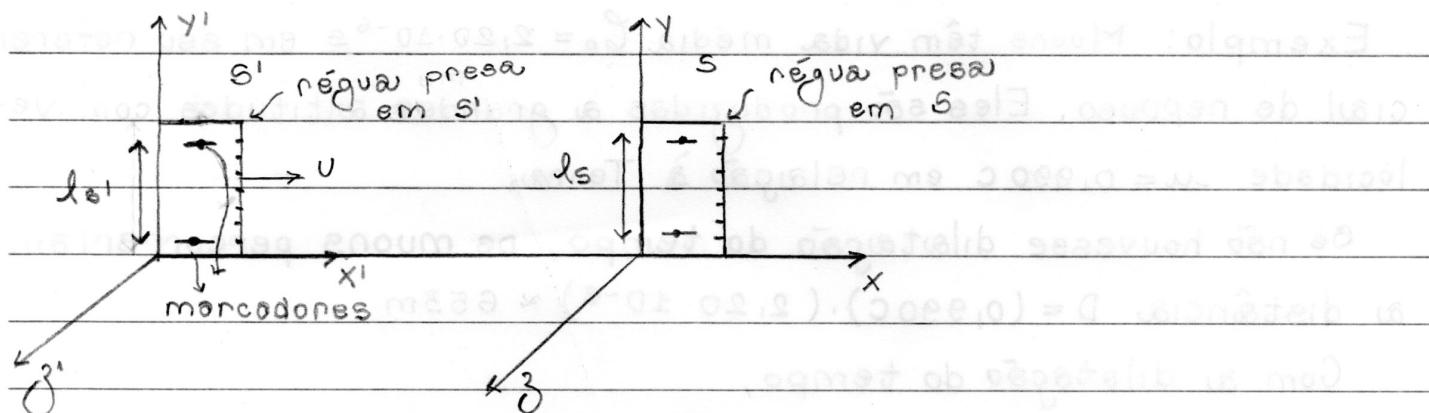
tempo de emissão
em s

tempo de absorção
em s

$$t_a - t_e = \Delta t = \frac{\Delta t' + ux_f'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - \frac{ux_f'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad \text{coincide com a expressão anterior}$$

Relatividade do comprimento

Componentes perpendiculares ao movimento ficam invariantes

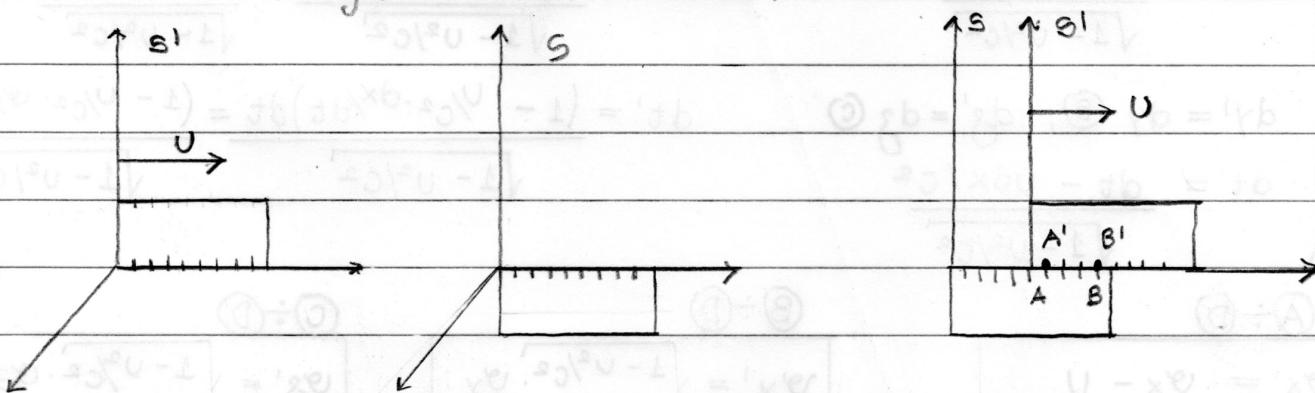


Ao passar por S, os marcadores em S' deixam marcas na régua em S. Isto permite comparar comprimentos perpendiculares ao movimento.

Suponha que $l_S > l_{S'}$ (a régua em movimento encolheu)

O observador S' pode fazer o mesmo experimento e concluir que $l_{S'} > l_S$

O truque dos marcadores não pode ser usado para réguas paralelas à direção do movimento.



$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Observador em S mede o comprimento $x_B - x_A$ no instante t

$$\left. \begin{aligned} x'_B &= \frac{x_B - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ x'_A &= \frac{x_A - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x_B - x_A &= \frac{l}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ l &= \text{comprim. das réguas em } S \end{aligned}$$

$\frac{x_B - x_A}{l_0}$ comprim. da régua em S'

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \Rightarrow l = l_0 \sqrt{1 - u^2/c^2} < l_0$$

Obs.: a contração de Lorentz e a dilatação do tempo são efeitos reais.

Exemplo: Muons têm vida média $\tau_0 = 2,20 \cdot 10^{-6}$ s em seu referencial de repouso. Eles são produzidos a grandes altitudes com velocidade $v = 0,99c$ em relação à Terra.

Se não houvesse dilatação do tempo, os muons percorreriam a distância $D = (0,99c) \cdot (2,20 \cdot 10^{-6}) \approx 653$ m.

Com a dilatação do tempo,

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{2,20 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{1 - (0,99)^2}} \approx 15,6 \cdot 10^{-6} \text{ s e, portanto,}$$

eles podem percorrer a distância $D = (0,99c) \cdot (15,6 \cdot 10^{-6}) \approx 4630$ m.

Do ponto de vista do muon, é a distância entre seu ponto de criação e a superfície da Terra que encolheu.

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} = 4630 \cdot \sqrt{1 - (0,99)^2} = 653 \text{ m.}$$

Transformações de Lorentz para velocidade

$$\left\{ \begin{array}{l} dx' = \frac{dx - vdt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad dx' = \frac{(dx/dt - v)dt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{(v_x - v)dt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{A} \\ dy' = dy \quad \text{B}, \quad dz' = dz \quad \text{C} \\ dt' = \frac{dt - vdx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad dt' = \frac{(1 - v/c^2 \cdot dx/dt)dt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{(1 - v/c^2 \cdot v_x)dt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{D} \end{array} \right.$$

$$\text{A} \div \text{D}$$

$$v_x' = \frac{v_x - v}{1 - v/c^2 \cdot v_x}$$

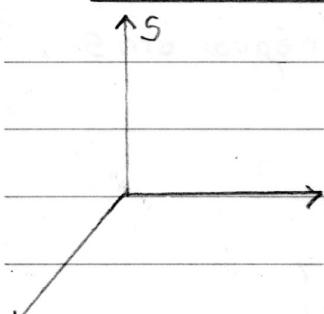
$$\text{B} \div \text{D}$$

$$v_y' = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2} \cdot v_y}{1 - v/c^2 \cdot v_x}$$

$$\text{C} \div \text{D}$$

$$v_z' = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2} \cdot v_z}{1 - v/c^2 \cdot v_x}$$

Velocidade relativa



A velocidade de 2 em relação a 1 é a velocidade de 2 no referencial S' em que 1 está em repouso.

Relatividade

1. Equivalência dos referenciais inerciais

2. A velocidade da luz é a mesma em todos os referenciais inerciais

Definições

• Comprimento próprio: é o comprimento de um objeto medido num referencial em que o objeto está em repouso

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad l_0 = \text{compr. próprio}$$

• Tempo próprio: é o intervalo de tempo entre dois eventos num referencial onde os eventos ocorrem num mesmo ponto

$y \uparrow S$

$y' \uparrow S'$

v

$x \equiv x'$

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \Delta t_0 = t. \text{ próprio}$$

$s = s' \text{ em } t = t' = 0$

Transformações de Lorentz

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$y' = y; \gamma' = \gamma$$

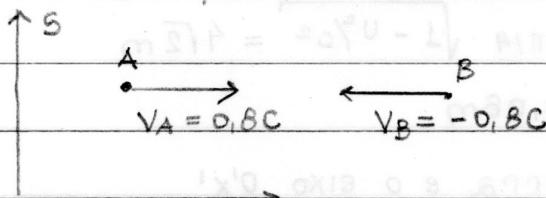
$$y = y'; \gamma = \gamma'$$

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Exercícios

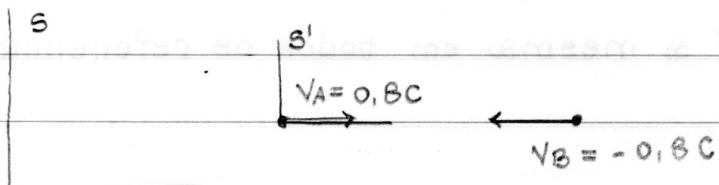
1. Duas naves espaciais idênticas com $L_0 = 100m$. Em relação a S:



a) Calcule L no referencial S

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 100 \sqrt{1 - (0.8)^2} = 60m$$

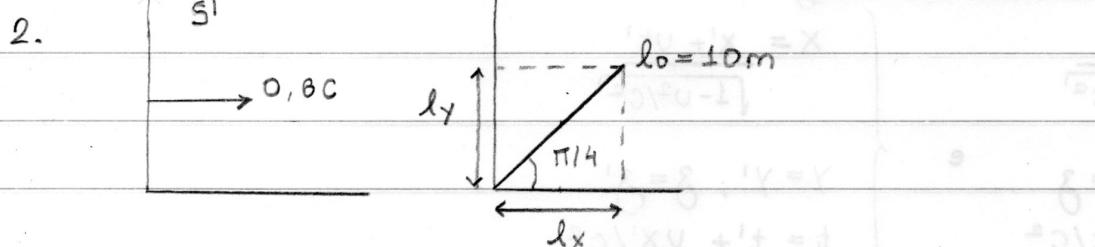
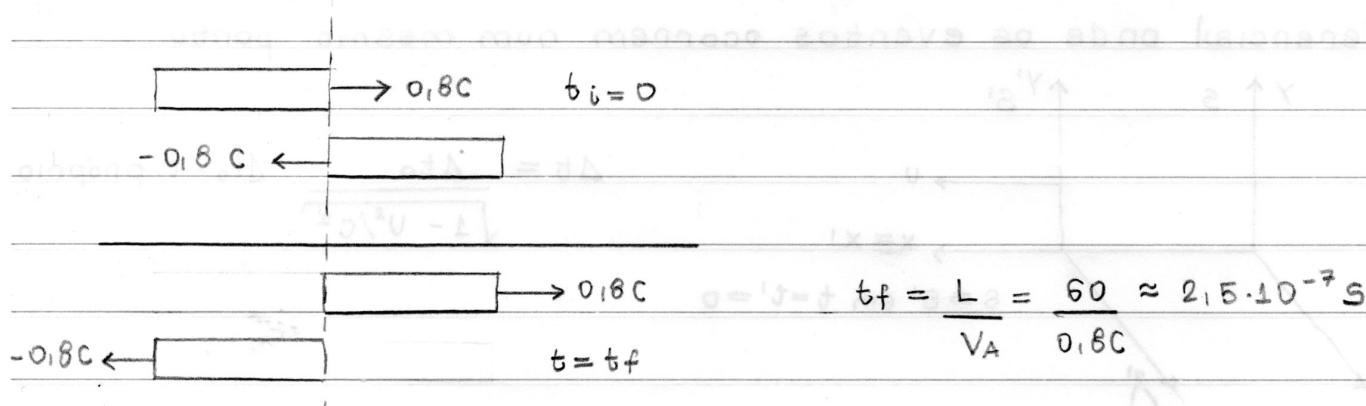
b) Qual é o comprimento da nave B medida por um observador em A?



$$\begin{aligned} v_B' &= \frac{v_B - v}{1 - \frac{v_A v_B}{c^2}} = \frac{-0.8c - 0.8c}{1 - \frac{(0.8c)(-0.8c)}{c^2}} \\ &\Rightarrow v_B' = 0.97956c < c \end{aligned}$$

$$l' = l_0 \sqrt{1 - \frac{v_B'^2}{c^2}} \approx 30m$$

d) Em $t_i=0$, as proas das naves estão alinhadas e elas começam a passar uma pela outra. Em que instante t_f medida em S as popas estão alinhadas?



a) Calcule o comprimento l' em S'

$$l' = \sqrt{l_x'^2 + l_y'^2}$$

$$l_y' = l_y = l_0 \cdot \sin \pi/4 = 5\sqrt{2}$$

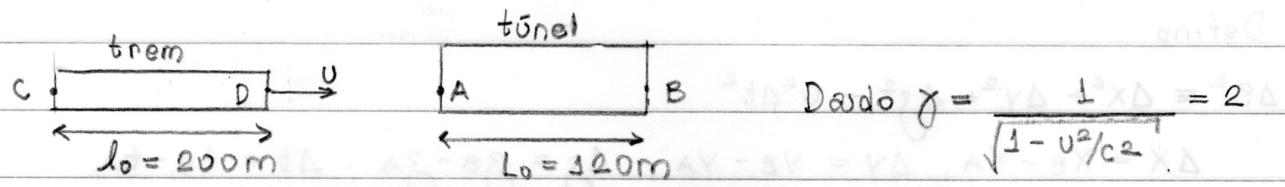
$$l_x' = l_x \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} = l_0 \cdot \cos \pi/4 \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} = 4\sqrt{2}m$$

$$\Rightarrow l' = \sqrt{25 \cdot 2 + 16 \cdot 2} = \sqrt{82} \approx 9,06m$$

b) Calcule o ângulo entre a barra e o eixo $O'x'$

$$\tan \theta' = \frac{l_y'}{l_x'} = \frac{5}{4} \Rightarrow \theta' \approx 0,896 \text{ rad} \approx 51,34^\circ$$

3.



a) Calcule a velocidade do trem

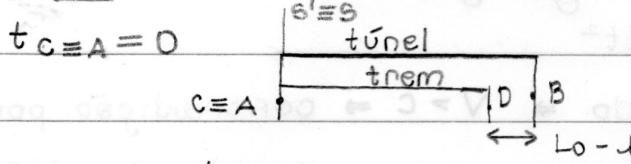
$$\frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{4} = 1 - \frac{u^2}{c^2} \Rightarrow u = \frac{\sqrt{3}}{2} c$$

b) Quanto vale l (comprimento do trem em s)?

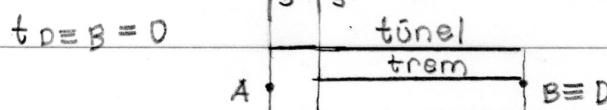
$$l = l_0 \sqrt{1 - u^2/c^2} = \frac{l_0}{\gamma} = \frac{200}{2} = 100 \text{ m}$$

c) Quanto vale L (comprimento do túnel em s')?

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = \frac{120}{2} = 60 \text{ m}$$

d) Do ponto de vista de S' é possível o trem estar todo dentro do túnel?Em S trem acaba de entrar no túnel

trem começa a sair do túnel



$$t_{D \equiv B} = \frac{L - l_0}{u} = \frac{120 - 100}{\frac{\sqrt{3}}{2} c} = \frac{40\sqrt{3}}{3c} \text{ s}$$

Em S' o evento $D \equiv B$ ocorre no tempo $t'_{D \equiv B}$

$$t'_{D \equiv B} = \left(t_{D \equiv B} - \frac{u \times_B}{c^2} \right) \gamma = \left(\frac{40\sqrt{3}}{3c} - \frac{\sqrt{3}c \cdot 120}{2c^2} \right) < 0$$

Intervalo Invariante

Dois eventos A e B

$$A = (x_A, y_A, z_A, t_A)$$

$$B = (x_B, y_B, z_B, t_B)$$

Defino

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2$$

$$\Delta x = x_B - x_A; \Delta y = y_B - y_A; \Delta z = z_B - z_A; \Delta t = t_B - t_A$$

Pode-se mostrar que:

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 - c^2 \Delta t'^2$$

As coordenadas com linhas são medidas no referencial s' .

4. Mostre que se $\Delta s^2 > 0$, não existe um referencial onde os eventos A e B ocorrem num mesmo tempo.

Suponha s' no qual A e B ocorrem no mesmo ponto.

$$\Delta x' = \Delta y' = \Delta z' = 0$$

$$\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 - c^2 \Delta t'^2 = \Delta s^2 < 0 \Rightarrow \text{contradição}$$

5. O evento A poderia ter causado o evento B se $\Delta s^2 > 0$?

Suponha que um sinal tivesse sido enviado de A para B com velocidade $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$

$$\Delta x = v_x \cdot \Delta t; \Delta y = v_y \cdot \Delta t; \Delta z = v_z \cdot \Delta t$$

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2$$

$$= (v^2 - c^2) \Delta t^2 > 0, \text{ Dado } \Rightarrow v > c \Rightarrow \text{contradição porque}$$

a vel. máx. é c

$$\Delta s^2 = 0.21 - 0.21 = 0.00 = 0$$

$$0 > \left(\frac{0.21}{0.02} - \frac{0.21}{0.02} \right) = 0 \left(\frac{0.21 - 0.21}{0.02} \right) = 0$$