Notas de aulas de física básica
Ondas, Relatividade, Termodinâmica e Eletromagnetismo [1]

Fernando T C Brandt

10 de outubro de 2013

[1] **As principais referências aqui adotadas são os volumes 2 e 4 (cap. 6) do "Curso de Física Básica", Herch Moysés Nussenzveig (HMN), Ed. Edgard Blücher, e também o volume 1 do "The Feynman Lectures on Physics", R. P. Feynman, R. B. Leighton e M. Sands, Addison-Wesley Pub. Co. (veja referências [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]). É possível que existam ainda muitos erros de digitação. Além disso o texto tem sido modificado freqüentemente. Dúvidas, sugestões e correções podem ser enviadas para o e-mail fbrandt@usp.br**

Sumário

1 Ondas **9**

1.1 Conceito de ondas . . . 9
1.1.1 Alguns fatos e propriedades . . . 9
1.2 Ondas em uma dimensão . . . 10
1.2.1 Ondas progressivas . . . 10
1.2.2 Obtenção da Solução de d'Alembert . . . 11
1.2.3 Soluções harmônicas . . . 14
1.3 Equação da corda vibrante . . . 15
1.3.1 Derivação da equação de onda . . . 15
1.3.2 Intensidade da onda . . . 17
1.3.3 Princípio de Superposição . . . 19
1.4 Interferência de ondas . . . 20
1.4.1 Duas ondas no mesmo sentido . . . 20
1.4.2 Duas ondas em sentidos opostos – *Ondas Estacionárias I* . . . 22
1.4.3 Batimentos – Velocidade de Grupo . . . 22
1.5 Reflexão de ondas . . . 24
1.5.1 Extremidade fixa . . . 24
1.5.2 Extremidade livre . . . 25
1.5.3 Reflexão em um ponto de junção . . . 26
1.6 Modos Normais de Vibração – *Ondas Estacionárias II* . . . 29
1.6.1 Corda presa nas extremidades . . . 30
1.6.2 Corda presa em uma extremidade e solta em outra . . . 33
1.6.3 Corda solta em ambas as extremidades . . . 33
1.6.4 Movimento Geral da Corda - Análise de Fourier . . . 34

2 Som **39**

2.1 Ondas sonoras . . . 39
2.1.1 Derivação da equação de onda . . . 40
2.1.2 Velocidade do Som . . . 43
2.1.3 Sons harmônicos . . . 45
2.1.4 Intensidade do som . . . 46
2.2 Ondas em mais dimensões . . . 48
2.2.1 Ondas planas em três dimensões . . . 48
2.2.2 Equação de ondas em três dimensões . . . 49
2.2.3 Ondas esféricas . . . 50
2.2.4 Princípio de Huygens . . . 50
2.2.5 Reflexão e refração . . . 51

2.2.6 Efeito Doppler . . . 55
2.2.7 Cone de Mach – velocidades supersônicas . . . 58

3 Relatividade **63**
3.1 Sistema de coordenadas galileano . . . 63
3.2 Princípio de relatividade . . . 63
3.3 Invariância da velocidade da luz . . . 64
3.3.1 O experimento de Michelson e Morley . . . 66
3.3.2 Alternativas . . . 70
3.3.3 Einstein entra em cena . . . 71
3.4 Conseqüências dos Princípios da Relatividade Restrita . . . 72
3.4.1 Relatividade da Simultaneidade . . . 73
3.4.2 Dilatação do tempo . . . 76
3.4.3 O " paradoxo" das gêmeas . . . 79
3.4.4 Contração de FitzGerald-Lorentz (distâncias longitudinais) . . . 81
3.5 Transformação de Lorentz . . . 85
3.5.1 Derivação da transformação de Lorentz . . . 85
3.5.2 Transformação de Galileu . . . 89
3.5.3 Contração de Lorentz . . . 89
3.5.4 Transformação de Lorentz em qualquer direção . . . 90
3.5.5 Simultaneidade e sincronização . . . 90
3.5.6 Intervalos de Espaço-Tempo . . . 90
3.5.7 O cone de luz . . . 94
3.5.8 Composição de velocidades . . . 95
3.6 Efeito Doppler relativístico . . . 96
3.6.1 Efeito Doppler e a expansão no Universo . . . 98
3.7 Mecânica relativística . . . 99
3.7.1 Velocidade . . . 99
3.7.2 Momento e energia . . . 100
3.7.3 Cinemática relativística . . . 102
3.7.4 Dinâmica relativística . . . 106

4 Leis da Termodinâmica **109**
4.1 Introdução . . . 109
4.2 Leis da Termodinâmica . . . 110
4.2.1 Lei Zero . . . 110
4.2.2 Primeira Lei . . . 112
4.2.3 Segunda Lei . . . 114
4.2.4 Terceira Lei . . . 127

5 Tópicos de Mecânica Estatística **129**
5.1 Volume do espaço de fase no ensemble microcanônico . . . 129
5.1.1 "Correções" quânticas . . . 130
5.1.2 Entropia estatística do gás ideal . . . 130
5.1.3 Termodinâmica do gás ideal . . . 131
5.1.4 Probabilidades de configurações microscópicas . . . 131
5.1.5 Distribuição de Maxwell via ensemble microcanônico . . . 131
5.2 O ensemble canônico . . . 133

5.2.1 Função de partição . . . 134
5.2.2 Conexão com a termodinâmica . . . 136
5.2.3 Exemplos . . . 138
5.3 Radiação eletromagnética em equilíbrio térmico . . . 142
5.3.1 Alguns fatos básicos . . . 142
5.3.2 "radiação térmica" = "radiação de corpo negro" ? . . . 147
5.3.3 Tratamento estatístico da radiação térmica . . . 148

6 Notas de aula de Física 3 e 4 155
6.1 Primeira aula . . . 155
6.1.1 Interações fundamentais da natureza . . . 155
6.1.2 Carga elétrica . . . 155
6.1.3 A Lei de Coulomb . . . 156
6.1.4 Princípio de superposição . . . 157
6.1.5 O Campo . . . 157
6.1.6 Campo de um dipolo . . . 158
6.2 Segunda aula . . . 159
6.2.1 Campo de uma distribuição contínua de cargas . . . 159
6.2.2 Campo de um bastão carregado . . . 160
6.2.3 Campo de um anel carregado . . . 161
6.2.4 Campo de um disco carregado . . . 162
6.3 Terceira aula . . . 163
6.3.1 Linhas de campo . . . 163
6.3.2 Fluxo e Lei de Gauss . . . 165
6.4 Quarta aula . . . 169
6.4.1 Exemplos simples de aplicações da Lei de Gauss . . . 169
6.5 Quinta aula . . . 172
6.5.1 Condutores . . . 172
6.5.2 Potencial Eletrostático . . . 173
6.6 Sexta aula . . . 178
6.6.1 Potencial de uma esfera uniformemente carregada . . . 178
6.6.2 Cálculo do campo elétrico a partir do potencial . . . 180
6.6.3 Potencial de um condutor carregado . . . 180
6.6.4 Condutor possuindo uma cavidade - Blindagem . . . 182
6.7 Sétima aula . . . 183
6.7.1 Capacitores . . . 183
6.8 Oitava aula . . . 188
6.8.1 Capacitores com dielétricos . . . 188
6.8.2 Capacitores com dois dielétricos . . . 188
6.9 Nona aula . . . 190
6.9.1 Descrição atômica do dielétrico . . . 190
6.10 Décima aula . . . 192
6.11 Décima Primeira Aula . . . 193
6.11.1 Corrente elétrica . . . 193
6.11.2 Densidade de corrente . . . 194
6.11.3 Relação entre $\vec{J}$ e $\vec{E}$ (Lei de Ohm) . . . 195
6.11.4 Resistência . . . 195

6.11.5 Modelo para condução elétrica . . . 196
6.11.6 Energia e potência elétrica . . . 197
6.12 Décima Segunda Aula . . . 198
6.12.1 Força eletromotriz . . . 198
6.12.2 Circuitos RC . . . 200
6.13 Décima Terceira Aula . . . 203
6.13.1 O campo magnético . . . 203
6.13.2 Força magnética . . . 205
6.14 Décima Quarta Aula . . . 207
6.14.1 Força magnética sobre correntes . . . 207
6.14.2 Torque sobre uma espira de corrente . . . 210
6.15 Tópicos a serem incluidos nestas notas . . . 212
6.16 Corrente alternada . . . 212
6.16.1 Valores quadráticos médios . . . 212
6.16.2 Circuito RLC em série com fonte de corrente alternada . . . 213
6.17 Equações de Maxwell . . . 223
6.17.1 Generalização da lei de Ampère . . . 223
6.17.2 Forma diferencial da equações . . . 224
6.18 Ondas eletromagnéticas . . . 227
6.18.1 Velocidade da Luz . . . 228
6.18.2 Ondas planas . . . 229
6.19 Energia do campo eletromagnético . . . 231
6.19.1 Vetor de Poynting . . . 231
6.20 Pressão eletromagnética . . . 233
6.21 Ondas eletromagnéticas harmônicas . . . 234
6.22 Interferência e Difração . . . 236
6.23 A Natureza da Luz . . . 236
6.23.1 Comportamento Ondulatório e Corpuscular . . . 236
6.24 Interferência . . . 236
6.24.1 Difração . . . 242
6.25 Fótons, Elétrons e Átomos . . . 242
6.26 Teoria Quântica . . . 242
6.27 Estrutura Atômica . . . 242

A Conservação de momento na relatividade **243**
A.1 Exercício . . . 243

B Teorema de Equipartição de Energia **245**

C Distribuição de Maxwell **249**

D Formulas e tabelas de constantes físicas **251**
D.1 Teorema Binomial . . . 251
D.2 Função exponencial . . . 251
D.2.1 O limite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ quando $n \to \infty$ . . . 251
D.2.2 A função e^x . . . 252
D.2.3 Derivadas de e^x . . . 252
D.2.4 Integral de e^x . . . 252

D.2.5 Números complexos 253
D.2.6 Fórmula de Euler 254
D.3 Fórmulas trigonométricas 255
D.3.1 Soma de ângulos 255
D.3.2 Identidades produto-soma 255
D.3.3 Identidades soma-produto 256
D.4 Algumas integrais 256
D.4.1 Fórmulas básicas 256
D.4.2 Integrais de algumas funções racionais 256
D.4.3 Integrais envolvendo raízes 257
D.4.4 Integrais envolvendo logaritmos 257
D.4.5 Integrais envolvendo exponenciais 257
D.4.6 Integrais envolvendo funções trigonométricas 257
D.5 Algumas constantes físicas 259
D.6 Tabela Periódica 261

Capítulo 1

Ondas

1.1 Conceito de ondas

A experiência mostra que é possível produzir efeitos em um ponto B, a partir de um ponto A, distante de B, sem que seja necessário mover um corpo material de A para B. Alguns exemplos:

- Controle remoto em A altera as propriedades de dispositivos (TV, portão automático, portas de automóveis, etc) em B.
- Auto-falante em A produz vibrações sonoras em B.
- Se A e B são pontos na superfície da água, podemos produzir uma onda de superfície em A que faz um barco se movimentar em B.
- Se A e B são pontos de uma corda esticada, podemos produzir oscilações em A, que se propagam até B.

Existem muitas outras situações onde ocorre a *propagação de um sinal* entre pontos distantes no espaço, mas a *matéria* se move apenas localmente. Por exemplo, quando uma pedra é atirada no meio de um lago as ondas produzidas se propagam até a margem, mas a superfície do lago se move apenas oscilando localmente. Esse conceito de onda refere-se a situações que podem ser reduzidas a um tratamento mecânico envolvendo propriedades de elasticidade do meio. Mas há também outras possibilidades. Por exemplo, uma *onda eletromagnética* não precisa de um meio para se propagar. O mesmo ocorre com as *ondas de probabilidade* na Mecânica Quântica.

1.1.1 Alguns fatos e propriedades

Embora não transporte matéria, a onda transmite *momento e energia*. Por exemplo, uma perturbação ondulatória produzida na superfície d'água faz com que um barco distante oscile. Dependendo das características do meio de propagação, a perturbação ondulatória pode possuir diferentes características. Listamos abaixo alguns casos típicos.

- Ondas longitudinais.
- Ondas transversais.
- Mistura de transversais e longitudinais. Por exemplo, ondas sísmicas (meios sólidos). No centro líquido da terra a parte transversal desaparece.

- Ondas na superfície da água não são nem transversais nem longitudinais. Pequenos elementos de fluido descrevem trajetórias aproximadamente circulares, movendo-se na direção da onda, na superfície, e na direção oposta, por baixo.

- Ondas eletromagnéticas. Os campos elétrico e magnético oscilam perpendicularmente à direção de propagação e entre si. Não há um meio material para a propagação (esse grande "mistério" somente veio a ser descoberto juntamente com os desenvolvimentos que levaram à Teoria da Relatividade Especial, que veremos mais adiante no curso).

- Ondas de probabilidade na Mecânica Quântica. De acordo com a Teoria Quântica, há uma onda de probabilidade associada a cada partícula.

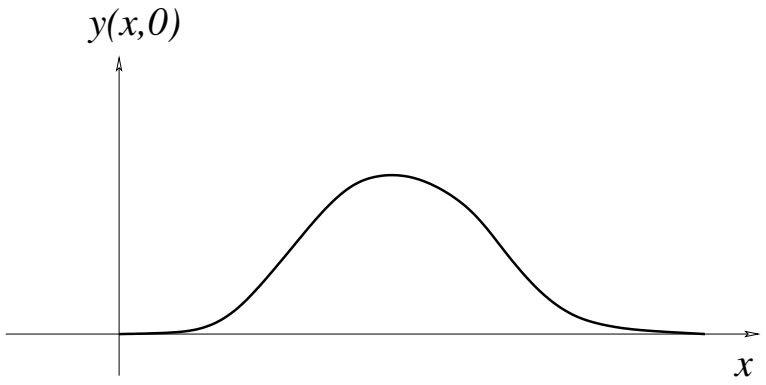
A seguir iniciaremos o estudo quantitativo detalhado das *ondas unidimensionais*. O caso típico é o que ocorre em uma corda esticada.

1.2 Ondas em uma dimensão

Os casos mais simples são aqueles em que o meio de propagação pode ser reduzido a uma única direção do espaço. O exemplo típico é o de uma *corda* distendida, cujos pontos podem oscilar na direção perpendicular à corda. A seguir vamos analisar em detalhe estas ondas unidimensionais.

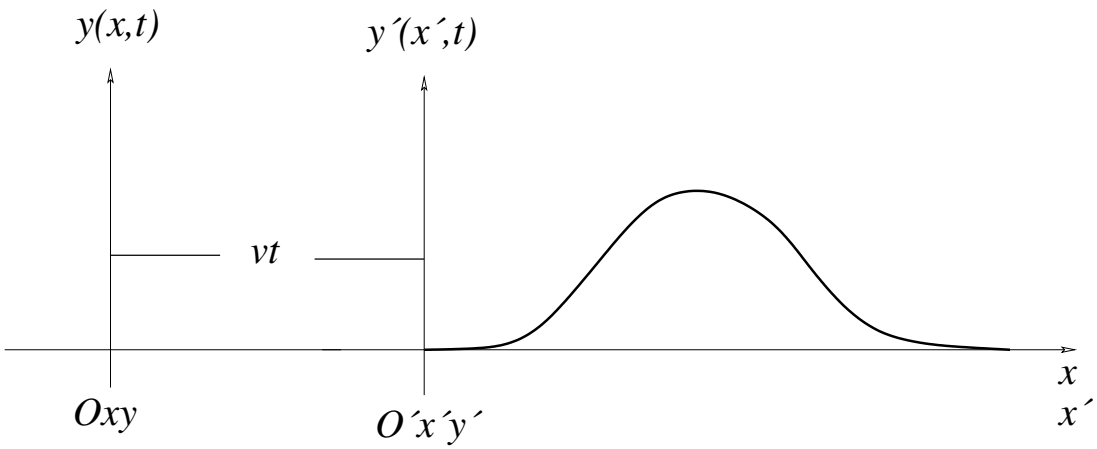
1.2.1 Ondas progressivas

Consideremos um *pulso* se propagando em uma dimensão descrita pela coordenada x. A fotografia do *perfil* da corda em um dado instante de tempo pode ser descrita por uma função de x. Por exemplo, em $t = 0$ poderíamos ter a função $y(x, 0)$, como na figura



Após um tempo t o perfil seria $y(x, t)$. Temos assim uma perturbação que se desloca sem mudar de forma.

Para uma observador que se desloca na direção x com a mesma velocidade do pulso, a forma do pulso não muda com o tempo. Na figura seguinte é mostrado o referencial $O'x'y'$ deste observador, o qual coincide com Oxy em $t = 0$.



ou seja,

$$y'(x',t) = y'(x',0) \equiv f(x') \tag{1.2.1}$$

A função $f(x')$ descreve a forma *estática* do pulso, como vista pelo observador O'. Levando em conta que $y'(x',t) = y(x,t)$ e $x' = x - vt$ (transformação de Galileu na direção x), obtemos

$$y(x,t) = f(x - vt) \tag{1.2.2}$$

Portanto a onda progressiva se propagando para a direita é uma função que depende de x e t somente através de $x' = x - vt$, podendo ser *uma função qualquer* de x'. Analogamente, uma onda se propagando para a esquerda será uma função de $x + vt$.

1.2.2 Obtenção da Solução de d'Alembert

Uma conseqüência imediata de $y(x,t) = f(x - vt)$ é que a *Equação de Ondas* (**verifique**)

$$\boxed{\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0} \tag{1.2.3}$$

é satisfeita. Mais adiante mostraremos como essa equação pode ser derivada a partir das propriedades mecânicas de uma corda. Neste caso, $y(x,t)$ representaria a deformação da corda na direção perpendicular à corda.

Nesta seção veremos como obter a solução da equação de onda (1.2.3). Para isso, primeiramente notamos que a equação (1.2.3) pode ser reescrita como (**verifique**)

$$\left(\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) y(x,t) = 0. \tag{1.2.4}$$

Essa forma sugere que façamos uma mudança para novas variáveis u^+ e u^-, tais que

$$\begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{u^+ + u^-}{2} \\ t & = & \dfrac{u^+ - u^-}{2v} \end{array} . \tag{1.2.5}$$

ou, invertendo as equações,

$$\begin{array}{rcl} u^+ & = & x + vt \\ u^- & = & x - vt \end{array} . \tag{1.2.6}$$

Substituindo a regra da cadeia,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial u^+}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u^+} + \frac{\partial u^-}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u^-} = \frac{\partial}{\partial u^+} + \frac{\partial}{\partial u^-} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial u^+}{\partial t}\frac{\partial}{\partial u^+} + \frac{\partial u^-}{\partial t}\frac{\partial}{\partial u^-} = v\frac{\partial}{\partial u^+} - v\frac{\partial}{\partial u^-} \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

na equação (1.2.4), obtemos (**verifique**)

$$-4\frac{\partial^2}{\partial u^- \partial u^+} y(u^+, u^-) = 0. \tag{1.2.8}$$

Integrando na variável u^-,

$$\frac{\partial}{\partial u^+} y(u^+, u^-) = G(u^+). \tag{1.2.9}$$

Note que $G(u^+)$ é uma função qualquer que depende apenas de u^+. Integrando na variável u^+,

$$y(u^+, u^-) = f(u^-) + g(u^+), \tag{1.2.10}$$

onde $\partial g(u^+)/\partial u^+) = G(u^+)$ e f só depende de u^-. Voltando para as variáveis x e t, a equação acima nos dá

$$y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt). \tag{1.2.11}$$

Essa é a solução geral de d'Alembert.

Solução geral em termos de condições iniciais

Consideremos as *condições iniciais* de posição e de velocidade dadas por

$$\begin{aligned} y(x,0) &= y_0(x) \\ \left.\frac{\partial y}{\partial t}(x,t)\right|_{t=0} &= y_1(x) \end{aligned} . \tag{1.2.12}$$

A primeira condição nos informa qual é a *forma inicial* da corda. A segunda condição nos informa qual é a *velocidade inicial* de todos os pontos da corda.

É interessante comparar as condições iniciais da corda com aquelas de uma partícula. Note que na dinâmica de uma partícula as condições iniciais são a *posição da partícula* e a *velocidade da partícula*. Ou seja, no caso de uma partícula as condições iniciais são a posição e a velocidade de um ponto; no caso de uma onda unidimensional, as condições iniciais são a posição e a velocidade dos infinitos pontos de uma linha.

Como a equação de onda é de segunda ordem na derivada temporal, as duas funções $y_0(x)$ e $y_1(x)$ devem especificar completamente a evolução subseqüente. De fato, já sabemos, de acordo com a equação (1.2.11), que a solução geral deve depender de duas funções quaisquer. Podemos agora expressar, em $t = 0$, as funções $f(x)$ e $g(x)$ em termos das *condições iniciais* em (1.2.12). De fato, usando (1.2.11) em (1.2.12), obtemos

$$\begin{aligned} y(x,0) &= f(x) + g(x) = y_0(x) \\ \left.\frac{\partial y}{\partial t}(x,t)\right|_{t=0} &= v\left(\frac{dg}{dx} - \frac{df}{dx}\right) = y_1(x) \end{aligned} . \tag{1.2.13}$$

Integrado a segunda equação,

$$\begin{array}{rcl} y_0(x) & = & f(x)+g(x) \\ \int_a^x y_1(s)\mathrm{d}s & = & v\left(g(x)-f(x)\right) \end{array}, \tag{1.2.14}$$

onde a é uma constante qualquer. Resolvendo para $f(x)$ e $g(x)$

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \frac{1}{2}\left(y_0(x)-\frac{1}{v}\int_a^x y_1(s)\mathrm{d}s\right) \\ g(x) & = & \frac{1}{2}\left(y_0(x)+\frac{1}{v}\int_a^x y_1(s)\mathrm{d}s\right) \end{array}. \tag{1.2.15}$$

Essas duas relações determinam completamente as funções $f(x)$ e $g(x)$ em termos das condições iniciais y_0 e y_1. Usando agora a equação (1.2.11), obtemos finalmente (**verifique**)

$$\boxed{y(x,t)=\frac{1}{2}y_0(x+vt)+\frac{1}{2}y_0(x-vt)+\frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} y_1(s)\mathrm{d}s}. \tag{1.2.16}$$

(Observe que a constante de integração a é cancelada na soma das duas integrais em (1.2.15), levando em conta que $-\int_a^{x-vt} y_1(s)\mathrm{d}s=\int_{x-vt}^a y_1(s)\mathrm{d}s$.) Verifique explicitamente que esta solução satisfaz a equação de onda e as condições iniciais.

Exemplos

- Considere o seguinte exemplo de condição inicial

$$y_1(x)=\pm v\frac{dy_0}{dx}. \tag{1.2.17}$$

  Podemos mostrar que neste caso teremos uma onda se propagando para esquerda ou para a direita. De fato,

$$\frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} y_1(s)\mathrm{d}s=\pm\frac{1}{2}\int_{x-vt}^{x+vt}\frac{dy_0}{ds}\mathrm{d}s=\pm\frac{1}{2}\int_{y_0(x-vt)}^{y_0(x+vt)} dy_0=\pm\frac{1}{2}\left(y_0(x+vt)-y_0(x-vt)\right). \tag{1.2.18}$$

  Substituindo na equação (1.2.16) obtemos

$$y(x,t)=y_0(x\pm vt). \tag{1.2.19}$$

- Determine, para qualquer instante de tempo, a forma de uma corda tal que no instante inicial

$$y_0=A\exp(-x^2/L^2) \tag{1.2.20}$$

  e $y_1=0$.

  Exercício:
  Um pulso ondulatório produzido numa corda tem a forma dada por

$$y_d(x,t)=\frac{A^3}{A^2+(x-vt)^2}, \tag{1.2.21}$$

onde $A=1,00$ cm e $v=20,0$ m/s.

(a) Faça um desenho do pulso ondulatório em função de x para $t = 0$. Até que ponto ao longo da corda o pulso se estende?

(b) Faça um desenho do pulso para $t = 0,001$s.

(c) No ponto $x = 4,50$ cm, para que tempo t o deslocamento é máximo, e para quais valores de t esse deslocamento é a metade do valor máximo?

(d) Mostre que a função acima é uma função de onda.

(e) Responda os ítens acima para a função

$$y_e(x,t) = \frac{A^3}{A^2 + (x+vt)^2} \tag{1.2.22}$$

e também para a combinação $y_d(x,t) + y_e(x,t)$.

(f) Verifique explicitamente que $y_d(x,t)$ satisfaz a solução de d'Alembert (1.2.16).

1.2.3 Soluções harmônicas

Uma classe de soluções particulares, porém de interesse bastante geral, são as *soluções harmônicas* da forma

$$y(x,t) = \Re\left[A\mathrm{e}^{i(kx-\omega t+\delta)}\right], \tag{1.2.23}$$

onde k, ω e δ são constantes reais, $i = \sqrt{-1}$ e $\Re$ denota a *parte real*. A constante real A é a *amplitude da onda*. A seguir veremos qual é o significado físico de cada uma destas grandezas.

Sabemos que, segundo a fórmula de Euler,

$$y(x,t) = \Re\left[A\cos(kx-\omega t+\delta) + A\mathrm{sen}(kx-\omega t+\delta)\right] = A\cos(kx-\omega t+\delta). \tag{1.2.24}$$

Embora pudéssemos ter escrito diretamente em termos do cos, há, como veremos, vantagens em se utilizar a exponencial complexa.

Naturalmente deve existir uma relação entre k e ω para que (1.2.23) seja de fato uma solução da equação de onda. Substituindo (1.2.23) em (1.2.3), obtemos **verifique**

$$\boxed{\omega = kv}. \tag{1.2.25}$$

Interpretação de ω e k

Em uma dada posição do espaço (x fixo), o valor da função $y(x,t)$ em (1.2.24) se repete após um intervalo de tempo igual a $2\pi/\omega$. Esse intervalo de tempo é denominado *período*

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{1.2.26}$$

Analogamente, em um dado instante de tempo (t fixo) o valor da função $y(x,t)$ em (1.2.24) se repete após um intervalo de distância igual a $2\pi/k$. Esse intervalo é denominado *comprimento de onda*

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \tag{1.2.27}$$

Usando essas relações, podemos reescrever (1.2.25) como

$$v = \frac{\lambda}{\tau} = \lambda\nu, \tag{1.2.28}$$

onde $\nu = 1/\tau$ é a *freqüência* da onda.

As grandezas k e ω são denominadas *número de onda* e *freqüência angular*, respectivamente.

Fase da onda

A grandeza

$$\phi(x,t) = kx - \omega t + \delta \tag{1.2.29}$$

é a *fase* da onda, sendo que δ é a *constante de fase*. Se acompanharmos um ponto tal que a fase é constante, i.e., $\phi(x,t) = \phi_0 = constante$, teremos

$$\frac{d\phi}{dt} = k\frac{dx}{dt} - \omega = 0, \tag{1.2.30}$$

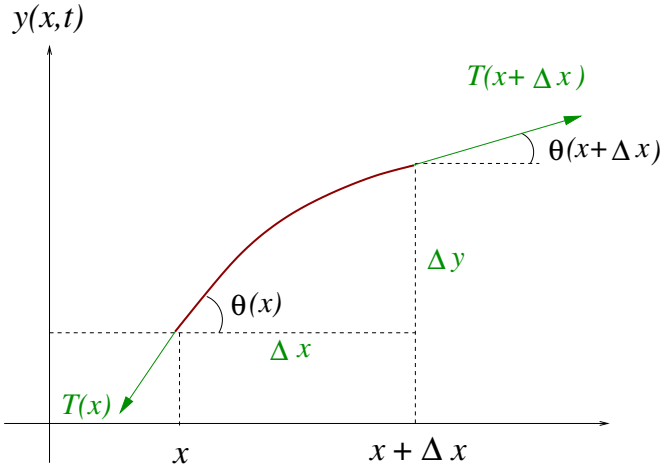
ou seja,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v. \tag{1.2.31}$$

Portanto, um ponto de fase constante se desloca com a velocidade da onda.

1.3 Equação da corda vibrante

Até aqui, ainda não exibimos um sistema físico que obedeça a equação (1.2.3). Faremos isso agora considerando uma corda distendida possuindo uma densidade de massa linear $\mu(x)$ e tensionada por uma tensão $T(x)$ que não varia com o tempo. Vamos supor a situação idealizada de uma *corda inextensível* sujeita a *pequenas deformações*. Nestas condições o ângulo formado pelas retas tangentes à corda e o eixo x, ou seja, o ângulo θ na figura



é muito pequeno.

1.3.1 Derivação da equação de onda

A força resultante que atua sobre o trecho de corda mostrado na figura acima é (não estamos considerando o pequeno efeito da força peso)

$$F_R = T(x+\Delta x)\text{sen}(\theta(x+\Delta x)) - T(x)\text{sen}(\theta(x)). \tag{1.3.1}$$

Para ângulos pequemos, podemos fazer a aproximação

$$\text{sen}(\theta) \approx \tan(\theta) = \frac{\partial y}{\partial x}. \tag{1.3.2}$$

Substituindo (1.3.1) em (1.3.2), teremos

$$F_R = T(x+\Delta x)\frac{\partial y}{\partial x}(x+\Delta x,t) - T(x)\frac{\partial y}{\partial x}(x,t). \tag{1.3.3}$$

Usando a noção básica de derivada de uma função

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \tag{1.3.4}$$

a força resultante em (1.3.4), para $\Delta x \to 0$ será

$$F_R = \left(T(x)+\Delta x\frac{\partial T}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}+\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) - T(x)\frac{\partial y}{\partial x} = \left(T(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}\right)\Delta x, \tag{1.3.5}$$

onde foram desprezados os termos de ordem Δx^2. Essa força produz a aceleração do pequeno trecho da corda cuja massa é

$$\Delta m = \mu(x)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} \approx \mu(x)\Delta x, \tag{1.3.6}$$

onde usamos novamente a condição de ângulos pequenos, de modo que $\Delta y \ll \Delta x$. De acordo com a *Segunda Lei de Newton* ($F_R = \Delta m\partial^2 y/\partial t^2$) teremos, usando (1.3.5) e (1.3.6),

$$\left(T(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}\right)\Delta x = \mu(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\Delta x. \tag{1.3.7}$$

Cancelando Δx, obtemos

$$T(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} = \mu(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{1.3.8}$$

Nos casos mais simples (e.g., uma corda de densidade uniforme, distendida sob a ação de uma tensão T independente de x) a equação (1.3.8) se reduz a

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0}. \tag{1.3.9}$$

Velocidade de propagação da onda

Comparando (1.3.9) com (1.2.3), vemos que a corda se movimenta segundo a equação de onda, e que a velocidade de propagação das ondas é

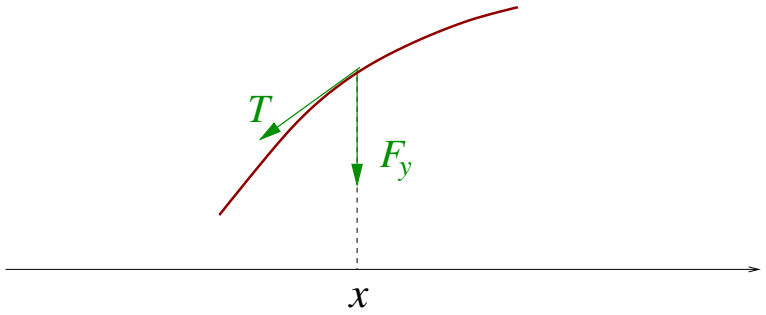
$$\boxed{v=\sqrt{\frac{T}{\mu}}}. \tag{1.3.10}$$

Esta bela equação relaciona as propriedades intrínsecas do meio (tensão e densidade) com a velocidade da onda. Quanto mais tensa for a corda, maior será a velocidade da onda. Aumentando a densidade da corda a velocidade da onda diminui. É interessante usar o conteúdo físico essencial desta relação para inferir resultados em situações mais gerais, tais como o *som*. Veremos que, essencialmente, no caso do som, T e μ são substituídos respectivamente pela pressão de equilíbrio e pela densidade de equilíbrio. No caso em que o meio possui elasticidade compressiva *e* de cisalhamento, as ondas associadas (longitudinal para a compressiva e transversal para o cisalhamento) terão, em geral, velocidades distintas. Sabe-se que no caso de ondas sísmicas, as oscilações longitudinais compressivas são mais rápidas do que as ondas transversais de cisalhamento. A partir deste fato, podemos tirar conclusões sobre a elasticidade de cisalhamento relativamente a elasticidade de compressão [1]

[1] Existem ainda mais dois tipos de oscilações sísmicas, a saber, as superficiais e as *ondas de Rayleigh*.

1.3.2 Intensidade da onda

Para produzir oscilações na corda é preciso *fornecer energia* (por exemplo, um oscilador é ligado a uma das extremidades da corda). Na figura abaixo é mostrada a componente vertical da força, realizando trabalho sobre um pedaço da corda.



Para pequenas deflexões da corda, podemos escrever

$$F_y = -T\frac{\partial y}{\partial x}. \tag{1.3.11}$$

A *potência* transmitida é o produto da força pela velocidade, ou seja,

$$P(x,t) = F_y\frac{\partial y}{\partial t} = -T\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}. \tag{1.3.12}$$

No caso de uma onda progressiva se propagando para a direita ($y(x,t) = f(x-vt)$), teremos (**verifique**),

$$P(x,t) = Tv\left(\frac{df}{du^-}\right)^2; \quad u^- = x - vt. \tag{1.3.13}$$

Note que na expressão acima Tv já tem a dimensão correta de potência.

Caso a onda progressiva seja harmônica, como na equação (1.2.23), então a equação (1.3.13) nos dá

$$P(x,t) = TvA^2k^2\text{sen}^2(kx - \omega t + \delta). \tag{1.3.14}$$

Tomando a média temporal da equação acima,

$$\overline{P} = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} P(x,t')\mathrm{d}t', \tag{1.3.15}$$

obtemos (**verifique**)

$$\overline{P} = \frac{TvA^2k^2}{2}. \tag{1.3.16}$$

A potência média da onda unidimensional é também denominada *intensidade da onda* ou seja,

$$I = \overline{P} = \frac{TvA^2k^2}{2}. \tag{1.3.17}$$

Usando $v = \omega/k$,

$$I = \frac{T\omega kA^2}{2}. \tag{1.3.18}$$

De acordo com a relação (1.3.10) podemos expressar T em termos de μ e v, levando a

$$I = \frac{\mu v^2 \omega k A^2}{2}. \tag{1.3.19}$$

Podemos ainda usar, novamente, $vk = \omega$ e obter

$$\boxed{I = \tfrac{1}{2}\mu v \omega^2 A^2}. \tag{1.3.20}$$

Portanto, a intensidade transmitida pela onda harmônica é proporcional ao quadrado da amplitude, ao quadrado da freqüência e à velocidade de propagação.

Consideremos agora a energia contida na onda. Um pedaço dx da corda possui *energia cinética*

$$d\mathcal{T} = \frac{1}{2} dm \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx. \tag{1.3.21}$$

Portanto, a *densidade linear de energia cinética* é

$$\frac{d\mathcal{T}}{dx} = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2. \tag{1.3.22}$$

Considerando o caso de uma onda harmônica de amplitude A e freqüência ω, e tomando a média temporal, teremos

$$\overline{\frac{d\mathcal{T}}{dx}} = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2. \tag{1.3.23}$$

Note que o fator 1/2 extra vem da média do quadrado do seno.

A *energia potencial* de dx é (lembrando que dx executa um movimento harmônico simples)

$$dU = \frac{1}{2} dm \omega^2 y^2 = \frac{1}{2}\mu\omega^2 y^2 dx. \tag{1.3.24}$$

Portanto, a *densidade de energia potencial* é

$$\frac{dU}{dx} = \frac{1}{2} dm \omega^2 y^2 = \frac{1}{2}\mu\omega^2 y^2. \tag{1.3.25}$$

Tomando a média temporal, como no caso de energia cinética, teremos

$$\overline{\frac{dU}{dx}} = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2 \tag{1.3.26}$$

(neste caso, o fator extra de 1/2 vem da média do quadrado do coseno). Note que, que a média da energia potencial é igual à média da energia cinética em (1.3.23). Esse resultado já foi obtido anteriormente, quando estudamos o movimento harmônico simples. Somando (1.3.23) com (1.3.26), obtemos a *densidade de energia média total*

$$\overline{\frac{dE}{dx}} = \overline{\frac{d\mathcal{T}}{dx}} + \overline{\frac{dU}{dx}} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2. \tag{1.3.27}$$

Podemos agora relacionar a densidade de energia com a potência transmitida pela onda. A energia média contida em um elemento Δx da corda é

$$\overline{\Delta E} = \overline{\frac{dE}{dx}\Delta x}. \tag{1.3.28}$$

Como a onda percorre um intervalo $\Delta x = v\Delta t$ durante um intervalo de tempo Δt, a potência média transportada será

$$\overline{P} = \overline{\frac{\Delta E}{\Delta t}} = \overline{\frac{dE}{dx}}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \overline{\frac{dE}{dx}}v. \tag{1.3.29}$$

Essa potência dever ser igual à (1.3.17). De fato, podemos verificar isso usando (1.3.27). Assim, comparando (1.3.17) com (1.3.29), vemos que

$$I = v\overline{\frac{dE}{dx}}. \tag{1.3.30}$$

Ou seja, a intensidade é igual ao produto da velocidade pela densidade de energia média. Esse resultado nos informa que a intensidade é o *fluxo médio de energia* através de um ponto. *Fluxo através de um ponto?*. Pense um pouco sobre isso e tente "adivinhar" qual seria a generalização de (1.3.29) para ondas em três dimensões. Note que no caso tridimensional o conceito de fluxo é o usual (energia por unidade de área por unidade de tempo).

Exercício:

Uma corda está atada por uma extremidade a um ponto fixo. A outra extremidade passa por uma roldana que se encontra a 5 m da extremidade fixa, e segura uma carga de 2 kg. A massa do segmento de corda entre a extremidade fixa e a roldana é de 0.6 kg.

(a) Determine a velocidade de propagação das ondas transversais ao longo da corda.

(b) Suponha que uma onda harmônica de 10^{-3} m de amplitude e 0.3 m de comprimento de onda se propaga pela corda; calcule a velocidade transversal máxima de qualquer ponto da corda.

(c) Determine a taxa média de fluxo de energia (potência média) através de qualquer seção da corda.

1.3.3 Princípio de Superposição

Suponha que $y_1(x,t)$ e $y_2(x,t)$ sejam duas soluções quaisquer da equação de onda (1.2.3), ou seja,

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = 0 \tag{1.3.31}$$

e

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} = 0. \tag{1.3.32}$$

Então,

$$y(x,t) = ay_1(x,t) + by_2(x,t), \tag{1.3.33}$$

com a e b constantes, também é solução de (1.2.3).

Exercício: Prove a afirmação do parágrafo anterior.

Esse importante resultado denomina-se *Princípio de Superposição* e é válido em outros campos da Física tais como a Mecânica Quântica ou o Eletromagnetismo. Matematicamente é uma conseqüência direta da *linearidade* da equação de ondas. A linearidade significa que não existem termos na equação do tipo $y(x,t)^2$, ou $\sqrt{y(x,t)}$, ou $\cos(y(x,t))$, etc, dentre inúmeras possibilidades.

No exemplo da seção anterior (corda vibrante) foram omitidos termos de ordem superior em $\theta(x)$ que são muito pequenos para pequenas deflexões da corda. Para se ter uma idéia do grau de

não linearidade que teríamos no regime em que essa aproximação não pode ser usada, escrevemos abaixo a equação exata (com μ e T independentes de x)

$$\mu\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\cos(\theta(x,t))\frac{\partial \theta}{\partial x}. \tag{1.3.34}$$

(**verifique**) onde

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}} \tag{1.3.35}$$

e

$$\theta(x) = \tan^{-1}\frac{\partial y}{\partial x}. \tag{1.3.36}$$

A partir da relação acima, podemos obter o termo seguinte da expansão de pequenos ângulos. Fazendo a expansão em série e mantendo o termo de segunda ordem, obtem-se

$$\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\left[1-2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right] \tag{1.3.37}$$

Obviamente, já neste caso, o princípio de superposição deixaria de ser válido. De fato, o termo proporcional ao quadrado da derivada de $y(x,t)$ é não linear.

1.4 Interferência de ondas

Vamos agora aplicar o princípio de superposição, para estudar os efeitos resultantes de adição de ondas. Primeiramente vamos considerar os casos em que as ondas possuem a mesma freqüência e, conseqüentemente, o mesmo número de onda.

1.4.1 Duas ondas no mesmo sentido

Consideremos duas ondas harmônicas

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1(x,t) &=& A_1\Re\exp[i(kx-\omega t+\delta_1)] = A_1\cos(kx-\omega t+\delta_1) \\ y_2(x,t) &=& A_2\Re\exp[i(kx-\omega t+\delta_2)] = A_2\cos(kx-\omega t+\delta_2) \end{array}\right. . \tag{1.4.1}$$

Ou seja, duas ondas se propagando para a direita com velocidade $v=\omega/k$, amplitudes A_1 e A_2 e constantes de fase δ_1 e δ_2. De acordo com o princípio de superposição

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) \tag{1.4.2}$$

também é uma solução da equação da corda. Vejamos agora qual é a forma desta solução resultante. Fatorizando uma das exponenciais, (**verifique**)

$$y = y_1 + y_2 = \Re\left[\exp[i(kx-\omega t+\delta_1)]\underbrace{(A_1 + A_2\exp(i\delta_{12}))}_{\equiv Z}\right], \tag{1.4.3}$$

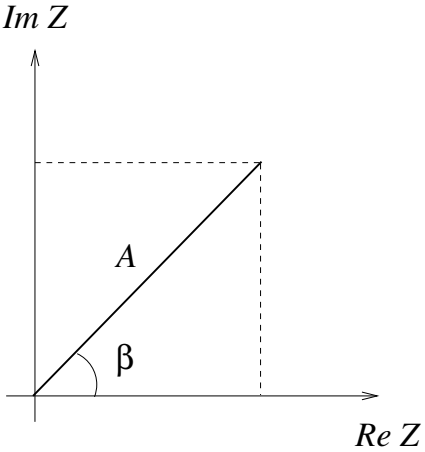
onde introduzimos a *diferença de fase*

$$\delta_{12} = \delta_2 - \delta_1. \tag{1.4.4}$$

O número complexo $Z \equiv (A_1 + A_2 \exp(i\delta_{12}))$ pode ser reescrito na forma polar, como

$$Z = A\exp(i\beta) = A(\cos(\beta) + i\text{sen}(\beta)) \tag{1.4.5}$$

com A e β reais. A é o *módulo* de Z. Logo, de acordo com a figura abaixo,



$$\begin{aligned} |Z|^2 = A^2 &= (\Re Z)^2 + (\Im Z)^2 = (A_1 + A_2\cos(\delta_{12}))^2 + (A_2\text{sen}(\delta_{12}))^2 \\ &= A_1^2 + 2A_1A_2\cos(\delta_{12}) + A_2^2\cos^2(\delta_{12}) + A_2^2\text{sen}^2(\delta_{12}) \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\delta_{12}). \end{aligned} \tag{1.4.6}$$

Portanto

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\delta_{12})}} \tag{1.4.7}$$

O ângulo β indicado na figura acima é

$$\beta = \arctan\left(\frac{\Im Z}{\Re Z}\right) = \arctan\left(\frac{A_2\text{sen}(\delta_{12})}{A_1 + A_2\cos(\delta_{12})}\right). \tag{1.4.8}$$

Portanto, a combinação das duas ondas resulta em

$$y = y_1 + y_2 = A\cos(kx - \omega t + \delta_1 + \beta). \tag{1.4.9}$$

Note que A em (1.4.6) é a *amplitude da onda resultante* a qual possui freqüência ω. Sendo assim, podemos obter a intensidade dessa onda, usando (1.3.20)

$$I = \frac{1}{2}\mu v\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\mu v\omega^2 A_1^2 + \frac{1}{2}\mu v\omega^2 A_2^2 + \frac{1}{2}\mu v\omega^2 2A_1A_2\cos(\delta_{12}). \tag{1.4.10}$$

Como as ondas y_1 e y_2 também possuem freqüência ω, podemos escrever

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}\cos(\delta_{12})}. \tag{1.4.11}$$

Esta relação mostra um dos mais importantes fenômenos ondulatórios. Ele revela que a intensidade resultante pode ser diferente da soma das duas intensidades associadas a cada onda. Devido ao último termo em (1.4.11) pode ocorrer até mesmo uma *interferência destrutiva*. Por exemplo, considerando o caso em que as duas ondas possuem a mesma amplitude, teríamos $I_1 = I_2$, resultando em uma amplitude resultante igual a $2I_1(1 + \cos(\delta_{12})$. Portanto, se a diferença de fase for $\delta_{12} = \pi$, essa amplitude resultante se anula.

Exercício: Faça o exercício 6 do capítulo 5 do HMN.

Exercício: Mostre que as amplitudes resultantes máxima e mínima são, respectivamente, $(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$ e $(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$. Determine os correspondentes valores de δ_{12}.

1.4.2 Duas ondas em sentidos opostos – *Ondas Estacionárias I*

Neste caso, as duas ondas componentes são

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1(x,t) & = & A_1 \Re\text{exp}[i(kx - \omega t + \delta_1)] = A_1 \cos(kx - \omega t + \delta_1) \\ y_2(x,t) & = & A_2 \Re\text{exp}[i(kx + \omega t + \delta_2)] = A_2 \cos(kx - \omega t + \delta_2) \end{array} \right. . \tag{1.4.12}$$

Ou seja, a onda y_2 está se propagando para a esquerda. Vamos primeiramente considerar o caso mais simples em que $\delta_1 = \delta_2 = 0$ e $A_1 = A_2$. Neste caso, a onda resultante será

$$y = y_1 + y_2 = A(\cos(kx - \omega t) + \cos(kx + \omega t)) = 2A\cos(kx)\cos(\omega t). \tag{1.4.13}$$

Essa relação mostra que a superposição das duas ondas resulta em uma função de x e t que *não* descreve uma onda se propagando. Em qualquer instante de tempo, teremos sempre uma forma do tipo $\cos(kx)$, mudando apenas a "amplitude" ($2A\cos(\omega t)$) para tempos distintos. Temos assim uma *onda estacionária*.

Há pontos na corda que se mantém sempre na posição $y(x,t) = 0$. Tais pontos são denominados *nodos*. Por outro lado, os pontos de maior amplitude são denominados *ventres*.

1.4.3 Batimentos – Velocidade de Grupo

Vamos agora considerar o caso em que as duas ondas componentes, y_1 e y_2, estão se propagando na mesma direção, possuem a mesma amplitude, mas suas freqüências e números de onda são diferentes. Ou seja

$$y_1(x,t) = A\cos(k_1 x - \omega_1 t) \quad \text{e} \quad y_2(x,t) = A\cos(k_2 x - \omega_2 t). \tag{1.4.14}$$

Usando a relação trigonométrica dada em (D.3.6) (**demonstre essa relação**) e introduzindo as grandezas

$$\begin{array}{rcl} \bar{k} & \equiv & \dfrac{k_1 + k_2}{2} \\ \bar{\omega} & \equiv & \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2} \\ \Delta k & \equiv & k_1 - k_2 \\ \Delta\omega & \equiv & \omega_1 - \omega_2 \end{array} \tag{1.4.15}$$

obtemos

$$y(x,t) = \mathcal{A}(x,t)\cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t), \tag{1.4.16}$$

onde

$$\mathcal{A}(x,t) = 2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right). \tag{1.4.17}$$

Vejamos o que está ocorrendo em uma dada posição x; por exemplo, em $x = 0$. Um caso interessante ocorre quando as duas freqüências são muito próximas. Por exemplo, quando $\omega_1 \approx \omega_2$. Neste caso, teremos uma oscilação harmônica de freqüência $\bar{\omega} \approx \omega_1 \approx \omega_2$, *modulada* por uma amplitude cuja freqüência de modulação é relativamente pequena $\omega_1 - \omega_2$ (note que a freqüência de modulação é o dobro de $\Delta\omega/2$, pois estamos falando da modulação de intensidade). Esse é o fenômeno de *batimentos*, ou seja, de uma oscilação da intensidade da onda com freqüência bem menor que a freqüência da própria onda.

Exemplo: Um músico está afinando seu instrumento de corda com o auxílio de um diapasão que emite uma freqüência de 440 Hz. Quando o som da corda é produzido juntamente com o som do diapasão, a *intensidade máxima* dos batimentos ouvidos se repete a cada $0,5\,s$. Determine o ajuste percentual que deve ser feito na tensão da corda de modo a afiná-la.

Solução: A intensidade é, como sabemos, proporcional ao quadrado da amplitude. De acordo com a equação (1.4.17), o máximo do quadrado da amplitude se repete em intervalos de

$$\frac{1}{2}\frac{2\pi}{\frac{\Delta\omega}{2}} = \frac{1}{\Delta\nu}.$$

Como o afinador ouve os máximos a cada $0,5\,s$, teremos

$$\Delta\nu = 2\,s^{-1}.$$

Essa é a diferença entre a freqüência da corda e a freqüencia do diapasão.

Podemos agora calcular a correspondente diferença de tensão entre a corda afinada (concordância com o diapasão) e a corda desafinada. Usando a equação (1.3.10), e também a relação $v = \lambda\nu$, teremos

$$\nu = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Portanto (note que o comprimento de onda é fixado pelo comprimento da corda, supondo o modo fundamental),

$$\Delta\nu = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{1}{\mu}}\frac{1}{2}(T)^{-1/2}\Delta T.$$

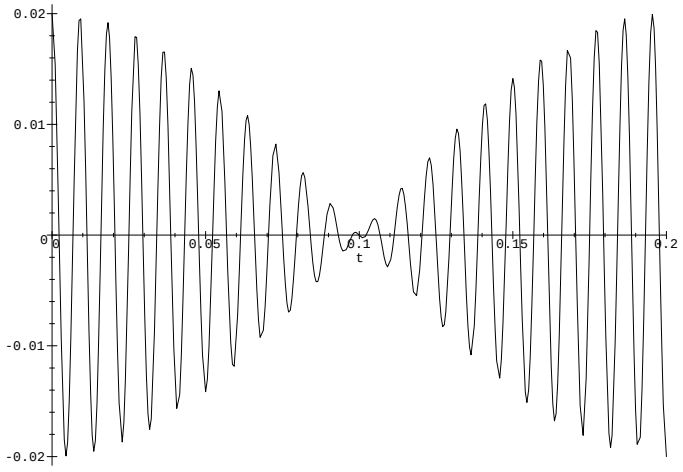
Fazendo a razão entre as duas últimas equações, teremos

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{1}{2}\frac{\Delta T}{T}.$$

Como vimos acima, $\Delta\nu = 2\,s^{-1}$. Logo,

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{4}{440} = \frac{1}{110} \approx 0,91\,\%.$$

A figura seguinte mostra um exemplo com os seguintes valores para as grandezas que aparecem na Eq. (1.4.16): $A = 1$ cm, $x = 0$, $\bar{\omega} = (2\pi)110$ Hz e $\Delta\omega = (2\pi)10$ Hz.



Exercício: Utilize seus recursos computacionais para obter os gráficos correspondentes a outros valores dos parâmetros.

A fase da onda modulada é

$$\phi(x,t) = \bar{k}x - \bar{\omega}t. \tag{1.4.18}$$

Portanto, a velocidade de fase é

$$v_\phi = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}}. \tag{1.4.19}$$

A *envoltória* da onda possui fase $\Delta k x - \Delta\omega t$. Logo, a velocidade com que um ponto da envoltória se move é

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \approx \frac{d\omega}{dk}. \tag{1.4.20}$$

Esta última é a *velocidade de grupo*, ou seja, a velocidade com que se desloca um grupo de ondas.

Vemos que nos casos em que a freqüência ω é uma função linear de k, a velocidade de grupo coincide com a velocidade de fase. Esse é o caso das ondas que se propagam na corda. Há no entanto outros fenômenos ondulatórios, para os quais a velocidade de fase depende do comprimento de onda, de modo que

$$\omega = k v_\phi(k) \tag{1.4.21}$$

resultando em uma velocidade de grupo

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v_\phi + k\frac{dv_\phi}{dk} \neq v_\phi. \tag{1.4.22}$$

Quando isso ocorre, temos o fenômeno de *dispersão*. É o caso, por exemplo, das *ondas eletromagnéticas* (luz) em meios materiais.

Exercício:

Na Mecânica Quântica, teoria que descreve a física microscópica, a onda associada a uma partícula livre obedece a seguinte relação de dispersão:

$$\omega = \frac{\hbar}{2m}k^2, \tag{1.4.23}$$

onde m é a massa da partícula e $\hbar = 1,05 \times 10^{-34} Js$ é a "constante de Planck".

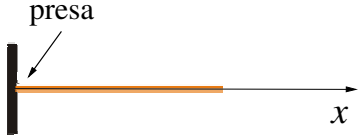
(a) Verifique as dimensões da equação acima.

(b) Determine as velocidades de grupo e de fase.

1.5 Reflexão de ondas

1.5.1 Extremidade fixa

Consideremos uma onda qualquer, *se propagando para a esquerda*, em uma corda que possui sua extremidade esquerda presa em $x = 0$, como ilustrado na figura abaixo



Temos agora uma situação tal que, pela primeira vez, o problema envolve informação sobre a *extremidade da corda*. Esse tipo de informação denomina-se *condição de contorno*. Matematicamente, a solução da equação de onda é

$$y(x,t) = g(x+vt) \ \textbf{antes de atingir a extremidade}. \tag{1.5.1}$$

Já sabemos que a solução geral é

$$y(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt). \tag{1.5.2}$$

Portanto, $f = 0$ antes de atingir $x = 0$. A condição de contorno "corda presa na origem" significa matematicamente que

$$y(0,t) = 0. \tag{1.5.3}$$

Substituindo (1.5.2) em (1.5.3), obtemos a seguinte relação entre a função conhecida f e a desconhecida g

$$f(-vt) = -g(vt). \tag{1.5.4}$$

Como o tempo t é qualquer, esta condição determina completamente a função f

$$f(x-vt) = -g(-x+vt). \tag{1.5.5}$$

Substituindo (1.5.5) em (1.5.2), obtemos a solução

$$y(x,t) = \underbrace{g(x+vt)}_{\text{para esquerda}} - \underbrace{g(-x+vt)}_{\text{para direita}}. \tag{1.5.6}$$

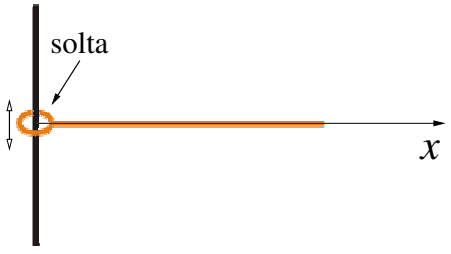
Isso resolve completamente o problema, visto que a função g é conhecida.

Matematicamente, a solução (1.5.6) representa dois pulsos se propagando em sentidos opostos. Isso inclui um pulso vindo da esquerda para a direita, na região $x < 0$, *antes da chegada em* $x = 0$. Quando os dois pulsos se encontram, em $x = 0$, temos $y(0,t) = 0$. Posteriormente, o pulso da direita para a esquerda "continua" se propagando para a região $x < 0$ e o pulso da esquerda para a direita continua seu trajeto para a direita. Naturalmente, a região $x < 0$ não existe fisicamente.

É importante notar que o *pulso refletido* volta com o sinal oposto do *pulso incidente* (uma defasagem de π,i.e., o pulso refletido volta multiplicado pelo fator de fase $\exp(-i\pi)$). Isso ocorre porque o suporte que está fixando a corda em $x = 0$ aplica uma *força de reação à corda* que é igual e oposta (terceira lei de Newton) à força aplicada pela corda.

1.5.2 Extremidade livre

Há também a possibilidade de que a corda simplesmente "começe" em $x = 0$, sem que tenha seu movimento vertical restrito neste ponto, como mostra a figura abaixo.



Neste caso, a única força que atua sobre a corda em $x = 0$ é a própria tensão T, que é horizontal. Isso nos dá a condição

$$F_y(0,t) = -T\frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = 0 \tag{1.5.7}$$

Levando esta condição na solução geral (1.5.2), teremos

$$\frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = f'(-vt) + g'(vt) = 0. \tag{1.5.8}$$

Essa condição é satisfeita por

$$f(x - vt) = g(-x + vt). \tag{1.5.9}$$

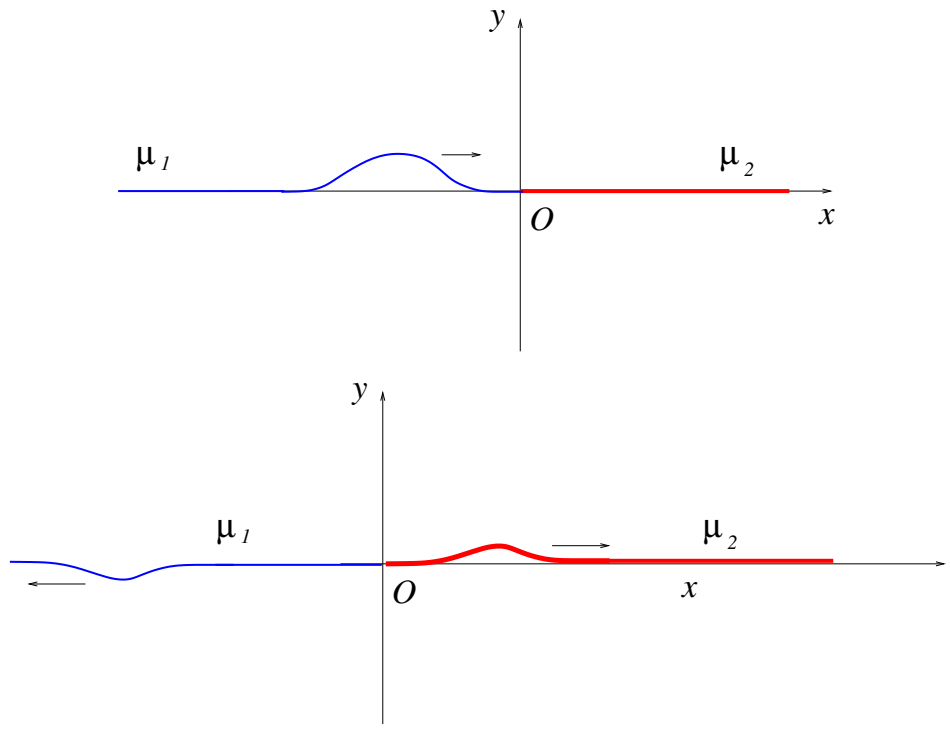
Portanto a solução tem a forma

$$y(x,t) = \underbrace{g(x+vt)}_{\text{para esquerda}} + \underbrace{g(-x+vt)}_{\text{para direita}}. \tag{1.5.10}$$

Vemos que neste caso o pulso refletido não muda de fase.

1.5.3 Reflexão em um ponto de junção

A experiência mostra que um pulso que se propaga em uma corda é parcialmente refletido e parcialmente transmitido em um ponto de junção. As duas figuras abaixo representam possíveis configurações da corda antes e depois da passagem de um pulso pelo ponto $x = 0$.



Consideremos uma corda possuindo densidade μ_1 para $x < 0$ e μ_2 para $x \geq 0$. A tensão em toda a extensão da corda é T. Inicialmente é produzida uma onda progressiva para a direita que irá passar pelo ponto de junção em $x = 0$ e possui a forma

$$y_i(x,t) = f(x - v_1 t); \quad x < 0; \quad v_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}} \tag{1.5.11}$$

Ao atingir o ponto de junção, teremos, em geral, uma *onda refletida*

$$y_r(x,t) = g(x + v_1 t); \quad x < 0; \quad v_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}} \tag{1.5.12}$$

e uma *onda transmitida* para $x \geq 0$

$$y_t(x,t) = h(x - v_2 t); \quad x \geq 0; \quad v_2 = \sqrt{\frac{T}{\mu_2}} \tag{1.5.13}$$

As ondas $y_i(x,y)$ e $y_r(x,t)$ se sobrepõe na região à esquerda ($x < 0$) e se propagam com velocidade v_1. Para $x \geq 0$ há somente a onda transmitida $y_t(x,t)$ que se propaga com velocidade v_2. Temos assim uma onda à esquerda dada pela superposição de y_i e y_r

$$y_e(x,t) = f(x - v_1 t) + g(x + v_1 t) \tag{1.5.14}$$

e a onda à direita

$$y_d(x,t) = h(x - v_2 t). \tag{1.5.15}$$

Há portanto suficiente generalidade para que sejam satisfeitas as seguintes condições em $x = 0$:

(1) A *forma da corda* é contínua em $x = 0$.

(2) A *derivada da forma da corda* é contínua em $x = 0$.

A primeira condição acima é uma conseqüência imediata de as duas metades da corda *estarem unidas* em $x = 0$. Usando as equações (1.5.14) e (1.5.15), teremos

$$f(-v_1 t) + g(v_1 t) = h(-v_2 t) \tag{1.5.16}$$

A segunda condição pode ser obtida levando em conta que a força resultante sobre o pequeno elemento de corda em torno de $x = 0$ é, de acordo com a equação (1.3.3),

$$T\left(\frac{\partial y_e}{\partial x} - \frac{\partial y_d}{\partial x}\right). \tag{1.5.17}$$

Mas esta força deve se anular quando o elemento de corda tende a zero, caso contrário teríamos uma força finita agindo sobre uma massa infinitesimal; isso causaria uma aceleração infinita. Portanto, devemos ter, em $x = 0$,

$$\frac{\partial y_e}{\partial x} = \frac{\partial y_d}{\partial x}; \quad \text{em } \ x = 0. \tag{1.5.18}$$

Usando as equações (1.5.14) e (1.5.15) na equação acima, teremos

$$f'(-v_1 t) + g'(v_1 t) = h'(-v_2 t), \tag{1.5.19}$$

onde estamos usando a notação

$$f'(u) = \frac{df}{du}. \tag{1.5.20}$$

Reescrevendo equação (1.5.19), como

$$df(-v_1 t) - dg(v_1 t) = \frac{dh(-v_2 t)}{d(-v_2 t)} d(v_1 t) \tag{1.5.21}$$

e integrando com a condição (1.5.16) levada em conta, teremos

$$f(-v_1 t) - g(v_1 t) = \frac{v_1}{v_2} h(-v_2 t). \tag{1.5.22}$$

As equações (1.5.16) e (1.5.22) permitem expressar as funcões g e h em termos da função f. Ou seja, podemos expressar as ondas refletida e transmitida em termos da onda incidente. Resolvendo as equações, obtemos

$$g(v_1 t) = -\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} f(-v_1 t) \tag{1.5.23}$$

e

$$h(-v_2 t) = \frac{2}{v_1 + v_2} f(-v_1 t) \tag{1.5.24}$$

As equações acima mostram que as ondas refletida e incidente terão, *relativamente à onda incidente*, amplitudes

$$\rho \equiv -\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} \tag{1.5.25}$$

e

$$\tau \equiv \frac{2v_2}{v_1 + v_2}. \tag{1.5.26}$$

Ou seja, se a onda incidente possui amplitude A_1, as ondas refletida e transmitida terão amplitudes ρA_1 e τA_2 respectivamente. As grandezas ρ e τ são denominadas, respectivamente, *amplitude de reflexão* e *amplitude de transmissão* (ver problema 11 do volume 2 HMN).

No caso especial em que a onda incidente f é *harmônica*, teremos $f(x - v_1 t) = A_1 \cos(k_1 x - \omega t)$. Portanto, $f(-v_1 t) = A_1 \cos(\omega t)$ e as equações (1.5.23) e (1.5.24) podem ser escritas como

$$g(v_1 t) = \rho A_1 \cos(\omega t) \tag{1.5.27}$$

e

$$h(-v_2 t) = \tau A_1 \cos(\omega t). \tag{1.5.28}$$

Fazendo $t \to x/v_1 + t$ e $t \to -x/v_2 + t$ na primeira e na segunda equação acima, respectivamente, teremos

$$g(x + v_1 t) = \rho A_1 \cos(k_1 x + \omega t) \tag{1.5.29}$$

e

$$h(x - v_2 t) = \tau A_1 \cos(-k_2 x + \omega t) = \tau A_1 \cos(k_2 x - \omega t). \tag{1.5.30}$$

Ou seja, a onda incidente harmônica gera duas ondas harmônicas, em $x = 0$, (refletida e transmitida) de amplitudes ρA_1 e τA_1, respectivamente.

É interessante analisar o *sinal* de ρ e τ. Como v_1 e v_2 são ambos positivos, τ também é positivo. Portanto, a onda transmitida possui, em $x = 0$, a *mesma fase* da onda incidente. Já o sinal de ρ depende do sinal de $v_2 - v_1$. Se a velocidade de propagação no meio 2 é maior do que no meio 1, então a fase da onda refletida será a mesma da onda incidente. Caso contrário, a onda refletida terá a fase variada de π em relação à onda incidente ($-\cos(x) = \cos(x + \pi)$). Lembrando que $v_1 > v_2$ significa que $\mu_1 < \mu_2$, vemos que quando a onda vai do meio menos denso para o mais denso, a fase da onda refletida é invertida. É interessante considerar o caso limite quando $\mu_1 \ll \mu_2$, ou seja $v_1 \gg v_2$. Neste caso, as equações (1.5.25) e (1.5.26) resultam em $\rho \approx -1$ e $\tau \approx 0$. Ou seja, a onda incidente é quase totalmente refletida.

Vejamos agora a *intensidade* das três ondas. Usando a relação (1.3.20) e levando em conta as expressões obtidas acima, podemos escrever para as intensidades incidente, refletida e transmitida

$$I_i = \frac{1}{2}\mu_1 v_1 \omega^2 A_1^2, \tag{1.5.31}$$

$$I_r = \frac{1}{2}\mu_1 v_1 \omega^2 \rho^2 A_1^2, \tag{1.5.32}$$

e

$$I_t = \frac{1}{2}\mu_2 v_2 \omega^2 \tau^2 A_1^2. \tag{1.5.33}$$

Costuma-se definir a *refletividade* e a *transmissividade* como as seguintes razões

$$r \equiv \frac{I_r}{I_i} \tag{1.5.34}$$

$$t \equiv \frac{I_t}{I_i} \tag{1.5.35}$$

Usando as expressões acima, teremos

$$r = \rho^2 = \frac{(v_1 - v_2)^2}{(v_1 + v_2)^2} \tag{1.5.36}$$

e

$$t = \frac{\mu_2 v_2}{\mu_1 v_1}\tau^2. \tag{1.5.37}$$

Levando em conta que $v_1^2 = T/\mu_1$ e $v_2^2 = T/\mu_2$, podemos reescrever t como

$$t = \frac{v_1}{v_2}\tau^2 = \frac{v_1}{v_2}\frac{4v_2^2}{(v_1 + v_2)^2} = \frac{4v_1 v_2}{(v_1 + v_2)^2}. \tag{1.5.38}$$

Portanto, um simples cálculo mostra que

$$r + t = 1. \tag{1.5.39}$$

Logo, usando as equações (1.5.34) e (1.5.35), concluimos que

$$I_r + I_t = I_i. \tag{1.5.40}$$

Esta relação é conseqüência da conservação de energia.

1.6 Modos Normais de Vibração – *Ondas Estacionárias II*

Suponha que agora a corda tenha uma comprimento finito l. Neste caso, deve haver uma situação estacionária tal que há uma superposição de ondas em ambos os sentidos. Um caso interessante é quando todos os pontos da corda oscilam com a mesma freqüência ω de modo que

$$y(x,t) = GA(x)\cos(\omega t + \delta), \tag{1.6.1}$$

onde G é uma constante.

Como vimos na subseção (1.4.2) o efeito produzido pela superposição de ondas que caminham em sentidos opostos é o de uma *onda estacionária* como dada pela equação (1.4.13). Para explorar este fato em maior generalidade, vamos supor que uma possível solução da corda finita é

$$y(x,t) = A(x)B(t), \tag{1.6.2}$$

ou seja, o produto de uma função só de x por uma função só de t. Substituindo (1.6.2) em (1.2.3), obtemos

$$\frac{1}{v^2}A\frac{d^2B}{dt^2} = B\frac{d^2A}{dx^2}. \tag{1.6.3}$$

Dividindo ambos os membros por AB, obtemos,

$$\frac{1}{v^2}\frac{1}{B}\frac{d^2B}{dt^2} = \frac{1}{A}\frac{d^2A}{dx^2}. \tag{1.6.4}$$

Observe que o lado esquerdo desta última equação é uma função só de t e o lado direito é uma função só de x. A única maneira de manter a igualdade para quaisquer x e t, é que ambos os membros sejam iguais a uma constante. Para que a solução seja oscilatória, escolhemos esta constante igual a $-k^2$. Logo, usando o resultado conhecido para a solução geral da equação do *oscilador harmônico*, teremos

$$A(x) = C\cos(kx) + D\text{sen}(kx) \tag{1.6.5a}$$

$$B(t) = E\cos(\omega t) + F\text{sen}(\omega t); \quad \omega = kv. \tag{1.6.5b}$$

onde C, D, E e F são constantes quaisquer. Note que podemos ainda reescrever o factor $B(t)$ como

$$B(t) = G\cos(\omega t + \delta). \tag{1.6.6}$$

(Verifique isso obtendo a relação entre (E,F), (G,δ)). Essa última equação de fato coincide com a (1.6.1).

1.6.1 Corda presa nas extremidades

Para uma corda de comprimento l, presa nas extremidades, teremos da equação (1.6.5a),

$$A(0) = 0 = C, \quad A(kl) = 0 = \text{sen}(kl). \tag{1.6.7}$$

Portanto,

$$kl = n\pi, \quad n = 1, 2, 3\cdots. \tag{1.6.8}$$

Logo, os possíveis valores de k são

$$k_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, 3\cdots. \tag{1.6.9}$$

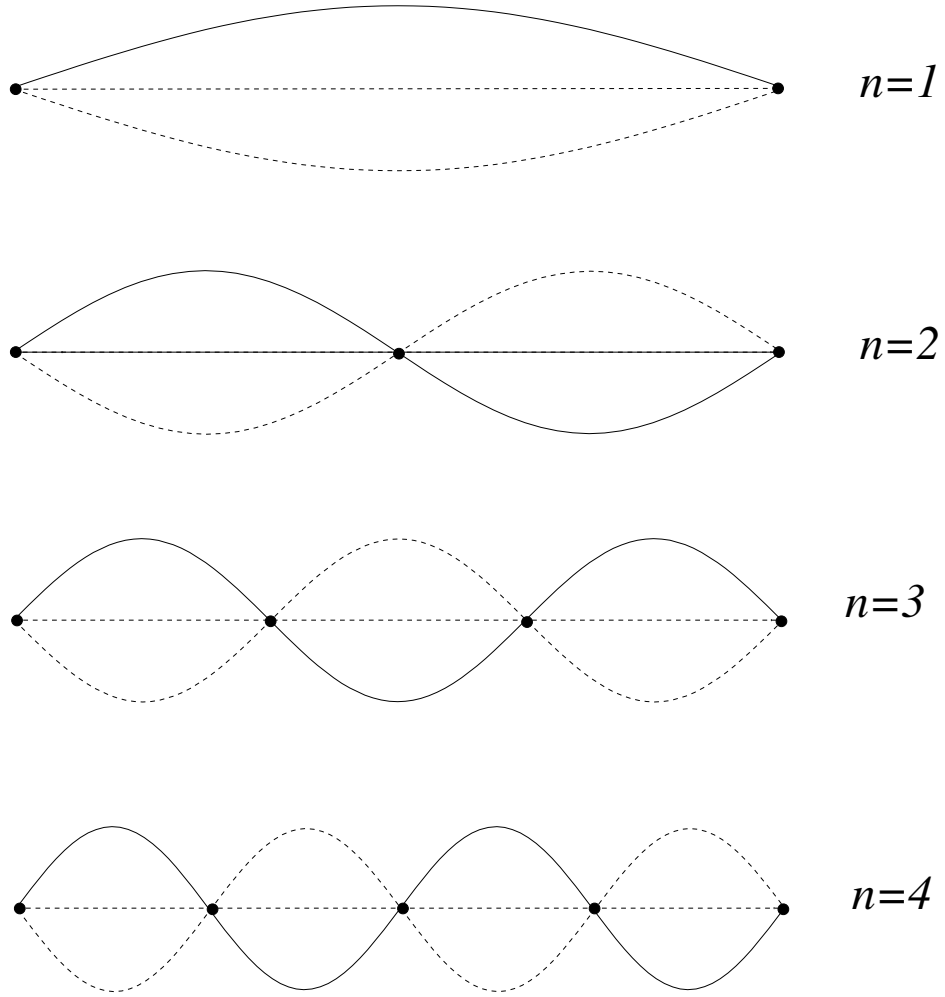
Os possíveis valores de ω são

$$\omega_n = k_n v = \frac{n\pi}{l}v. \tag{1.6.10}$$

O comprimento de onda associado à cada modo é

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2l}{n}. \tag{1.6.11}$$

Há portanto uma relação entre o comprimento de onda de cada modo e o comprimento da corda. Por exemplo, o modo normal $n = 1$, modo fundamental, possui um comprimento de onda igual ao dobro do comprimento da corda. Nas figuras abaixo são mostradas as configurações da corda correspondentes aos quatro primeiros modos.



Estas configurações são descritas pela solução

$$y(x,t) = G\cos(\omega_n t + \delta)\text{sen}(k_n x), \tag{1.6.12}$$

onde usamos (1.6.5a) com $C = 0$ (ver Eq. (1.6.7)) e absorvemos B em G (redefinimos a constante G).

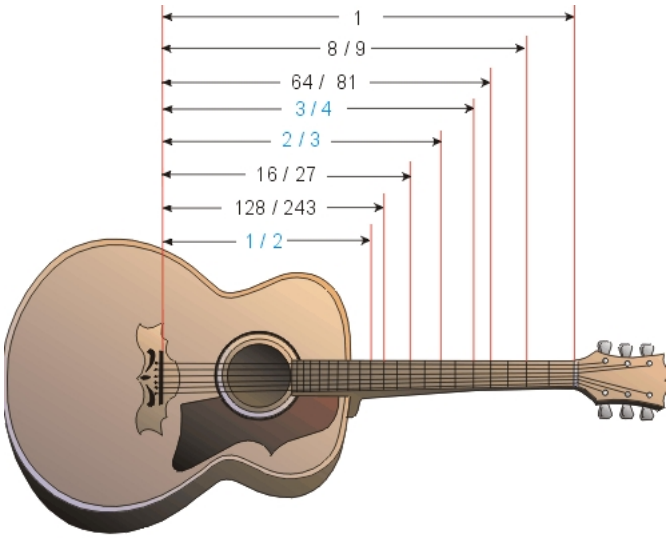
Costuma-se atribuir a Pitágoras as primeiras investigações sobre a relação entre o comprimento da corda e a freqüência que ela produz. Ele teria investigado a relação entre a freqüência (tom musical produzido) e o comprimento, tensão e densidade da corda. Essa talvez tenha sido uma das primeiras conexões do mundo físico e sensorial com a matemática, fora do contexto da geometria. Em 1634 Marin Mersenne publicou o primeiro estudo sistemático sobre o assunto, na obra entitulada "Harmonie Universelle".

Se usarmos a relação (1.6.10) juntamente com a (1.3.10), obtemos a seguinte expressão para as freqüências que podem ser produzidas por uma corda presa nas extremidades, possuindo densidade μ e tensionada por uma tensão T.

$$\nu_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{k_n}{2\pi}v = \frac{n}{2l}v = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \tag{1.6.13}$$

Essa é a relação entre as propriedades da corda (comprimento l, densidade linear μ e tensão T) e as possíveis freqüências que ela pode produzir. Por exemplo, cordas mais longas produzem sons *mais*

graves (baixas freqüências). Cordas "magras"(μ pequeno) produzem sons mais agudos. Quando tensionamos uma corda, seu som torna-se mais agudo. Todas essas informações estão condensadas na relação acima. É uma bela fórmula!



Exemplo: Calcule a energia total de uma corda de comprimento l que está presa nas extremidades.

Solução: Vamos considerar inicialmente um dado modo normal de vibração. Nesse caso, a energia cinética de um trecho infinitesimal da corda é

$$d\mathcal{T} = \frac{1}{2} dm \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx.$$

Usando a equação (1.6.12), teremos

$$d\mathcal{T} = \frac{1}{2}\mu \left(-\omega_n\, G\text{sen}(\omega_n t + \delta)\text{sen}(k_n x)\right)^2 dx.$$

Vemos que a energia cinética será máxima quando $\text{sen}(\omega_n t + \delta) = 1$, ou seja, quando a amplitude da onda estacionária em (1.6.12) é nula. Mas nesse caso, a *energia potencial* da onda estacionária é nula e a energia cinética é igual a energia total. Portanto, a energia total de um trecho da corda é

$$dE = \frac{1}{2}\mu\omega_n^2\, G^2 \text{sen}^2(k_n x) dx.$$

Integrando a expressão acima para toda a corda, teremos

$$E = \frac{G^2\mu\omega_n^2}{2}\int_0^l \text{sen}^2(k_n x)dx. = \frac{G^2\mu\omega_n^2}{2}\left(\frac{l}{2} - \frac{\cos(k_n\, l)\text{sin}(k_n\, l)}{2\, k_n}\right) = \frac{G^2\mu\omega_n^2 l}{4}.$$

Na última igualdade usamos a condição de corda presa nas extremidades dada pela relação (1.6.9). Usando ainda a fórmula (1.6.13), teremos finalmente

$$E = n^2\pi^2\, \frac{G^2\, T}{4l}.$$

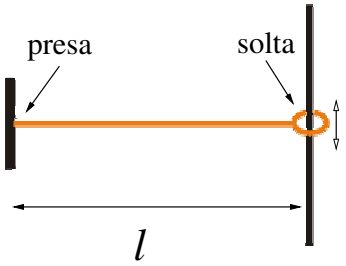
Se a corda estiver vibrando em em dos modos normais de vibração, a expressão acima fornece a energia deste modo. Veremos mais adiante que o movimento geral da corda pode ser descrito como uma combinação linear de modos normais, cada um dos quais possui uma amplitude G_n, dependente de n. Portanto, para o movimento geral de uma corda presa nas duas extremidades, teremos

$$E_{\text{total}} = \pi^2\, \frac{T}{4l} \sum_n n^2 G_n^2.$$

Vemos assim que G_n deve decrescer suficientemente, quando n cresce, para que a energia seja finita.

1.6.2 Corda presa em uma extremidade e solta em outra

Supondo que a corda esteja presa na origem e solta[2] em $x = l$, conforme a figura abaixo



teremos, usando (1.6.5a),

$$A(0) = C\cos(0) + D\text{sen}(0) = 0. \tag{1.6.14}$$

Portanto, $C = 0$. Em $x = l$, devemos ter a derivada de $A(x)$ igual a zero. Logo,

$$Dk\cos(kl) = 0. \tag{1.6.15}$$

Portanto,

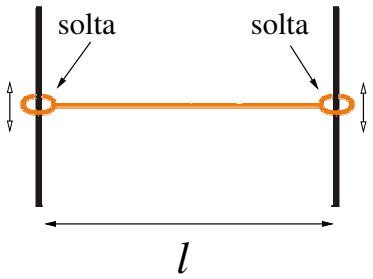
$$kl = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \tag{1.6.16}$$

O que dá os seguintes valores para os possíveis comprimentos de onda

$$\lambda = \frac{4l}{2n+1}. \tag{1.6.17}$$

1.6.3 Corda solta em ambas as extremidades

Supondo que a corda esteja solta na origem e em $x = l$ como na figura abaixo



teremos, usando (1.6.5a), com a condição de movimento vertical livre

$$\left.\frac{\partial A(x)}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial A(x)}{\partial x}\right|_{x=l} = 0. \tag{1.6.18}$$

A primeira condição de contorno resulta em

$$-kC\text{sen}(0) + kD\cos(0) = 0. \tag{1.6.19}$$

Portanto, $D = 0$. Em $x = l$, teremos

$$Dk\text{sen}(kl) = 0. \tag{1.6.20}$$

[2]"Solta" significa que a corda pode se movimentar livremente na direção transversal. Naturalmente a corda permanece esticada como no exemplo da figura.

Portanto,

$$kl = n\pi. \tag{1.6.21}$$

Ou seja, os possíveis comprimentos de onda serão

$$\lambda = \frac{2l}{n}. \tag{1.6.22}$$

1.6.4 Movimento Geral da Corda - Análise de Fourier

Um resultado importante da seção anterior é que "ondas confinadas", ou seja, ondas restritas a uma determinada região do espaço, só podem existir para um conjunto discreto de freqüências. Vamos agora investigar um pouco mais esses *modos normais* (1.6.12). Primeiramente vamos reescreve-los como

$$y_n(x,t) = b_n \cos(\omega_n t + \delta_n)\text{sen}(k_n x), \tag{1.6.23}$$

de forma que atribuímos amplitudes b_n e fases δ_n para cada modo normal.

De acordo com o princípio de superposição, a soma

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x,t) \tag{1.6.24}$$

também será uma solução para a corda (desde de que a soma infinita seja convergente) (note que essa combinação satisfaz as condições de contorno de corda fixa nas extremidades $y(0,t) = y(l,t) = 0$).

Quando levamos em conta as condições iniciais (1.2.12), teremos

$$\begin{aligned} y(x,0) &= y_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{b_n \cos(\delta_n)}_{\equiv c_n} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \\ \left.\frac{\partial y}{\partial t}(x,t)\right|_{t=0} &= y_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-\frac{n\pi v}{l} b_n \text{sen}(\delta_n))}_{\equiv d_n} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \end{aligned} . \tag{1.6.25}$$

Se formos capazes de determinar c_n e d_n, definidos acima, podemos a seguir determinar b_n e δ_n e finalmente conhecer totalmente $y(x,t)$ em (1.6.24). O problema todo consiste então em determinar c_n e d_n.

A formulação geral do problema é a seguinte: dada uma função conhecida $F(x)$ (forma, ou velocidade da corda finita e presa nas extremidades), determine os coeficientes c_n tais que

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \tag{1.6.26}$$

Essa maneira de expressar $F(x)$ chama-se *Série de Fourier da função* $F(x)$. A primeira demonstração de que se pode calcular os coeficientes c_n em termos da função $F(x)$ foi feita por Fourier em 1807. A forma explícita é

$$c_n = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \text{d}x. \tag{1.6.27}$$

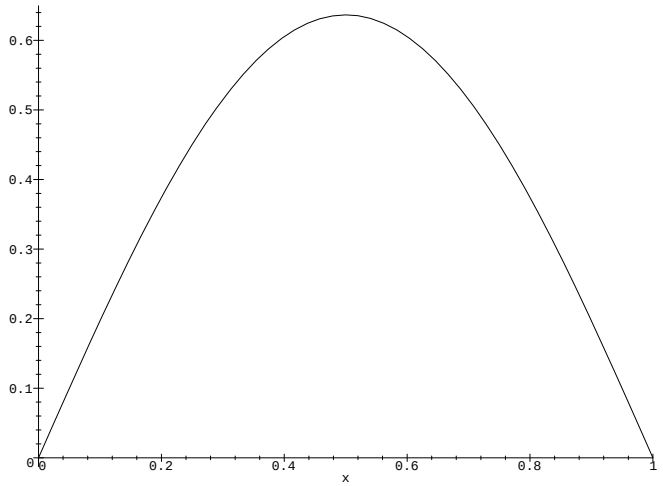
Exemplo: Consideremos a função $F(x) = x$ no intervalo $0 \leq x \leq l$. Neste caso, os coeficientes c_n são

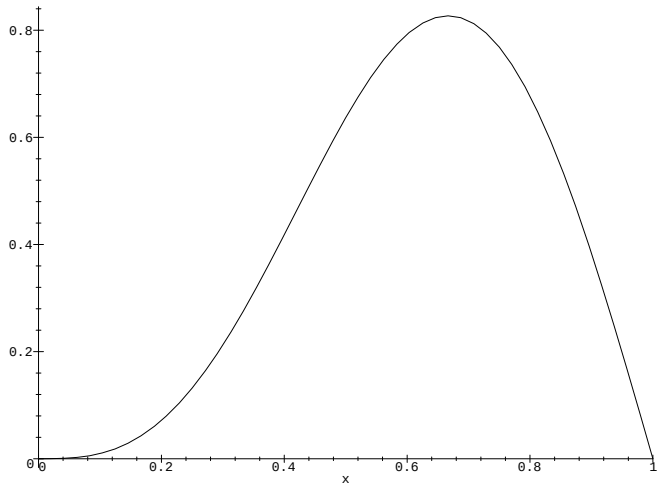
$$c_n = \frac{2}{l}\int_0^l x \text{ sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \text{d}x. \tag{1.6.28}$$

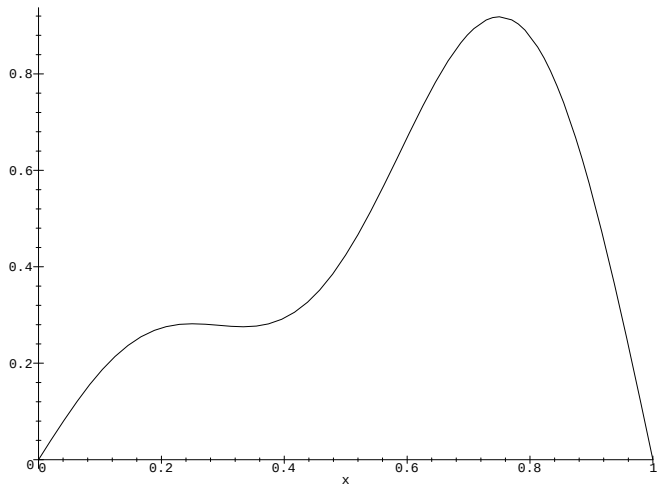
Calculando a integral (**verifique**), obtemos

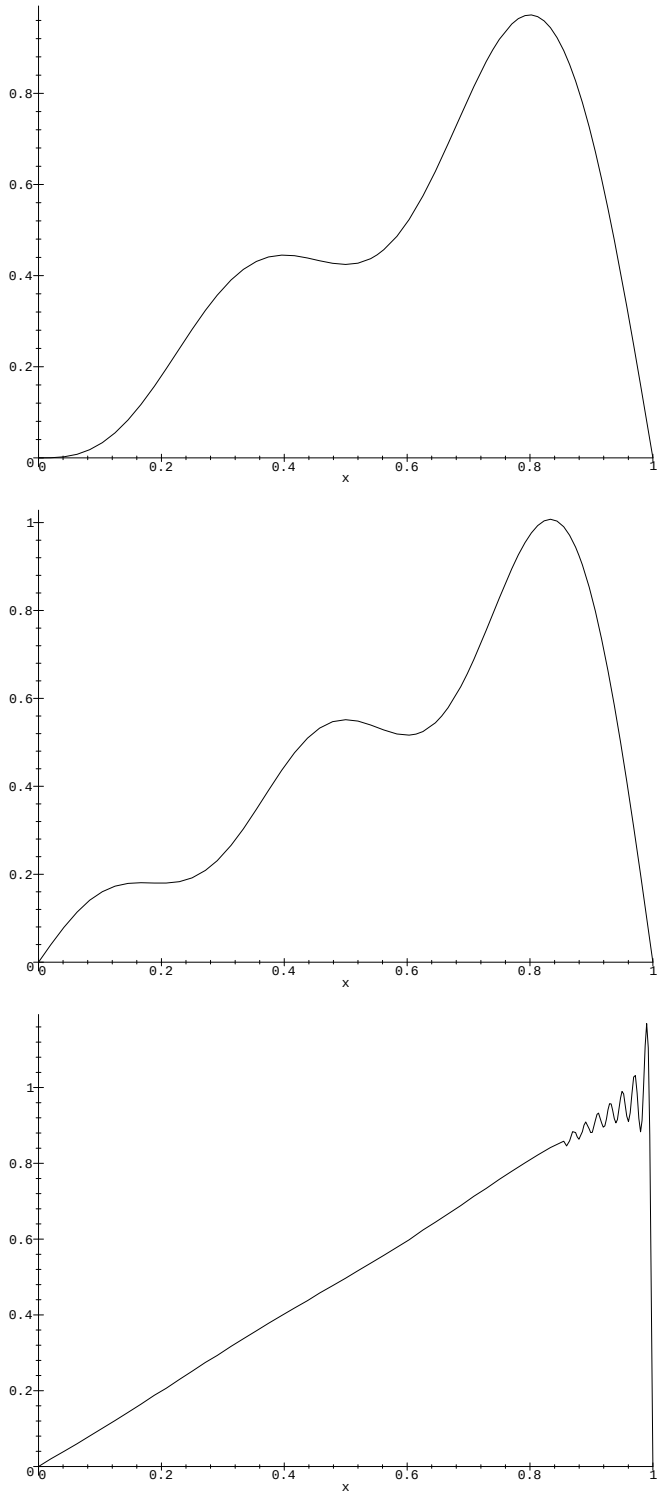
$$c_n = (-1)^{n+1}\frac{2l}{n\pi} \tag{1.6.29}$$

As figuras abaixo mostram o resultado que se obtem respectivamente para os casos de 1, 2, 3, 4, 5 e 100 termos na série de Fourier dada por (1.6.26) com os coeficientes dados por (1.6.29).









Exemplo: Consideremos agora a função $F(x) = x(l-x)/l$. Os coeficientes de Fourier são, neste caso,

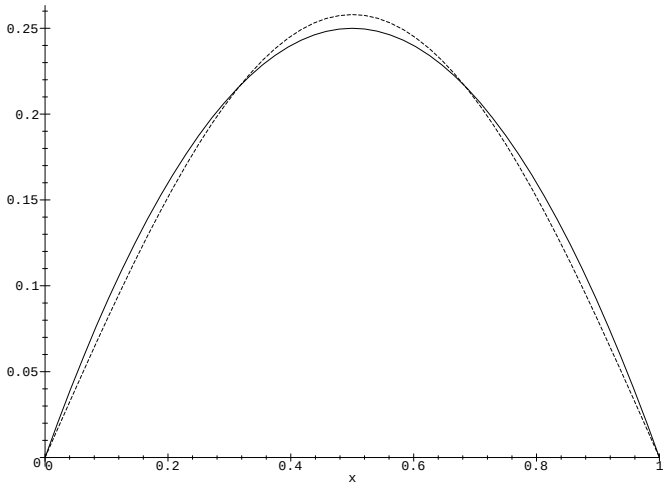
$$c_n = \frac{2}{l^2}\int_0^l x(l-x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x. \tag{1.6.30}$$

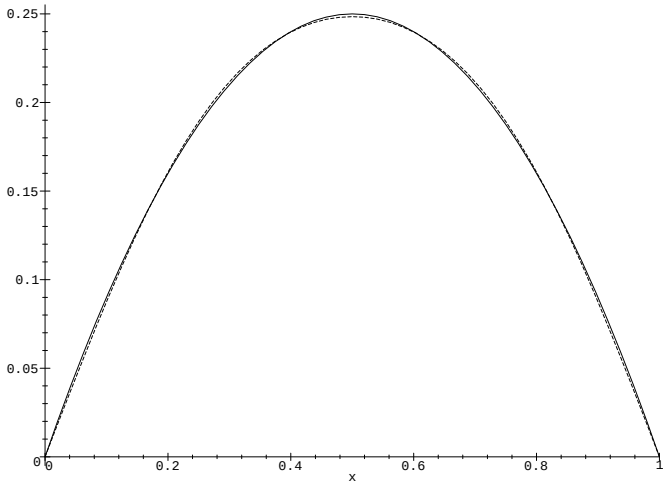
Calculando a integral (**verifique**), obtemos

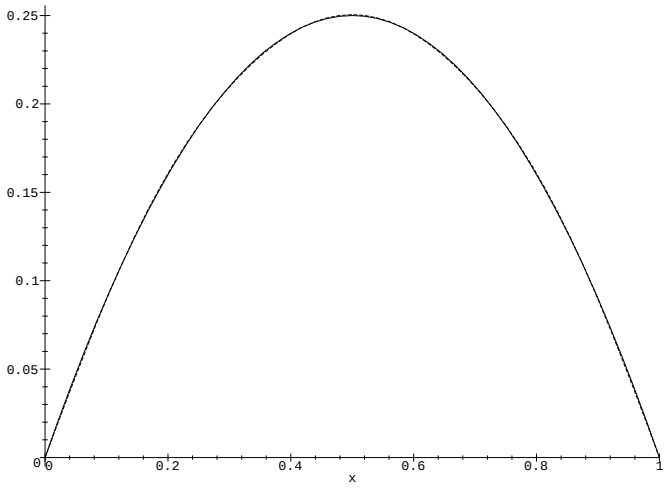
$$c_n = [1-(-1)^n]\,\frac{4l}{n^3\pi^3} \tag{1.6.31}$$

Observe que os coeficientes com n par são nulos. Isso se deve ao fato de que a função $x(l-x)$ é *simétrica* em relação ao ponto $x = l/2$, de modo que somente os harmônicos que também possuem essa simetria devem contribuir.

As figuras abaixo mostram o resultado que se obtem respectivamente para os casos de 1, 3 e 5 termos na série de Fourier (curvas tracejadas) dada por (1.6.26) com os coeficientes dados por (1.6.29).







Compare as figuras dos dois exemplos acima observando a grande convergência do segundo exemplo, para qualquer valor de x.

Consideremos agora a periodicidade de um dado ponto na corda. Fixando, por exemplo um ponto x_0, teremos

$$y(x_0,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{b_n\text{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x_0\right)}_{\equiv B_n}\cos(2\pi\nu_n t+\delta_n). \tag{1.6.32}$$

Temos assim a série de Fourier para uma função do tempo. Note que cada um dos modos é uma função periódica do tempo com freqüência $\nu_n = n\nu_1$. Podemos mostrar facilmente que todos os modos possuem período τ_1. De fato,

$$2\pi\nu_n(t+\tau_1)=2\pi\nu_n t+2\pi\nu_n\tau_1=2\pi\nu_n t+2\pi n \tag{1.6.33}$$

Como

$$\cos(a+2\pi n)=\cos(a), \tag{1.6.34}$$

a função (1.6.32) se repete após um período τ_1.

Isso ocorre porque qualquer tipo de deformação da corda leva um tempo igual à $2l/v$ para voltar à sua configuração original (verifique isso considerando um pulso que se propaga e se reflete nas extremidades fixas). Levando em conta a relação (1.6.13), vemos que esse tempo é precisamente o período τ_1. Isso explica porque ao percurtirmos uma corda de violão, ouvimos um tom correspondente ao que seria se corda vibrasse com a freqüência do primeiro harmônico.

Exercício: Utilize seus recursos computacionais (sala pró-aluno, computador pessoal, etc) para obter os gráficos das sucessivas aproximações das séries de Fourier, correspondentes à função

$$F(x)=\text{sen}x(1-x). \tag{1.6.35}$$

Capítulo 2

Som

2.1 Ondas sonoras

Vimos que a produção de ondas progressivas em uma corda ocorre quando um determinado ponto da corda é posto em movimento, que pode ser um pulso ou uma oscilação harmônica. Agora vamos estudar a produção de pulsos ou oscilações harmônicas em um meio gasoso como o ar. Este estudo permitirá entender muitos aspectos de um dos mais interessantes fenômenos ondulatórios: *o som*.

Assim como no caso dos pulsos produzidos em uma corda, devemos ter em mente que o deslocamento que produz o pulso inicial deve ser *suficientemente rápido*. De fato, sabemos que se movermos a extremidade da corda com um movimento relativamente lento, o movimento local cessa e não ocorre propagação Analogamente, quando o ar é deslocado por um objeto que se move *suavemente*, haverá apenas um fluxo em volta do objeto. Por outro lado, se o movimento for suficientemente rápido, ocorrerá uma variação localizada da densidade do ar, sendo a densidade maior nos pontos que estão no *mesmo sentido do movimento*. A variação de densidade, por sua vez, produz uma variação de pressão que desloca o ar adjacente colocando-o em movimento (essa última etapa é descrita, como veremos, pela *segunda lei de Newton*). Desse modo o ciclo é fechado, propagando-se para todo o espaço. Tal ciclo pode ser descrito pelas etapas

I. Deslocamento do gás *causa* variação de densidade

II. Variação de densidade *causa* variação de pressão.

III. Variação de pressão *causa* deslocamento.

ou seja, **I**→**II**→**III**→**I**.

Temos assim uma descrição em termos das seguintes *variáveis*, definidas em cada ponto do espaço e em cada instante de tempo [1]:

$$\text{Deslocamento}: \quad u(x,t) \tag{2.1.1}$$

[1] Uma tal descrição não considera de forma explícita os detalhes do movimento das moléculas do meio gasoso. A função $u(x,t)$ não fornece tal informação detalhada. Do ponto de vista da *Teoria Cinética dos Gases*, que estudaremos no final do curso, quando há um adensamento em uma certa região, as moléculas fluem para as regiões menos densas de modo a uniformizar a densidade. Aparentemente, não haveria a produção de uma onda sonora. Para que uma onda (e.g. som) seja produzida, as moléculas que fluem da região de maior densidade devem transferir momento para as adjacentes, na região menos densa. Portanto, para produzir uma onda as regiões de variação de pressão ou densidade devem ser muito maiores do que a *distância média percorrida pelas moléculas antes de colidir*. Tal distância é chamada de livre caminho médio. Assim, o tamanho dos pulsos de pressão deve ser muito maior do que o livre caminho médio das moléculas do gás (veja referência [5] página 47-3). Neste regime, as ondas de pressão constituem uma descrição em termos de uma *Teoria Efetiva*.

$$\text{Variação de densidade :} \quad \rho_e(x,t) \tag{2.1.2}$$

$$\text{Variação de pressão :} \quad P_e(x,t) \tag{2.1.3}$$

É importante frisar que o deslocamento do gás $u(x,t)$ é apenas *local*, ou seja, o gás como um todo permanece em repouso enquanto ocorrem mudanças localizadas em pequenas porções do gás. Quando uma dessas mudanças se inicia, em uma dada região, o efeito se propaga para outras regiões. Veremos a seguir que essa propagação se dá segundo uma equação de ondas.

2.1.1 Derivação da equação de onda

Vamos considerar primeiramente **II**. Na situação de equilíbrio, antes da chegada da onda sonora, temos

$$\text{(Pressão de equilíbrio)} \equiv P_0$$

$$\text{(Densidade de equilíbrio)} \equiv \rho_0$$

A pressão é uma função da densidade

$$P = f(\rho) \tag{2.1.4}$$

cuja a forma explícita discutiremos mais adiante (veremos que a forma explícita de $f(\rho)$ pode ser obtida a partir da descrição do *processo de compressão* do gás quando sujeito a perturbação ondulatória sonora). Em particular, para os valores de equilíbrio, teremos $P_0 = f(\rho_0)$.

As mudanças de pressão devidas à onda sonora são extremamente pequenas. É comum se utilizar uma escala logarítmica de intensidades, já que a sensibilidade do sistema auditivo é logarítmica. Na escala de decibéis,

$$I = 20 \log_{10}(P/P_{ref}), \tag{2.1.5}$$

onde $P_{ref} = 2 \times 10^{-10}$ bar (1 bar $= 10^5 N/m^2 \approx 1$ atm). Um som razoavelmente intenso de cerca de 60 decibéis corresponde a uma pressão de $10^3 P_{ref} = 2 \times 10^{-7}$ bar. Portanto as variações de pressão devidas ao som são muito menores do que a pressão de 1 atmosfera. Sons acima de 120 db já são dolorosos para o ouvido. Portanto, se escrevermos

$$P = P_0 + P_e \quad \text{e} \quad \rho = \rho_0 + \rho_e, \tag{2.1.6}$$

onde P_e e ρ_e são a pressão e densidade em excesso, poderemos considerar que $P_e << P_0$ e $\rho_e << \rho_0$. Neste caso,

$$P_0 + P_e = f(\rho_0 + \rho_e) = f(\rho_0) + \rho_e \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_0 + \mathcal{O}(\rho_e^2). \tag{2.1.7}$$

Mas, $P_0 = f(\rho_0)$, logo

$$\boxed{P_e = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_0 \rho_e} \quad \textbf{(II)}. \tag{2.1.8}$$

O sub-índice 0 significa que a derivada está sendo calculada no ponto de equilíbrio. Mais adiante veremos em maior detalhe como obter o valor desta grandeza.

Vejamos agora a etapa **I**. Consideremos uma região do gás de forma cilíndrica e possuindo área de seção A. Vamos descrever a posição das partículas de gás que estão localizadas sobre uma determinada seção cilíndrica, da seguinte forma:

$$\text{(posição do ar antes da passagem da onda)}_1 = x$$

$$(\text{deslocamento do gás devido a passagem da onda})_1 = x + u(x,t)$$

Da mesma forma, em uma vizinhança $x + \Delta x$, teremos

$$(\text{posição do ar antes da passagem da onda})_2 = x + \Delta x$$

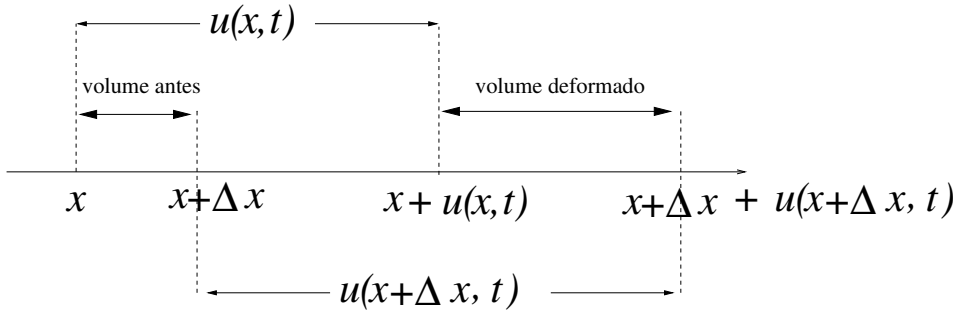
$$(\text{deslocamento do gás devido a passagem da onda})_2 = x + \Delta x + u(x + \Delta x, t)$$

Podemos agora calcular os respectivos volumes, como

$$(\text{volume antes}) = [(x + \Delta x) - x]A = \Delta x A$$

$$(\text{volume deformado pela onda}) = [(x+\Delta x+u(x+\Delta x,t))-(x+u(x,t))]A = [\Delta x+u(x+\Delta x,t)-u(x,t)]A$$

A figura abaixo ilustra estas relações.



Portanto,

$$(\text{volume deformado pela onda}) = A\Delta x \left(1 + \underbrace{\frac{u(x+\Delta x,t) - u(x,t)}{\Delta x}}_{\frac{\partial u}{\partial x}} \right)$$

Levando em conta que a massa de ar mantem-se invariável,

$$\rho_0(\text{volume antes}) = \rho(\text{volume deformado}), \tag{2.1.9}$$

teremos

$$\rho_0 A\Delta x = (\rho_0 + \rho_e)A\Delta x(1 + \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)).$$

Cancelando $A\Delta x$,

$$\rho_0 = (\rho_0 + \rho_e)(1 + \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)) = \rho_0 + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \rho_e,$$

onde levamos em conta que

$$\rho_e \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$$

pode ser desprezado uma vez que estamos considerando pequenas variações. Assim, obtemos finalmente,

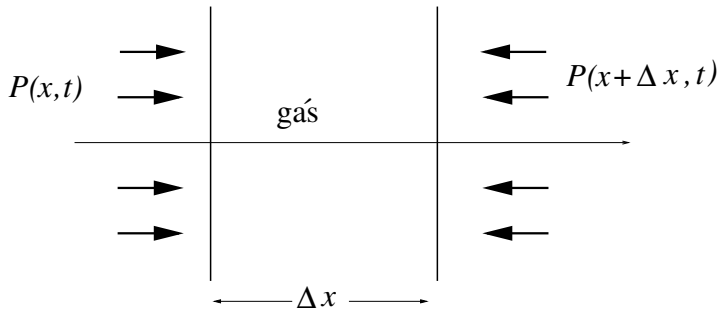
$$\boxed{\rho_e = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)} \ \textbf{(I)}. \tag{2.1.10}$$

Essa relação é o que esperamos fisicamente, uma vez que se o deslocamento u cresce com x (expansão do gás), a densidade deve diminuir.

Vejamos agora a etapa **III**. Considerando que a força sobre as duas seções de área A são $AP(x,t)$ (para a direita) e $AP(x+\Delta x,t)$ (para a esquerda), teremos

$$A(P(x,t)-P(x+\Delta x))=-A\Delta x\frac{\partial P}{\partial x}=-A\Delta x\frac{\partial P_e}{\partial x}. \tag{2.1.11}$$

Na última igualdade usamos que Δx e P_e são pequenos e P_0 não depende de x (assumindo que a pressão de equilíbrio é uniforme). Ilustramos essas forças na figura abaixo.



Usando a *Segunda lei de Newton*, e levando em conta que a massa contida entre x e $x+\Delta x$ é $\rho_0 A\Delta x$, teremos

$$\underbrace{-A\Delta x\frac{\partial P_e}{\partial x}}_{F}=\underbrace{\rho_0 A\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}_{ma} \tag{2.1.12}$$

Logo,

$$\boxed{\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-\frac{\partial P_e}{\partial x}}\ \textbf{(III)}. \tag{2.1.13}$$

Podemos agora combinar as equações (2.1.8), (2.1.10) e (2.1.13) e obter uma única equação para $u(x,t)$. Substituindo (2.1.8) em (2.1.13), obtemos

$$\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_0\frac{\partial\rho_e}{\partial x}. \tag{2.1.14}$$

Substituindo (2.1.10) na equação acima,

$$\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_0\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2.1.15}$$

Cancelando ρ_0,

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}. \tag{2.1.16}$$

Essa é a *equação de onda* para a função $u(x,t)$, que descreve os deslocamentos do gás em pontos x e instantes t. Note que a velocidade desta onda é

$$v_{\text{som}}=\sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_0}. \tag{2.1.17}$$

Portanto a velocidade do som depende do conhecimento da equação que relaciona a pressão e a densidade do gás. Antes de tratar desse assunto, vamos explorar um pouco mais as propriedades da onda sonora.

Primeiramente, notamos que é possível também obter uma equação para as flutuações de densidade ρ_e. Derivando a equação (2.1.16) em relação a x, e usando a equação (2.1.10), obtemos

$$\boxed{\frac{\partial^2 \rho_e}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_0 \frac{\partial^2 \rho_e}{\partial x^2}}. \tag{2.1.18}$$

Usando agora (2.1.8) em (2.1.18), teremos

$$\boxed{\frac{\partial^2 P_e}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_0 \frac{\partial^2 Pe}{\partial x^2}}. \tag{2.1.19}$$

Portanto as ondas de deslocamento, densidade e pressão se propagam segundo a mesma equação, com a mesma velocidade.

2.1.2 Velocidade do Som

Vejamos como determinar a velocidade do som a partir das propriedades do gás. Quando o gás é comprimido, sua densidade varia de acordo com a equação que relaciona a pressão, o volume e a temperatura. Por exemplo, para um gás ideal (gás rarefeito), a *equação de estado* é

$$PV = nRT, \tag{2.1.20}$$

onde n é a massa do gás em moles e R é a constante universal dos gases. Em um processo de variação de pressão, *mantendo a temperatura fixa*, (processo isotérmico), teremos

$$P = \alpha\rho \tag{2.1.21}$$

Ou seja

$$\frac{\partial P}{\partial \rho}_{T \text{ const.}} = \alpha = \frac{P}{\rho}. \tag{2.1.22}$$

Portanto, a velocidade do som seria, usando (2.1.17)

$$v_{T \text{ const.}} = \sqrt{\frac{P_0}{\rho_0}}. \tag{2.1.23}$$

Usando os dados para o ar ($P_0 = 1$ atm e $\rho_0 = 1,3$ kg/m^3)[2] , obtemos

$$v_{T \text{ const.}} = 280 \text{ m/s}. \tag{2.1.24}$$

Comparando com o resultado medido, que é de 332 m/s, vemos que esse resultado está errado.

Devemos analisar com mais cuidado a hipótese de que a temperatura é mantida fixa. Para que isso ocorra, é preciso que a energia em forma de calor seja conduzida rapidamente para fora da região de compressão. Esse foi o argumento utilizado por Newton. Cerca de 100 anos depois, em 1816, Laplace argumentou que as mudanças de pressão e temperatura, na onda de pressão, ocorrem sem que haja tempo para a troca de calor. O fluxo de calor entre as regiões comprimidas e rarefeitas é muito pequeno, para comprimentos de onda grandes, comparados com o *livre caminho médio*[3] das moléculas. Nestas condições, o calor transferido é muito pequeno para alterar a velocidade de

[2] Condições normais de temperatura e pressão: $P_0 = 1\,\text{atm} = 1,013 \times 10^5\,\text{N/m}^2$, T $= 0^{\text{O}}$ C $= 273\,$K

[3] Caminho percorrido por uma molécula antes de colidir com outra.

propagação da onda, embora seja suficiente para produzir uma pequena absorção da energia da onda. Para que ocorra uma absorção apreciável, o comprimento de onda deveria ser da ordem de 10^6 vezes menor que o comprimento de onda dos sons audíveis [4].

Processos em que não há fluxo de calor são denominados *processos adiabáticos* (estudaremos mais sobre isso ao longo deste curso). Para tais processos, a relação entre pressão e densidade é

$$P = \text{const } \rho^\gamma, \tag{2.1.25}$$

onde γ é uma constante. Neste caso, a velocidade do som será

$$v_{\text{som}} = \sqrt{\gamma \frac{P_0}{\rho_0}}. \tag{2.1.26}$$

No caso do ar, $\gamma = 1,4$, levando ao resultado

$$v_{\text{som}} = 332 \text{ m/s}. \tag{2.1.27}$$

Usando a equação do gás ideal e considerando que para uma massa M de gás de massa molecular μ o número de moles é $n = M/\mu$, podemos escrever

$$PV = \frac{M}{\mu} RT. \tag{2.1.28}$$

Portanto,

$$\frac{P}{\rho} = \frac{RT}{\mu}. \tag{2.1.29}$$

Substituindo na equação (2.1.26)

$$\boxed{v_{\text{som}} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}}. \tag{2.1.30}$$

Vemos que a velocidade do som só depende da temperatura.

É interessante também considerar que a velocidade média quadrática das moléculas, $< v^2 >$ (veremos mais sobre isso) pode ser relacionada com a temperatura segundo a relação

$$kT = \frac{1}{3} m < v^2 > = \frac{1}{3} \frac{\mu k}{R} < v^2 >, \tag{2.1.31}$$

de modo que

$$\boxed{v_{\text{som}} = \sqrt{\frac{\gamma}{3}} \sqrt{< v^2 >}} \tag{2.1.32}$$

Ou seja, a velocidade do som é da mesma ordem de magnitude que o módulo da velocidade média das moléculas.

[4] Sons audíveis situam-se na faixa de freqüência de 20 Hz até 20 kHz. Ou seja, comprimentos de onda de 16 m até 1 cm.

2.1.3 Sons harmônicos

Suponhamos que na origem de uma sistema de coordenadas exista um plano circular perpendicular à direção x. Este plano envolto por um cilindro, cujo eixo coincide com a direção x, e executa pequenas oscilações harmônicas de freqüência ω (em torno de $x = 0$) e de amplitude $\mathcal{U}$. O deslocamento do ar em torno de $x = 0$ é descrito pela equação

$$u(0,t) = \mathcal{U}\cos(-\omega t + \delta) \tag{2.1.33}$$

(a fase δ determina a posição do plano em $t = 0$). Sabemos que um deslocamento de ar qualquer, de pequena amplitude, propaga-se como uma onda progressiva segundo a equação (2.1.16). Portanto, em um ponto $x > 0$, teremos, fazendo $t \to t - x/v$ na equação (2.1.33),

$$u(x,t) = \mathcal{U}\cos(\omega/vx - \omega t + \delta) = \mathcal{U}\cos(kx - \omega t + \delta). \tag{2.1.34}$$

De acordo com a equação (2.1.10) à onda harmônica de deslocamento está associada uma onda *harmônica de densidade*, dada por

$$\rho_e(x,t) = \rho_0\mathcal{U}k\text{sen}(kx - \omega t + \delta) = \rho_0\mathcal{U}k\cos(kx - \omega t + \delta - \pi/2) \tag{2.1.35}$$

A *onda de pressão* correspondente pode ser obtida da equações (2.1.8), (2.1.17) e (2.1.17) resultando em

$$P_e(x,t) = v^2\rho_0\mathcal{U}k\cos(kx - \omega t + \delta - \pi/2). \tag{2.1.36}$$

Portanto, a onda de pressão, assim como as ondas de deslocamento e de densidade, é uma onda harmônica de freqüência ω, produzida pela fonte.

O ouvido humano consegue ouvir freqüências no intervalo entre 20 Hz e 20×10^3 Hz. Os comprimentos de onda correspondentes $\lambda = v/\nu$ (tomando a velocidade como 344 m/s) estão no intervalo O intervalo correspondente de comprimentos de onda é

$$1,7 \times 10^{-2}\, m < \lambda_{\text{som}} < 17\, m. \tag{2.1.37}$$

Note que λ está na escala das dimensões macroscópicas.

É interessante comparar estes intervalos com os correspondentes intervalos das ondas eletromagnéticas na faixa visível do espectro. A freqüência da luz visível situa-se no intervalo $0,1\times10^{15}\,\text{Hz} < \nu_{\text{luz}} < 0,3\times10^{15}\,\text{Hz}$ e os comprimentos de onda correspondentes em $3,8\times10^{-7}\, m < \lambda < 7,5\times10^{-7}\, m$. Vimos anteriormente que o *fenômeno de interferência* ocorre quando há a superposição de ondas possuindo *fases distintas*. Uma das maneiras de se produzir diferenças de fase é fazendo com que as ondas percorram caminhos distintos. Se a diferença de caminho for da ordem de Δx, as ondas harmônicas correspondentes terão uma diferença de fase da ordem de

$$\delta_{12} = k\Delta x = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x. \tag{2.1.38}$$

Portanto, para uma diferença de caminho da mesma ordem do comprimento de onda a diferença de fase correspondente produz os efeitos de interferência como previsto pela equação (1.4.11). Quando Δx é muito maior do que λ, ocorrem muitos máximos e mínimos de interferência, o que torna sua detecção praticamente impossível. É por esse motivo que nossos sentidos são capazes de detectar o fenômeno de interferência de som, mas é muito mais difícil perceber o efeitos de interferência da luz.

2.1.4 Intensidade do som

De acordo com as equações (2.1.8) e (2.1.17) a pressão de excesso pode ser escrita como

$$P_e = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_0 \rho_e = v^2 \rho_e. \tag{2.1.39}$$

Levando em conta também a equação (2.1.10), teremos

$$P_e = -v^2 \rho_0 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}. \tag{2.1.40}$$

No caso de uma onda harmônica, teremos, usando a equação (2.1.34)

$$P_e = v^2 \rho_0 \, k\mathcal{U} \mathrm{sen}(kx - \omega t + \delta). \tag{2.1.41}$$

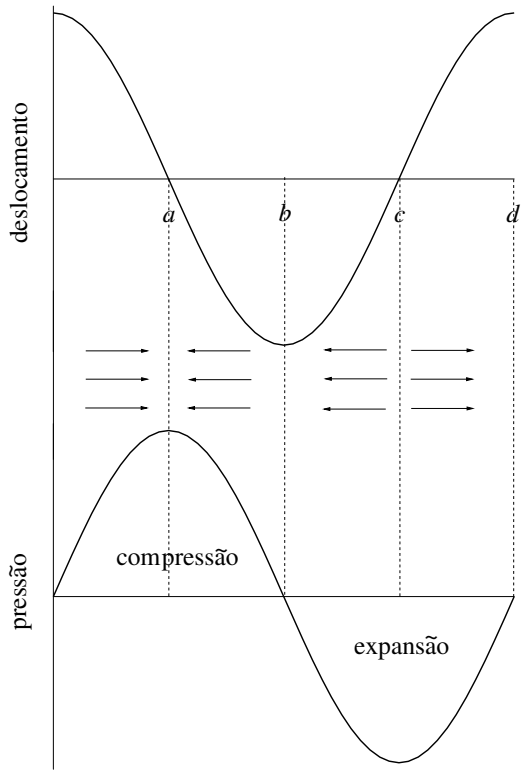
Definimos a grandeza

$$\mathcal{P} \equiv v^2 \rho_0 \, k\mathcal{U} \tag{2.1.42}$$

como a *amplitude de pressão* (verifique que $\mathcal{P}$ possui a dimensão correta). Desse modo, podemos escrever

$$P_e = \mathcal{P}\mathrm{sen}(kx - \omega t + \delta). \tag{2.1.43}$$

A figura abaixo ilustra a o significado físico da diferença de fase de $\pi/2$ entre as expressões para $u(x,t)$, dada pela equação (2.1.34), e $P_e(x,t)$.



Em pontos à esquerda de a, onde $u(x,t) > 0$, o deslocamento das porções do gás é para a direita. Por outro lado, pontos à direita de a, onde $u(x,t) < 0$, são deslocados para a esquerda. Isso faz com que a região $0 < x < b$ seja uma região de compressão. Por uma análise semelhante, concluímos

que a região entre b e d é uma região de expansão. Essa análise está de acordo com o gráfico para a pressão mostrado na parte inferior da figura acima.

Consideremos agora uma seção transversal de área A, perpendicular à direção de propagação da onda, e localizada na posição x. A força resultante sobre a superfície é

$$F(x,t) = P_e(x,t)A = \mathcal{P}\, A \,\mathrm{sen}(kx - \omega t + \delta). \tag{2.1.44}$$

Podemos agora obter a *potência instantânea*

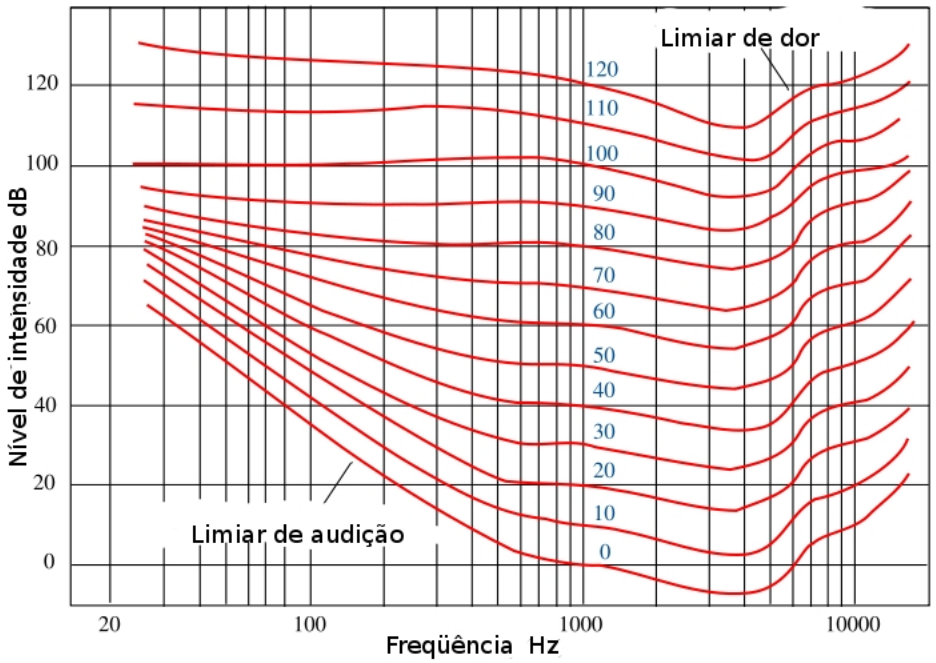
$$Pot(x,t) = P_e(x,t)A\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \mathcal{P}\, A\, \omega\, \mathcal{U} \mathrm{sen}^2(kx - \omega t + \delta). \tag{2.1.45}$$

Calculando a média no período, como fizemos nas equações (1.3.15) e (1.3.16), e dividindo o resultado pela área A, obtemos a seguinte expressão para a *intensidade da onda sonora*

$$I = \frac{\overline{Pot(x,t)}}{A} = \frac{v^2 \rho_0\, k\, \mathcal{U}^2 \omega}{2} = \frac{\rho_0\, \mathcal{U}^2 \omega^2\, v}{2}. \tag{2.1.46}$$

Vemos que a intensidade da onda sonora que se propaga em um meio de densidade ρ_0 e pressão P_0 (de modo que v também possui um valor determinado), depende da freqüência ω e da amplitude $\mathcal{U}$ (compare com a intensidade da onda em uma corda, dada pela expressão (1.3.20)).

É interessante considerar os *limiares auditivos* do ouvido humano. A figura abaixo (obtida no wikipedia) mostra as chamadas *curvas Fletcher-Munson*. A curva inferior representa o limiar de audição mínimo para diversos valores de freqüência. A curva superior é o limiar acima do qual sentimos dor. As curvas intermediárias são curvas de mesma *sensação auditiva*.



O *nível de intensidade* utilizado na figura acima é o *decibel*, cuja definição é

$$\alpha = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) db, \tag{2.1.47}$$

onde I_0 é o limiar mínimo audição, na freqüência de $10^3\,Hz$, cujo valor é

$$I_0 = 10^{-12}\,W/m^2 \tag{2.1.48}$$

O *limiar de dor* (também para $10^3\,Hz$) é 120 decibéis, ou seja, a intensidade correspondente é de $1\,W/m^2$. Note que para cada par de valores de freqüência e intensidade a amplitude da onda sonora possui um valor determinado pela equação (2.1.46). É claro que estas curvas podem variar bastante de pessoa para pessoa e também com a idade. No sítio `http://www.phys.unsw.edu.au/jw/hearing.html` você pode construir sua própria curva de Fletcher-Munson.

Exercício:

(a) Calcule as amplitudes correspondentes aos limiares mínimo e de dor.

(b) Determine as correspondentes amplitudes de pressão.

Resposta: De acordo com a equação (2.1.46), a amplitude é dada por

$$\mathcal{U} = \sqrt{\frac{2\,I}{\rho_0\omega^2\,v}} = \frac{1}{2\pi\,\nu}\sqrt{\frac{2\,I}{\rho_0\,v}}. \tag{2.1.49}$$

Usando os valores para condições atmosféricas "usuais" ($\rho_0 = 1,3\,kg/m^3$, $v = 340\,m/s$) teremos para $I = 10^{-12}\,W/m^2$ e $\nu = 10^3\,s^{-1}$

$$\mathcal{U}_{\min} = 1.07 \times 10^{-11}\,m. \tag{2.1.50}$$

Isso corresponde a uma distância menor do que o diâmetro atômico. No caso do limiar de dor, teremos, usando $I = 1\,W/m^2$

$$\mathcal{U}_{\text{dor}} = 1.07 \times 10^{-2}\,mm. \tag{2.1.51}$$

Usando $k = \omega/v$ na equação (2.1.42), teremos (substituindo $\mathcal{U}$ dado na (2.1.49)), teremos

$$\mathcal{P} = v\rho_0\,\omega\,\mathcal{U} = \sqrt{2\,I\,\rho_0\,v}. \tag{2.1.52}$$

Para o limiar auditivo, teremos

$$\mathcal{P}_{\min} = \sqrt{2 \times 10^{-12} \times 1,3 \times 340} \approx 3 \times 10^{-4} \times N/m^2. \tag{2.1.53}$$

Para o limiar de dor,

$$\mathcal{P}_{\text{dor}} = \sqrt{2 \times 1,0 \times 1,3 \times 340} \approx 30 \times N/m^2. \tag{2.1.54}$$

Considerando que a pressão atmosférica é $10^5 \times N/m^2$ e que somos capazes de suportar *pressões estáticas* de até meia atmosfera, ou seja da ordem de 10^3 vezes a pressão do limiar sonoro de dor, vemos que a dor produzida pelo som intenso se deve à existência de uma freqüência não nula.

2.2 Ondas em mais dimensões

2.2.1 Ondas planas em três dimensões

Consideremos uma linha reta orientada ao longo de uma direção qualquer, não necessariamente coincidente com as direções x, y ou z, e passando pela origem O do sistema xyz. A cada ponto

desta reta podemos associar um número ζ. Podemos então considerar a propagação de uma onda ao longo da direção definida por esta reta de tal forma que uma onda harmônica terá a forma

$$\phi(x,y,z,t) = \mathcal{A}\cos(k\zeta - \omega t + \delta). \tag{2.2.1}$$

Ou seja, a equação acima continua descrevendo uma onda que se propaga em uma única direção do espaço, mas esta direção agora é qualquer. Naturalmente o conceito chave aqui é a *isotropia* do espaço. Ou seja, estamos assumindo que todas as direções do espaço são equivalentes. Em geral, um *vetor unitário* $\hat{\zeta}$ orientado ao longo da direção de propagação, no sentido crescente de ζ, define essa direção qualquer de propagação.

Os pontos do espaço de mesma fase, ou seja aqueles para os quais $k\zeta - \omega t + \delta$ tem o mesmo valor, estão todos no plano perpendicular à direção $\hat{\zeta}$. (De fato, em qualquer outro plano o valor de ζ seria diferente e a fase teria outro valor.) Descrevendo um ponto qualquer deste plano pelo vetor $\vec{r}$, vemos que o número ζ é a projeção geométrica de $\vec{r}$ ao longo de $\hat{\zeta}$. Ou seja,

$$\zeta = \vec{r}\cdot\hat{\zeta}. \tag{2.2.2}$$

Portanto,

$$\zeta k = \vec{r}\cdot\hat{\zeta}k = \vec{r}\cdot\vec{k}. \tag{2.2.3}$$

Temos assim a seguinte forma geral para uma onda que se propaga em uma direção definida pelo vetor de onda $\vec{k}$

$$\phi(\vec{r},t) = \mathcal{A}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \delta), \tag{2.2.4}$$

onde $\vec{r}$ é orientado da origem até uma ponto qualquer de coordenadas x, y, z. Nos pontos de fase constante, $k\cdot\vec{r} =$ constante define um plano cuja a equação é (expandindo o produto escalar)

$$k_x x + k_y y + k_z z = \text{constante}, \tag{2.2.5}$$

onde as componentes k_x, k_y, k_z e o valor da constante, determinam completamente o plano. Esse plano chama-se *frente de onda*. Temos assim uma *onda plana* se propagando em todo o espaço.

2.2.2 Equação de ondas em três dimensões

Substituindo (2.2.5) em (2.2.4)

$$\phi(\vec{r},t) = \mathcal{A}\cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \delta) \tag{2.2.6}$$

vemos a dependência explícita da onda plana nas três coordenadas espaciais. Vimos acima que esta forma da onda plana foi obtida levando em conta a *isotropia do espaço*, ou seja generalizando a propagação ao longo da direção x, para uma direção qualquer. Levando em conta o mesmo princípio de isotropia podemos facilmente generalizar a equação de ondas (1.2.3). Para isso, escrevemos inicialmente

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi(x,y,z,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi(x,y,z,t)}{\partial x^2} + ? = 0. \tag{2.2.7}$$

Vemos então que a única maneira de obtermos uma equivalência completa nas três coordenadas espaciais é tomando

$$? = -\frac{\partial^2\phi(x,y,z,t)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\phi(x,y,z,t)}{\partial z^2}. \tag{2.2.8}$$

Portanto, a equação de ondas em três dimensões é

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi(x,y,z,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi(x,y,z,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\phi(x,y,z,t)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\phi(x,y,z,t)}{\partial z^2} = 0. \tag{2.2.9}$$

Se agora substituirmos a onda plana (2.2.6) na equação de ondas (2.2.9), vamos obter (verifique),

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{v^2}, \tag{2.2.10}$$

ou seja, em termos do módulo do vetor de onda $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$, temos

$$\omega = k\, v, \tag{2.2.11}$$

que é a mesma relação de dispersão obtida anteriormente para uma onda plana propagando-se na direção x.

2.2.3 Ondas esféricas

Em um meio isotrópico, as ondas produzidas por uma fonte puntiforme (imagine um auto-falante microscópico) terão superfícies de fase constante em pontos que são equidistantes da fonte. Ou seja, as frentes de onda serão esferas de raio r, centradas na fonte. No caso de ondas harmônicas, teremos

$$\phi(r,t) = \mathcal{A}\cos(kr - \omega t + \delta), \tag{2.2.12}$$

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e $k = \omega/v$. Note que, de fato, kr constante define uma esfera de raio r.

No entanto, a amplitude $\mathcal{A}$, na equação acima, não pode ter o mesmo valor para todos os valores de r. Se assim fosse, a energia contida em frentes de onda mais distantes da fonte (as quais possuem raio maior), seria maior do que a contida nas frentes de onda mais próximas da fonte. Ou seja, a energia estaria sendo criada a medida que a onda se expande. Para manter a taxa de transmissão de energia fixa, devemos ter

$$(\text{intensidade})4\pi r^2 = \text{constante}. \tag{2.2.13}$$

Mas sabemos que a intensidade da onda é proporcional ao quadrado da amplitude. Portanto,

$$\mathcal{A}^2 r^2 = \text{constante}. \tag{2.2.14}$$

Logo,

$$\mathcal{A} = \frac{a}{r}. \tag{2.2.15}$$

Portanto, a forma geral da onda esférica é

$$\phi(r,t) = \frac{a}{r}\cos(kr - \omega t + \delta). \tag{2.2.16}$$

Analogamente, se estivéssemos tratando de ondas circulares em um superfície bi-dimensional, teríamos

$$\phi(\rho,t) = \frac{a}{\sqrt{\rho}}\cos(k\rho - \omega t + \delta). \tag{2.2.17}$$

2.2.4 Princípio de Huygens

Vamos agora abordar o problema de como obter a solução da equação de onda em três dimensões. Ou seja, conhecendo a configuração de $\phi(\vec{r},t)$ em certos pontos do espaço, queremos determinar como a onda se propaga para outros pontos do espaço. Este tipo de problema foi estudado pelo físico holandês Christiaan Huygens por volta de 1678, antes, portanto da descrição matemática

em termos de uma equação de ondas. Uma formulação mais completa foi feita por Fresnel no início do século 19. O princípio de Huygens-Fresnel é um método de análise que permite tratar quantitativamente a propagação de ondas em situações bem gerais.

A idéia básica pode ser ilustrada por um fenômeno bastante familiar. Para uma pessoa que está em uma sala, com a janela aberta, os sons produzidos em qualquer local do exterior são ouvidos como se tivessem sido produzidos na própria janela. Ou seja, para quem está dentro da sala, a vibração do ar na janela constitui a fonte do sons externos.

Somos então levados a seguinte formulação devida originalmente a Huygens:

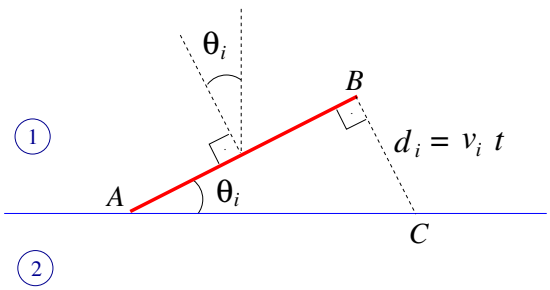
(a) Cada ponto de uma dada frente de onda comporta-se como se fosse uma *fonte de ondas secundárias*.

(b) A superposição das ondas secundárias produz a nova frente de onda de acordo com a seguinte prescrição: A frente de onda seguinte é a *envoltória* das frentes de ondas secundárias emitidas conforme (a).

Temos portanto uma análise de uma frente de onda qualquer em termos de ondas esféricas componentes, cada uma das quais é *infinitamente fraca*.

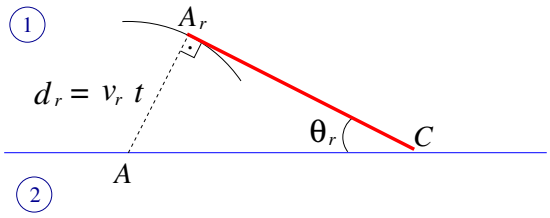
2.2.5 Reflexão e refração

A reta $\overline{AB}$, na figura abaixo, representa um trecho da intersecção de uma frente de onda plana com o plano de incidência (plano da página). A linha horizontal representa a interface de separação entre dois meios. As velocidades de propagação nos meios 1 e 2 são respectivamente v_1 e v_2. A figura também mostra o *ângulo de incidência* θ_i.



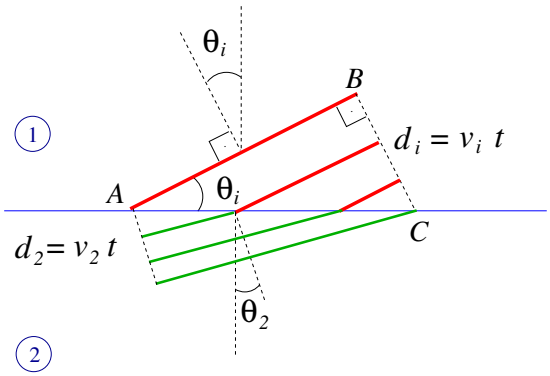
De acordo com o Princípio de Huygens, todos os pontos da frente de onda $\overline{AB}$ são fontes de ondas esféricas. Decorrido um tempo t, todas as ondas esféricas emitidas entre A e B terão atingindo a interface entre os dois meios (na figura acima a onda esférica emitida em B terá percorrido uma distância $d_i = v_i t$. Sabemos que na interface de separação entre dois meios distintos, a onda é parcialmente refletida e transmitida (veja as equações (1.5.23) e (1.5.24)).

Vamos analisar inicialmente a forma da frente de onda refletida. A figura abaixo mostra a construção de Huygens para a frente de onda já totalmente refletida após o tempo t. Note que para construir a frente de onda $\overline{A_rC}$ é suficiente considerar a tangente à esfera centrada em A e passando pelo ponto C. Note também que a reflexão se dá *no mesmo plano de incidência*. Esta importante propriedade, conhecida como *primeira lei da reflexão*, pode ser entendida considerando que a interface de descontinuidade entre os dois meios é perpendicular ao plano de incidência.

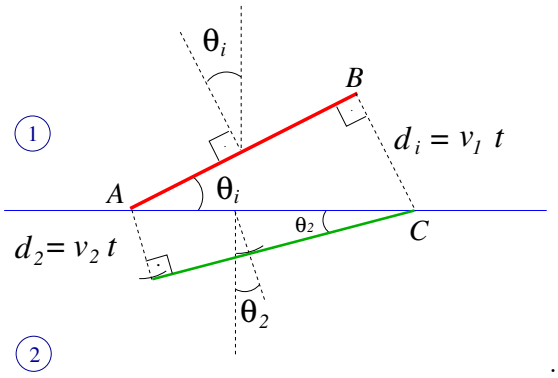


Podemos agora determinar as grandezas d_r e θ_r, mostradas na figura acima. Como $d_r = v_r t$, e $v_r = v_i = v_1$ (velocidade no meio 1) então $d_r = d_i$. Levando em conta que $\overline{AC}\text{sen}\theta_r = d_r = d_i = \overline{AC}\text{sen}\theta_i$, concluímos que $\text{sen}\theta_r = \text{sen}\theta_i$. Portanto, $\theta_r = \theta_i$, ou seja, *o ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência.*

Vejamos agora o que ocorre com a frente de onda transmitida para o meio 2. Esta onda é denominada *onda refratada.* A figura abaixo ilustra o que ocorre, quando $v_2 < v_1$, para posições sucessivas da frente de onda. Note que o trecho da frente de onda que já está no meio 2, percorre distâncias menores do que o trecho que está no meio 1.



Na figura seguinte ilustramos a construção de Huygens para a frente de onda plana refratada.



Notando que $v_2 t = \overline{AC}\text{sen}\theta_2$ e $v_1 t = \overline{AC}\text{sen}\theta_i$, obtemos

$$\frac{\text{sen}\theta_i}{\text{sen}\theta_2} = \frac{v_1}{v_2} \equiv n_{12}. \tag{2.2.18}$$

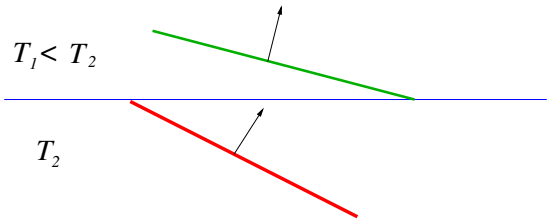
Essa é a lei de Snell para o ângulo de refração (note que, como no caso da reflexão, a onda refratada está *no mesmo plano de incidência*). A grandeza n_{12} é denominada *índice de refração.*

Vemos assim que o conceito de ondas permite *explicar* as leis de reflexão e de refração. Neste sentido, podemos dizer que o conceito de ondas fornece um entendimento mais fundamental da natureza. No caso de ondas em um meio elástico (ondas mecânicas) tudo se reduz às leis da

mecânica, uma vez que a equação de ondas foi deduzida a partir das leis de Newton. Portanto, não é necessário introduzir '*novas leis* para descrever a reflexão e refração. Para as ondas não mecânicas tudo se reduz à descrição fornecida pela Mecânica Quântica.

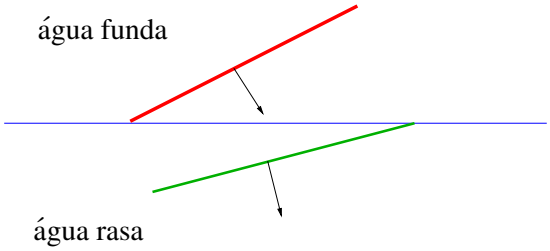
Exemplos

Vimos que a velocidade de propagação de uma onda sonora é dada pela equação (2.1.30). Portanto, ao passar de uma meio a temperatura T_1 para outro a temperatura $T_2 < T_1$ a direção de propagação muda, conforme indicado na figura abaixo, de acordo com a (2.2.18).



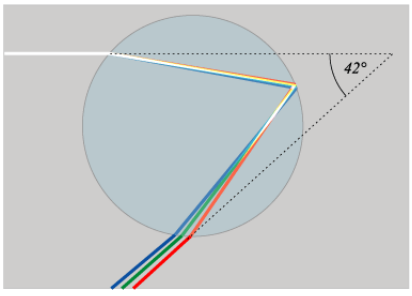
Em condições atmosféricas tais que a temperatura diminui com a altitude, o som tende a desviar-se para cima. O efeito se inverte quando o sol se põe, "tornando os sons distantes mais audíveis do que em condições usuais" (HMN). É interessante notar que podemos curvar a trajetória do som, criando um gradiente de temperatura.

Ondas na superfície da água propagam-se mais lentamente a medida que a profundidade diminui. A figura abaixo mostra qualitativamente o padrão esperado para a refração das frentes de ondas na praia, de acordo com a (2.2.18).



Isso explica porque as frentes de ondas na praia acompanham a linha da orla.

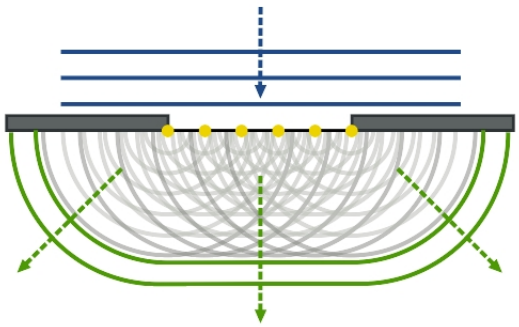
A refração e reflexão das ondas eletromagnéticas em gotas de água, permite entender, entre outras coisas, os detalhes da formação do arco-íris. A figura abaixo (obtida no wikipedia) dá uma idéia de como podemos descrever este belo fenômeno.



Note que luz de diferentes comprimentos de onda (cores) viaja com velocidades diferentes em meios materiais. A luz azul é mais refratada do que a luz vermelha (de maior comprimento de onda). Não faremos aqui a dedução detalhada; os alunos mais motivados poderão faze-lo, inclusive determinando o ângulo de 42^o indicado na figura, correspondente à diferença de índice de refração entre o ar e a água.

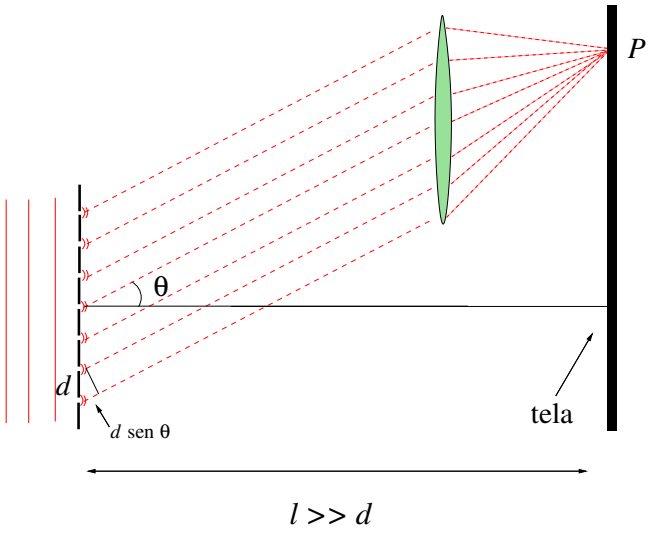
Difração

A figura abaixo (obtida no wikipedia) ilustra o que ocorre quando uma frente de onda incide sobre uma abertura. São indicados sobre a abertura alguns pontos representando fontes ondas secundárias conforme a formulação do princípio de Huygens. Também estão desenhadas as ondas esféricas emanadas e as envoltórias a elas.



Vamos agora combinar o princípio de Huygens com o fato de que existe interferência. Para isso, vamos supor que haja uma tela sobre a qual todas as ondas secundárias incidem, interferindo entre si. É possível mostrar que ocorrerá um mínimo de interferência (mancha escura na tela) quando a diferença de caminho entre as ondas secundárias emitidas nas duas extremidades da fenda for igual a um comprimento de onda.

Podemos também fazer com que uma frente de onda incida sobre uma superfície contendo um número muito grande de fendas, como na figura abaixo.



Dispositivos deste tipo são denominados *redes de difração*. As ondas esféricas emitidas por cada uma das pequenas fendas irão interferir nos pontos da tela. Quando a tela está localizada a uma distância muito grande, um determinado ponto P será um ponto de máximo se a seguinte relação for satisfeita

$$d\text{sen}\theta = m\lambda; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots . \tag{2.2.19}$$

Demonstraremos este efeito em sala de aula, utilizando um laser comum e um CD ou DVD (e, talvez, um bluray).

2.2.6 Efeito Doppler

A experiência mostra que a freqüência do som aumenta (diminui) quando a distância entre a fonte sonora e o observador diminui (aumenta) com o tempo. Notamos isso quando uma ambulância se aproxima e depois se afasta de nós. Na aproximação o som é mais agudo do que no afastamento. De fato, esse tipo de efeito tornou-se parte do cotidiano de grandes cidades desde do fim do século 19, quando veículos de diversos tipos começaram a circular produzindo diferentes tipos de sons. Christian Doppler estudou o efeito para ondas eletromagnéticas em uma monografia escrita em 1842 cujo título (resumido) é "Sobre a luz colorida de estrelas $\cdots$". A hipótese foi testada para ondas sonoras pelo meteorologista holandês *Christophorus Henricus Diedericus Buys Ballot* em 1845. Em um experimento literalmente *espetacular*, Ballot teria colocado um grupo de trompetistas sobre um vagão de trem aberto e pediu que tocassem uma determinada nota. Parado na plataforma, observou o trem passar a grande velocidade e constatou a existência do efeito Doppler para o som, ou seja, a nota emitida pelos trompetistas foi mais aguda quando o trem se aproximava de Ballot e mais grave quando o trem se afastava (Filkin and Hawking 1997, p. 65).

Vejamos como analisar este interessante fenômeno no caso de ondas sonoras. É conveniente analisar separadamente as seguintes situações:

(a) O observador se movimenta em relação ao meio de propagação; a fonte permanece em repouso relativamente ao meio de propagação.

(b) A fonte se movimenta em relação ao meio de propagação; o observador permanece em repouso relativamente ao meio de propagação.

Note que o *meio de propagação* permite distinguir as duas possibilidades acima, que de outra forma seriam indistingüiveis de acordo com o *princípio de relatividade de Galileu* (voltaremos a este interessante assunto quando iniciarmos o estudo da relatividade restrita).

(a) Observador em movimento e fonte em repouso

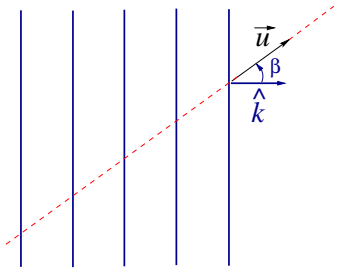
Suponhamos que a fonte, em repouso em relação ao meio de propagação, esteja produzindo oscilações de freqüência ν_0. A onda assim produzida viaja com velocidade v e possui comprimento de onda

$$\lambda_0 = \frac{v}{\nu_0}. \tag{2.2.20}$$

Considere agora o número de vezes, por segundo, que o valor máximo da oscilação atinge um determinado observador. Naturalmente esse número é a freqüência detectada pelo observador. Se o observador estivesse em repouso, teríamos simplesmente $\nu = \nu_o$. No entanto, se o observador estiver se movendo com velocidade $\vec{u}$ ele detectará um decréscimo (ou excesso, dependendo do sentido de $\vec{u}$) de cristas dado por

$$\delta\nu = -\frac{\vec{u}\cdot\hat{k}}{\lambda_0} = -\frac{u}{\lambda_0}\cos\zeta. \tag{2.2.21}$$

O ângulo ζ é formado pelas direções de propagação da onda e pela direção da velocidade do observador, como ilustrado na figura abaixo.



Portanto, a freqüência detectada pelo observador será

$$\nu = \nu_0 + \delta\nu = \nu_0 - \frac{u}{\lambda_0}\cos\zeta = \nu_0 - \frac{\nu_0}{v}\,u\cos\zeta. \tag{2.2.22}$$

Ou seja,

$$\nu = \nu_0\left(1 - \frac{u}{v}\cos\zeta\right). \tag{2.2.23}$$

Nos casos especiais quando o observador está se aproximando ($\zeta = \pi$) ou se afastando ($\zeta = 0$) da fonte, ao longo da mesma direção de propagação da onda, teremos

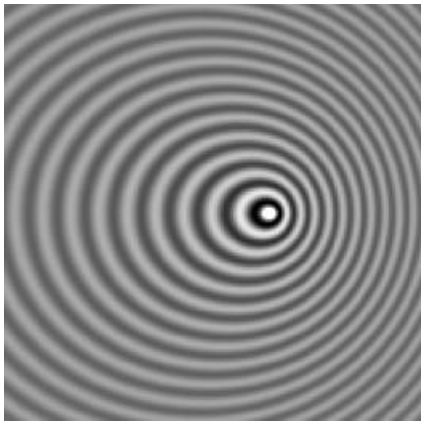
$$\nu = \begin{cases} \nu_0\left(1 + \dfrac{u}{v}\right) & \text{aproximação} \\ \\ \nu_0\left(1 - \dfrac{u}{v}\right) & \text{afastamento} \end{cases}. \tag{2.2.24}$$

Ou seja o observador detecta uma freqüência maior quando se desloca em direção à fonte e uma freqüência menor quando se afasta da fonte.

(b) Fonte em movimento e observador em repouso

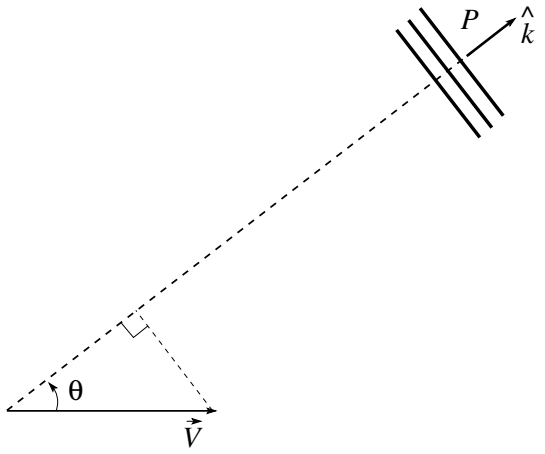
É comum supor *erroneamente* que a velocidade do que é emitido pela fonte deve ser alterada pelo próprio movimento da fonte. Isso sem dúvida é verdadeiro quando consideramos dispositivos que emitem partículas materiais, como por exemplo uma metralhadora instalada em um avião. No entanto, já sabemos que no caso de uma onda, a *velocidade de propagação só depende das propriedades do meio*. Note que estamos sempre considerando que as velocidades da fonte (ou do observador, como no caso anterior) são relativas ao meio. Sem perda de generalidade, podemos adotar um referencial em relação ao qual o meio está em repouso.

A figura abaixo (obtida no wikipedia) ilustra bem o efeito.



Neste exemplo, a fonte está se movendo com velocidade $\vec{V}$ para a direita.

Vamos agora supor que o observador esteja em repouso em um ponto P bem distanciado da fonte, de modo que a aproximação de ondas planas possa ser utilizada em P. As ondas planas cruzam o ponto P propagando-se na direção $\hat{k}$, conforme a figura abaixo.



A distância entre duas frentes de onda adjacentes, medida pelo observador em P, sofre uma alteração

$$\delta\lambda = -\frac{\vec{V}\cdot\hat{k}}{\nu_0} = -\frac{V}{\nu_0}\cos\theta = -\lambda_0\,\frac{V}{v}\cos\theta. \tag{2.2.25}$$

Assim o comprimento de onda medido pelo observador em P é

$$\lambda = \lambda_0\left(1 - \frac{V}{v}\cos\theta\right). \tag{2.2.26}$$

Por exemplo, se a fonte estiver se afastando do observador ($\theta = \pi$), $\delta\lambda = V/\nu_0 > 0$, ocorrerá um aumento do comprimento de onda ao longo da linha que une a fonte e o observador.

A freqüência medida pelo observador é

$$\nu = \frac{v}{\lambda}. \tag{2.2.27}$$

Usando a equação (2.2.26), obtemos

$$\nu = \frac{v}{\lambda_0}\frac{1}{1-\frac{V}{v}\cos\theta} = \nu_0\frac{1}{1-\frac{V}{v}\cos\theta}. \tag{2.2.28}$$

(b) Fonte *e* observador em movimento

Podemos agora combinar os dois efeitos de modo a obter o caso geral, quando tanto a fonte quanto o observador estão se movendo. Seja $\bar{\nu}_0$ a freqüência já modificada pelo movimento da fonte. Se o observador também estiver em movimento, então ele detectará uma freqüência, conforme previsto pela equação (2.2.23),

$$\nu = \bar{\nu}_0\left(1 - \frac{u}{v}\cos\zeta\right). \tag{2.2.29}$$

Por outro lado, sabemos da equação (2.2.28) que

$$\bar{\nu}_0 = \nu_0\frac{1}{1-\frac{V}{v}\cos\theta}. \tag{2.2.30}$$

Portanto, substituindo (2.2.30) em (2.2.29), teremos

$$\nu = \frac{1 - \frac{u}{v}\cos\zeta}{1 - \frac{V}{v}\cos\theta}\,\nu_0. \tag{2.2.31}$$

Exemplo: Radares utilizam microndas (ondas eletromagnéticas possuindo comprimentos de onda entre $10^{-3}\,\mathrm{m}$ e $1\,\mathrm{m}$) para medir a velocidade de veículos. Obtenha a relação entre a diferença das freqüências ν_0, da onda emitida pelo radar, e ν, da onda refletida de volta pelo veículo, e a velocidade do veículo.

Solução: A onda emitida pelo radar atinge o veículo com uma freqüência modificada pelo efeito Doppler dada por

$$\nu_1 = \nu_0\left(1 + \frac{V}{v}\right),$$

onde V é a velocidade de veículo e v é a velocidade de propagação da onda ($v \approx 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$).

O veículo emite a onda de volta modificando sua freqüência, de tal forma que, de acordo com o efeito Doppler produzido por uma fonte em movimento,

$$\nu = \nu_1 \frac{1}{1 - V/v} = \nu_0 \frac{1 + V/v}{1 - V/v} = \nu_0 \frac{v + V}{v - V}.$$

Portanto,

$$\nu - \nu_0 = \nu_0\left(1 - \frac{v + V}{v - V}\right) = \nu_0 \frac{2\,V}{v - V}.$$

Como $v \gg V$ (pelo menos nas estradas utilizadas pelos terráqueos),

$$\Delta\nu \approx \nu_0 \frac{2\,V}{v}.$$

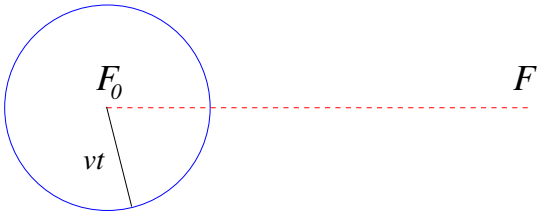
Por exemplo, no caso de um carro viajando a $100\,\mathrm{km/h} \approx 28\,\mathrm{m/s}$, e um radar utilizando $\lambda_0 = 10\,\mathrm{cm}$

$$\Delta\nu = 560\,\mathrm{Hz}.$$

Observação: Tratamos este exemplo utilizando os resultados para o efeito Doppler para o som. Veremos que o efeito Doppler para ondas eletromagnéticas (efeito Doppler relativístico) obedece o princípio de invariância de Galileu. No entanto, ao tomarmos o limite $v \gg V$, os resultados coincidem.

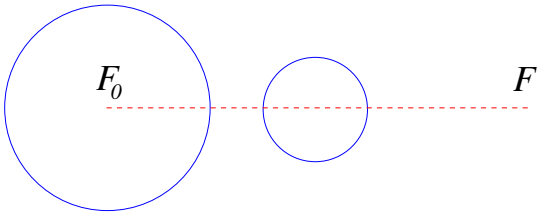
2.2.7 Cone de Mach – velocidades supersônicas

Vamos analisar o que ocorre quando a velocidade V da fonte é maior do que a velocidade v de propagação da onda. A figura abaixo mostra uma frente de onda esférica, no instante t, que foi emitida da posição F_0. Também é mostrado o percurso realizado pela fonte até atingir um ponto F; esse percurso é tal que $\overline{F_0F} = Vt$. Como estamos considerando $V > v$, então $\overline{F_0F} > vt$.

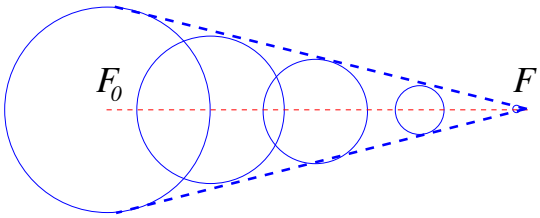


Vemos assim que a fonte ultrapassou a frente de onda por ela emitida.

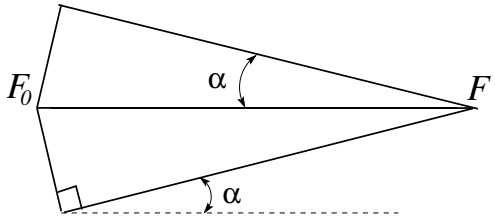
No mesmo instante t, a figura seguinte mostra uma outra frente de onda que foi emitida quando a fonte se encontrava a meio caminho entre F_0 e F.



Incluindo todas as frentes de onda emitidas ao longo do caminho $\overline{F_0F}$ teremos a formação de uma superfície *cônica*, como mostrado na figura abaixo.



Essa superfície denomina-se *Cone de Mach*. Vemos da figura abaixo



que o *ângulo de abertura do cone*, α, é tal que

$$\text{sen}\alpha = \frac{vt}{Vt} = \frac{v}{V}. \tag{2.2.32}$$

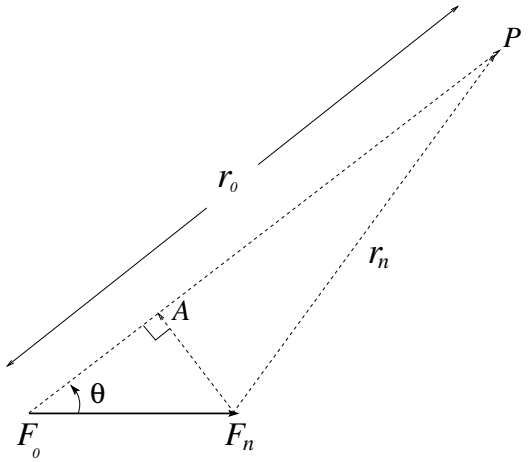
Esse ângulo é denominado *ângulo de Mach*. A razão entre as velocidades V/v é o *número de Mach*.

Onda de choque

Vamos agora analisar em maior detalhe o efeito das ondas emitidas pela fonte em movimento, produzido em um determinado ponto P. Consideremos as n frentes de onda emitidas nas proximidades de F_0, entre F_0 e F_n. O intervalo entre duas emissões consecutivas é Δt. O tempo que a n-ésima frende de onda leva para chegar em P é

$$t_n = n\Delta t + \frac{r_n}{v}. \tag{2.2.33}$$

Na figura abaixo, estão indicadas as distâncias percorridas pela onda emitida de F_0 e de F_n, que são, respectivamente, r_0 e r_n.



Como estamos considerando um entorno próximo de F_0, podemos usar a aproximação

$$r_n = r_0 - \overline{F_0 A} = r_0 - \overline{F_0 F_n}\cos\theta = r_0 - V\, n\Delta t\cos\theta \tag{2.2.34}$$

Substituindo (2.2.34) em (2.2.33), obtemos

$$t_n = n\Delta t + \frac{r_0}{v} - \frac{V}{v}\, n\Delta t\cos\theta = n\Delta t + t_0 - \frac{V}{v}\, n\Delta t\cos\theta. \tag{2.2.35}$$

Portanto,

$$t_n - t_0 = n\Delta t\left(1 - \frac{V}{v}\cos\theta\right). \tag{2.2.36}$$

O *sinal* da grandeza $t_n - t_0$ será sempre *positivo* no caso sub-sônico $V < v$ (neste caso $\frac{V}{v}\cos\theta < 1$). Logo, as ondas chegam em P na mesma ordem em que foram emitidas .

Por outro lado, no caso *supersônico*, $V > v$, existirá um ângulo θ_0 tal que $t_n = t_0$, ou seja, as ondas chegam todas ao mesmo tempo em P. De acordo eom (2.2.36), esse ângulo é tal que

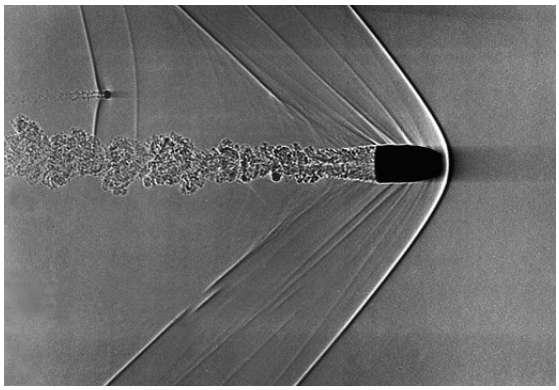
$$\cos\theta_0 = \frac{v}{V} = \text{sen}\alpha. \tag{2.2.37}$$

Logo,

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \alpha. \tag{2.2.38}$$

Portanto na direção perpendicular ao cone de Mach todas as ondas se acumulam produzindo uma *onda de choque*.

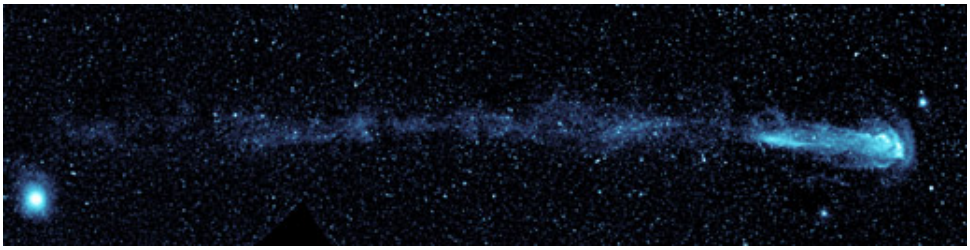
Na foto abaixo, obtida no sítio da Nasa em `http://www.nasa.gov/mission_pages/galex/20070815/f.html` vemos a onda de choque produzida por um projétil viajando no ar com uma velocidade igual a $1,5 \cdot v_{\text{som}}$.



Esta foto mostra vários outros detalhes interessantes, como por exemplo um fragmento menor cujo cone de Mach possui uma abertura maior do que o do projétil maior (qual objeto tem maior velocidade?). A foto mostra também um rastro de *turbulência*.

Em um outro link, (`http://www.nasa.gov/mission_pages/galex/20070815/a.html`) a bela foto abaixo é interpretada como sendo de uma estrela[5] que se move rapidamente no meio interestelar, produzindo uma onda de choque.

[5]Esta estrela, batizada *Mira* (do latin, *Maravilhosa*) está localizada a 350 anos-luz da Terra na constelação Cetus (Nasa).



O rastro de turbulência mostrado na figura possui 13 anos-luz de comprimento (10^{17} m). Tente identificar o padrão da onda de choque, comparando as duas fotos acima.

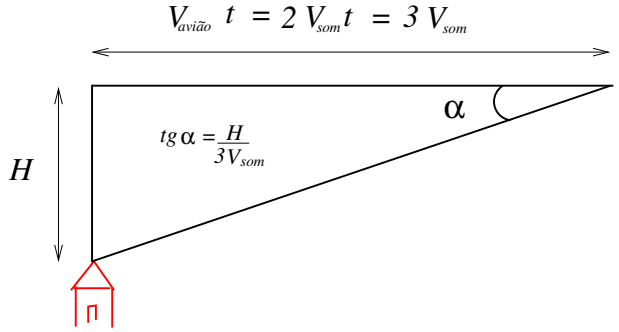
Exemplo: Decorridos 1,5 segundos depois de um avião supersônio ter sobrevoado uma casa, a onda de choque causada pela sua passagem atinge a casa, provocando um estrondo sônico. Sabendo que o avião voava com o dobro da velocidade do som, determine a altitude do avião em função da velocidade do som no ar.

Solução:

O ângulo de Mach é tal que

$$\text{sen}\alpha = \frac{v_{som}}{V_{avião}} = \frac{1}{2}$$

Portanto, $\alpha = \pi/6$. De acordo com a figura abaixo



$$\tan\alpha = \frac{H}{2\,V_{som}\,1,5}.$$

Logo

$$H = 3V_{som}\frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \sqrt{3}V_{som}.$$

A foto abaixo (wikipedia) mostra um interessante efeito de condensasão na região da onda de choque produzida por um avião supersônico

Note que a região de condensação possui a forma cônica.

Capítulo 3

Relatividade

3.1 Sistema de coordenadas galileano

O material desta seção foi baseado na referência [10].

De acordo com o princípio fundamental da mecânica, *um corpo suficientemente afastado de outros corpos, permanece em repouso ou em movimento com velocidade constante*. Este é o *princípio de inércia* descoberto por Galileu e incorporado na formulação das leis da mecânica por Newton. Além de formular o que há de mais fundamental sobre o movimento dos corpos, o princípio de inércia fornece também uma prescrição para determinar qual é o *sistema de referência* que devemos utilizar para descrever os sistemas mecânicos em termos das leis de Newton. Para nos certificar de que estamos utilizando o sistema "correto", podemos observar corpos que estão livres da influência de qualquer outro corpo e verificar se o movimento destes corpos obedece ao princípio de inércia.

Considere por exemplo o movimento de uma nave espacial A, que está com os motores desligados, em uma região do espaço suficientemente distante de qualquer outro objeto. Do ponto de vista dos tripulantes de uma outra nave distante B que esteja se movendo com movimento acelerado, o movimento da nave A será com velocidade não constante. Ou seja, no *sistema de referência* rigidamente ligado à nave acelerada, B, o movimento da nave A não está de acordo com o princípio de inércia. Por outro lado, em um sistema de referência S, rigidamente ligado a uma terceira nave C, que esteja se movendo com velocidade constante, a nave A possui velocidade constante, em concordância com o princípio de inércia. Os sistemas de referência segundo os quais o princípio de inércia é verificado (como por exemplo o sistema S da nave C) são denominados de *sistemas galileanos* ou *sistemas inerciais*.

O *sistema de referência* pode ser imaginado como a própria estrutura rígida da nave, possuindo ainda um padrão bem definido de medida de distância *e tempo*. Ou seja, devemos imaginar que os tripulantes de cada uma das naves estão devidamente munidos de réguas e relógios rígidamente ligados às suas respectivas naves. Isso define um *sistema de coordenadas* de *espaço-tempo* associado a cada *sistema inercial*.

3.2 Princípio de relatividade

Vamos considerar agora um sistema de referência qualquer, S', possuindo velocidade relativa $\vec{v}$, constante em relação a outro sistema S. Concretamente, podemos imaginar, como na seção anterior, que os dois sistemas S e S' estão rigidamente ligados a naves espaciais que se movem *livremente* (ou seja, sem a ação de qualquer tipo de força) com velocidade relativa $\vec{v}$. Por exemplo, os tripulantes da nave C (sistema S) observam a nave A (sistema S') se movimentando com velocidade $\vec{v}$. Uma

conclusão imediata da definição de sistema inercial é: *Se S é um sistema de coordenadas inercial então qualquer outro sistema S', que se move com velocidade constante em relação à S, também é um sistema de coordenadas inercial.* De fato, se o movimento de um corpo livre é descrito por S como sendo com velocidade constante, então o sistema S' também descreverá o movimento do corpo livre como sendo com velocidade constante. O *princípio de relatividade* é então formulado como:

"As leis que descrevem todos os fenômenos naturais são as mesmas em qualquer referencial inercial".

Esse é o princípio de relatividade Restrita de Einstein. Note que o princípio de relatividade poderia também ser chamado de "princípio das leis absolutas", uma vez que, embora o "relativo" sejam grandezas tais como as velocidades relativas dos referenciais inerciais, as leis físicas não são relativas, mas sim absolutas.

No domínio dos fenômenos da mecânica, o princípio de relatividade é nada mais nada menos do que o princípio de Relatividade de Galileu. De fato, sabemos que as leis na mecânica possuem a mesma forma em todos os referenciais inerciais (por exemplo, o movimento de um pêndulo é descrito da mesma forma pelos tripulantes do foguete A (sistema S') ou do foguete C (sistema S)). Caso a mecânica fosse suficiente para fornecer a base conceitual para *todos* os fenômenos naturais, então o assunto se encerraria por aqui. No entanto, os desenvolvimentos ocorridos na física ao longo do século 19, tornaram mais e mais evidente que a mecânica não fornece a mais completa descrição dos fenômenos naturais [1]. Veremos na seção seguinte qual foi o fenômeno chave que possibilitou o desenvolvimento da Relatividade Restrita como formulada por Einstein.

Antes disso vejamos de maneira mais qualitativa quais seriam as implicações de uma violação do princípio de relatividade. Se o princípio de relatividade não fosse verdadeiro então diferentes sistemas de coordenadas galileanos S^0, S^1, S^2, etc., forneceriam uma descrição inequivalente para os fenômenos naturais. Neste caso, leis formuladas em um determinado referencial, e.g. S^1, deveriam necessariamente depender da velocidade deste referencial, relativamente a um referencial absoluto S^0, onde as leis físicas possuem outra descrição.

Em seu movimento em torno do Sol, a Terra viaja a uma velocidade de 30 km/s. Se o princípio de relatividade não fosse válido, a direção do movimento da Terra deveria fazer parte das equações que descrevem as leis da natureza. Considerando que a Terra muda a orientação de sua velocidade ao longo de sua órbita em torno do Sol, ela não pode estar o tempo todo em repouso relativamente a um determinado referencial S^0.

3.3 Invariância da velocidade da luz

O observação e a correta descrição dos fenômenos eletromagnéticos, ao longo do século 19, culminaram com a descoberta feita por Maxwell de que a luz se propaga como uma *onda eletromagnética* com velocidade $c = 299.792.458\,\mathrm{m/s}$ no vácuo[2]. Do ponto de vista da física do século 19, uma questão relevante era: Em qual referencial a onda eletromagnética se propaga com velocidade c? Esse poderia ser também o nosso ponto de vista, uma vez que, como vimos na primeira parte desta disciplina, ondas se propagam em meios elásticos com uma determinada velocidade, *em relação ao meio elástico*. De fato, um observador que se move em relação ao meio de propagação observa a onda se propagando com uma velocidade menor (maior) quando sua velocidade é paralela (anti-

[1] Em vista destes desenvolvimentos, chegou-se até mesmo a se colocar em questão a validade do princípio de relatividade.

[2] Estamos adotando o valor que atualmente é introduzido como uma definição (sem incertezas). Outras grandezas físicas, como a definição do metro, são derivadas a partir desta definição.

paralela) ao sentido de propagação da onda. Se utilizarmos, por exemplo, um referencial inercial S' em relação ao qual o meio elástico possui velocidade V_x, a velocidade v na equação de onda muda [3], de acordo com as *transformações de Galileu* da mecânica, para (veja a derivação nas equações (3.4.1) e (3.4.2))

$$v' = v - V_x. \tag{3.3.1}$$

Por exemplo, no referencial que se move com a mesma velocidade da onda elástica, a velocidade da onda é $v' = 0$ (utilizamos esta transformação na seção 1.2). É importante ressaltar que estamos supondo que toda a derivação da equação de ondas permanece válida no referencial S', ou seja, as leis de Newton são válidas no referencial S' (princípio de relatividade de Galileu). É por essa razão que os físicos do século 19 consideravam natural supor que a luz possuía velocidade c em um determinado referencial. Era portanto uma questão importante determinar experimentalmente em que medida a velocidade relativa da Terra poderia modificar o valor de c.

Antes de passarmos ao famoso e belo experimento de Michelson e Morley, que investigou de maneira muito engenhosa o problema da velocidade da luz, é importante mencionar que essa questão também pode ser abordada de maneira conceitual. Para isso, é preciso mencionar antes, que, como será estudado na disciplina de eletromagnetismo, o fenômeno de propagação da luz (ondas eletromagnéticas) é uma conseqüência das famosas equações de Maxwell. Caso estas equações fossem válidas apenas em um referencial S^0, como sugere a analogia com as ondas elásticas, então as equações de Maxwell não constituiriam leis físicas absolutas. Ou seja, o princípio de relatividade não seria válido para as equações de Maxwell. Elas (as equações) seriam meros resultados derivados de leis mecânicas mais fundamentais, que requereriam portanto um determinado *meio elástico* em relação ao qual as equações de Maxwell, na sua forma usual seriam válidas. Tal meio ficou conhecido como o *éter*.

Por outro lado, se insistíssemos em supor que as equações de Maxwell constituem leis físicas válidas em qualquer referencial inercial (princípio de relatividade), teríamos então uma *contradição*, uma vez que, de acordo com a equação (3.3.1),

$$c' = c - V_x. \tag{3.3.2}$$

Então, o que fazer se a *natureza* nos informar de maneira indubitável que

$$c' = c \ ? \tag{3.3.3}$$

Mesmo do ponto de vista estritamente conceitual, temos a interessantíssima questão sobre como conciliar o princípio de relatividade com a equação (3.3.3).

Uma importante *"dica"* sobre como proceder consiste em notar que a equação (3.3.3) afirma que c é uma determinada *velocidade* que possui o mesmo valor *em todos* os referenciais. Mas a grandeza física "velocidade" é a razão entre as grandezas *distância* e *tempo*. Portanto, para que c tenha o mesmo valor em todos os referenciais inerciais, a transformação de Galileu, que, como sabemos não transforma o tempo (o tempo de Galileu-Newton é o mesmo, absoluto, para todos os observadores), teria que ser modificada de modo a introduzir uma *transformação também para o tempo*, que compensasse a transformação de coordenadas. Como veremos a formulação precisa destas idéias levou a um dos mais importantes desenvolvimentos de toda a história da física. O formalismo resultante, e sua posterior generalização feita também por Einstein, constitui a base conceitual de toda a física atual, onde o conceito de *espaço-tempo* é fundamental.

É importante também ressaltar que embora o fenômeno de propagação da luz tenha servido um "guia" (base experimental), a relatividade e o conceito de espaço-tempo, ancorado na existência da

[3] Por simplicidade estamos considerando uma onda plana se propagando na direção x.

constante fundamental c, não são de maneira alguma restritos apenas aos fenômenos eletromagnéticos. Ao contrário, o eletromagnetismo, assim como todas as leias fundamentais da natureza, é que são restringidos pelos conceitos da relatividade. Ou seja, há uma *constante universal* c (um *absoluto*), que, "por um acaso", é a velocidade de propagação da luz no vácuo. Mas, mesmo se o eletromagnetismo não existisse, ainda assim o conceito de espaço-tempo, ancorado na velocidade absoluta c, existiria. Em outras palavras, a teoria da relatividade é a física do espaço-tempo e qualquer refutação empírica deve necessariamente envolver modificações na própria estrutura geométrica do espaço-tempo.

3.3.1 O experimento de Michelson e Morley

O material desta seção foi parcialmente baseado no capítulo 6 da referência [4].

Se de fato existisse um meio para a propagação de ondas eletromagnéticas (o *éter*) poderíamos determinar nossa velocidade em relação a este meio, efetuando medidas da velocidade de propagação da luz em diversas direções. Ou seja, exatamente como no caso de ondas sonoras, quando nossa velocidade em relação ao meio de propagação fosse $\vec{V}$, observaríamos a onda se propagando com uma velocidade modificada

$$\vec{c}' = \vec{c} - \vec{V}, \tag{3.3.4}$$

onde estamos supondo que a onda se propaga com velocidade $\vec{c}$ em relação ao hipotético éter.

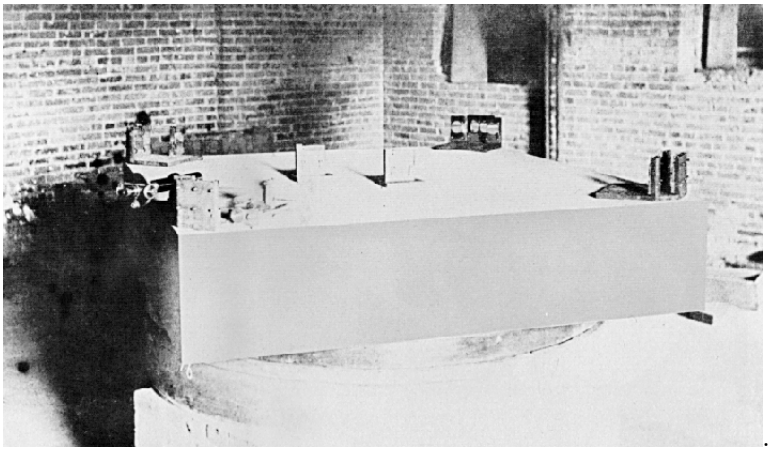
A Terra se desloca em sua órbita em torno do Sol a cerca de 30 km/s. Portanto, seria possível determinar a velocidade da Terra em relação ao hipotético éter, medindo a velocidade de ida e volta da luz em diferentes direções na superfície da Terra. Comparando as várias velocidades da luz nas diversas direções, seria então possível determinar a velocidade da Terra em relação ao hipotético éter em qualquer instante dado (note que somente em um instante de tempo específico a Terra poderia estar em repouso em relação ao hipotético éter). Esse tipo de experimento foi originalmente proposto por James Clerk Maxwell (o descobridor das ondas eletromagnéticas), em um artigo denominado "Ether", publicado na nona edição da *Encyclopœdia Britannica* em 1875.

Em 1881 o físico americano[4] Albert Abraham Michelson realizou o experimento proposto por Maxwell na Universidade de Berlim, no laboratório de Hermann von Helmholtz. Para sua grande surpresa, o experimento não revelou qualquer diferença da velocidade da luz em qualquer direção. No entanto, este primeiro aparato utilizado por Michelson era um pouco rudimentar. Para a maioria dos físicos da época, especialmente Michelson, havia boas razões para supor que um aparato melhor desenhado revelaria resultados positivos, ou seja, a existência do éter [5].

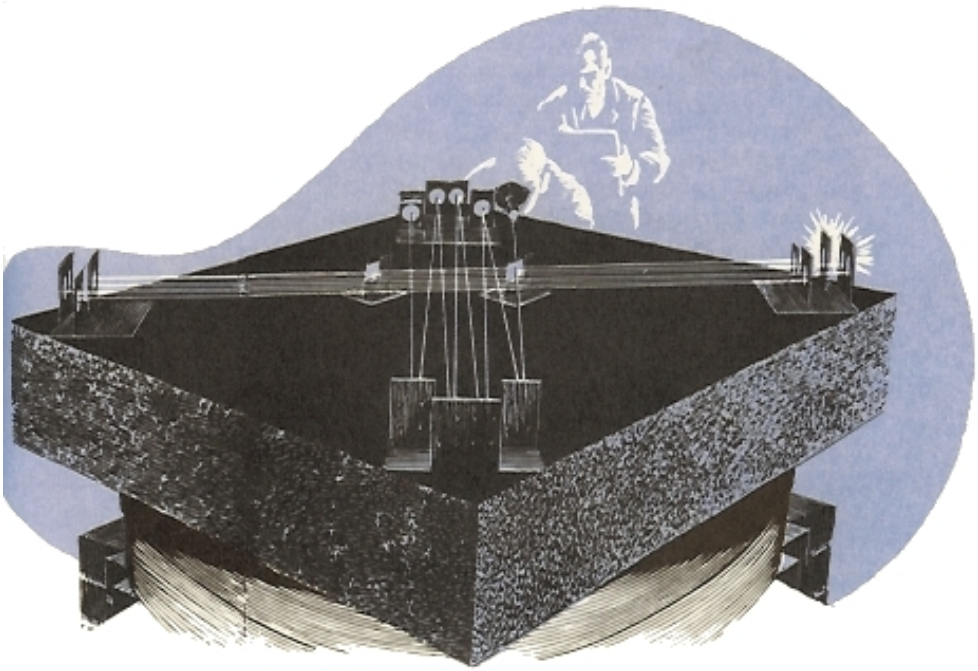
Uma versão mais precisa do experimento foi realizada em 1887 por Michelson e Edward Willians Morley no laboratório da então *Western Reserve University* onde Morley era professor. A foto abaixo mostra o aparato utilizado por Michelson e Morley em 1887.

[4] americano=estadunidense

[5] Havia exceções, como por exemplo o físico austríaco Ernest Mach que já havia criticado a hipótese do éter. Para ele esse primeiro experimento de Michelson já era suficiente para se descartar o conceito de éter.



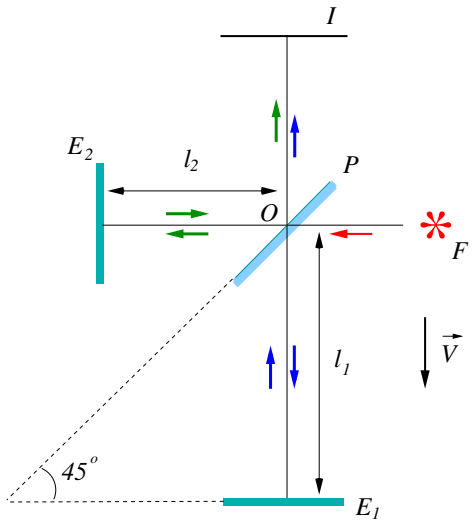
A ilustração artística abaixo[6]



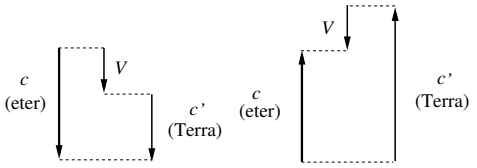
nos dá uma idéia melhor de como o aparato foi montado. A ilustração mostra um bloco de pedra que está flutuando em um recipiente de mercúrio líquido. Isso permite que o bloco seja mantido na horizontal além de facilitar a rotação em torno de um eixo central. Além disso, o mercúrio líquido absorve vibrações. O arranjo de espelhos montado sobre o bloco faz com que o feixe de luz percorra oito vezes uma determinada direção aumentando assim o caminho percorrido pela luz. A ilustração mostra também duas placas de vidro formando um ângulo de 45^o com a direção dos feixes. Uma delas possui uma face *semi-espelhada* o que faz com que o feixe seja parcialmente refletido para uma direção perpendicular e parcialmente transmitido através da placa. A segunda placa de vidro não possui face espelhada; sua função é compensar o caminho ótico do feixe que atravessa a placa espelhada de tal forma que os dois feixes que chegam ao observador tenham atravessado a mesma espessura de vidro.

[6]Esta ilustração foi feita por Anthony Ravielli para o livro *Relativity Simply Explained* de Martin Gardner, Dover Publications, INC.

Na figura abaixo mostramos o esquema simplificado do aparato de Michelson-Morley (não incluímos a placa de compensação do caminho ótico). São mostrados os dois espelhos E_1 e E_2 e a placa com uma face semi-espelhada P. As distâncias entre E_1 e E_2 até a face semi-espelhada são l_1 e l_2, respectivamente. Também indicamos a velocidade $\vec{V}$ do aparato em relação ao hipotético éter e uma fonte de luz F. Por fim, os dois feixes são focalizados em um plano posicionado em I, produzindo um efeito mensurável de *interferência*.



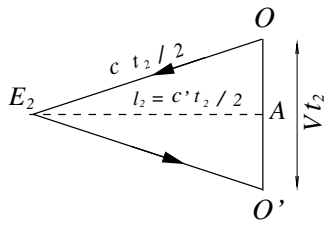
As velocidades c' de ida e de volta ao longo do percurso $\overline{OE_1}$ estão ilustradas na figura abaixo.



Usando a equação (3.3.4) teremos $c'_{\text{ida}} = c - V$ e $c'_{\text{volta}} = c + V$. Portanto, o tempo total de ida e volta ao longo do percurso l_1 é

$$t_1 = \underbrace{\frac{l_1}{c-V}}_{\text{tempo de ida}} + \underbrace{\frac{l_1}{c+V}}_{\text{tempo de volta}} = \frac{2l_1}{c}\frac{1}{1-\beta^2}; \quad \beta \equiv \frac{V}{c}. \tag{3.3.5}$$

Na figura abaixo o caminho $\overline{OE_2O'}$ é aquele seguido pela luz como visto pelo observador parado em relação ao hipotético éter e o caminho $\overline{AE_2A}$ é aquele descrito pelo observador do laboratório (aparato).



É imediato da figura que

$$c' = \sqrt{c^2 - V^2} = c\sqrt{1-\beta^2}. \tag{3.3.6}$$

Portanto,

$$t_2 = \frac{2l_2}{c'} = \frac{2l_2}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{3.3.7}$$

Note que $t_1 > t_2$. Há portanto uma *diferença de fase* entre as duas ondas que interferem em I dada por

$$\delta_{12} = 2\pi\frac{c}{\lambda}(t_1 - t_2) = \frac{2\pi}{\lambda}\left(2l_1\frac{1}{1-\beta^2} - 2_2\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \frac{4\pi}{\lambda}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(l_1\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - {}_2\right). \tag{3.3.8}$$

Suponhamos agora que o aparato seja girado de 90^o. Neste caso, os correspondentes tempos serão

$$t_1' = \frac{2l_1}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{3.3.9}$$

e

$$t_2' = \frac{2l_2}{c}\frac{1}{1-\beta^2}. \tag{3.3.10}$$

A diferença de fase será alterada para

$$\delta_{12}' = \frac{4\pi}{\lambda}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(-l_2\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} + {}_1\right). \tag{3.3.11}$$

Fazendo a diferença entre as duas defasagens, teremos

$$\delta_{12}' - \delta_{12} = \frac{4\pi}{\lambda}\frac{l_1 + l_2}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right). \tag{3.3.12}$$

Expandindo a raiz quadrada até ordem β^2,

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \left(1-\beta^2\right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\beta^2 \tag{3.3.13}$$

teremos

$$\delta_{12}' - \delta_{12} \approx -\frac{2\pi}{\lambda}\left(l_1 + l_2\right)\beta^2. \tag{3.3.14}$$

A grandeza

$$\delta m \equiv \frac{\delta_{12}' - \delta_{12}}{2\pi} = \frac{l_1 + l_2}{\lambda}\beta^2 \tag{3.3.15}$$

fornece o deslocamento das franjas de interferência (neste caso, devido à rotação de 90^o do aparato) em unidades da distância entre franjas adjacentes. Na experiência de 1881, Michelson utilizou $l_1 \approx l_2 = 1,2\,\mathrm{m}$ e $\lambda = 600\,\mathrm{nm}$. Para a velocidade da Terra, $\beta \approx 10^{-4}$. Portanto, $|\delta m| \approx 0,04$ de franja. Como já mencionamos no início desta seção, Michelson não observou qualquer deslocamento compatível com este valor. No experimento de 1887, foi utilizado $l_1 \approx l_2 = 11\,\mathrm{m}$, o que daria $|\delta m| \approx 0,4$; Michelson e Morley obtiveram como limite superior $|\delta m| < 0,01$. Experimentos realizados na década de 60 por Charles Townes, utilizando um relógio atômico baseado em vibrações de moléculas (maser), foram suficientemente precisos para detectar velocidades da Terra em relação ao hipotético éter de até $30\,\mathrm{m/s}$. Também neste caso não foi detectado qualquer movimento em relação ao hipotético éter.

Portanto, os resultados exprerimentais são compatíveis com a relação (3.3.3), ou seja,

"Existe uma velocidade c que tem o mesmo valor todos os referenciais inerciais."

Esse princípio, juntamente com o princípio de relatividade, constitui a base para o desenvolvimento da Relatividade Restrita de Einstein.

3.3.2 Alternativas

Vale mencionar que existiram outras propostas para se explicar o *resultado nulo* do experimento de Michelson-Morley. Listamos abaixo algumas delas, juntamente com a correspondente refutação experimental ou comentário.

- Arrasto do Éter. *Não é compatível com a aberração da luz emitida por estrelas.*
- Teorias de emissão (a velocidade da luz mudaria de acordo com a velocidade da fonte). *Não é compatível observações astronômicas (radiação de pulsar) e com o decaimento* $\pi^0 \to \gamma + \gamma$.
- Contração de FitzGerald-Lorentz. *Tem uma pontinha de verdade. Porém, o mecanismo de contração envolve interações entre os corpos materiais e o éter.*
- Poincaré e a estrutura do espaço e do tempo. *Tem um caráter mais programático sem detalhar as consequências físicas. Mas é bem parecida com as idéias da relatividade restrita como proposta por Einstein.*

3.3.3 Einstein entra em cena

Anexamos abaixo um trecho da introdução – traduzida para a lingua inglesa – do famoso artigo de Albert Einstein.

ON THE ELECTRODYNAMICS OF MOVING BODIES

A. Einstein – June 30, 1905

It is known that Maxwell's electrodynamics – as usually understood at the present time – when applied to moving bodies, leads to asymmetries which do not appear to be inherent in the phenomena. Take, for example, the reciprocal electrodynamic action of a magnet and a conductor. The observable phenomenon here depends only on the relative motion of the conductor and the magnet, whereas the customary view draws a sharp distinction between the two cases in which either the one or the other of these bodies is in motion. For if the magnet is in motion and the conductor at rest, there arises in the neighbourhood of the magnet an electric field with a certain definite energy, producing a current at the places where parts of the conductor are situated. But if the magnet is stationary and the conductor in motion, no electric field arises in the neighbourhood of the magnet. In the conductor, however, we find an electromotive force, to which in itself there is no corresponding energy, but which gives rise – assuming equality of relative motion in the two cases discussed – to electric currents of the same path and intensity as those produced by the electric forces in the former case. Examples of this sort, together with the unsuccessful attempts to discover any motion of the earth relatively to the "light medium," suggest that the phenomena of electrodynamics as well as of mechanics possess no properties corresponding to the idea of absolute rest.

Este trabalho, e mais três outros também fundamentais, foi publicado em 1905. A lista completa dos trabalhos deste que ficou conhecido como "Annus Mirabilis" é a seguinte:

- A. Einstein, AdP 17, 132 (1905) [17 pp.] Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt (On a heuristic viewpoint concerning the production and transformation of light)
- A. Einstein, AdP 17, 549 (1905) [12 pp.] Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen (On the motion of small particles suspended in liquids at rest)
- A. Einstein, AdP 17, 891 (1905) [31 pp.] Zur Elektrodynamik bewegter Körper (On the Electrodynamics of moving modies).
- A. Einstein, AdP 18, 639 (1905) [3 pp.] Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig? (Does the inertia of a body depend upon its energy content?").

Estes trabalhos tratam, pela ordem, do efeito fotoelétrico, efeito browniano, relatividade restrita e da derivação da famosa fórmula $E = m\,c^2$. São todos fundamentais para o desenvolvimento da física ao longo dos últimos 100 anos.

3.4 Conseqüências dos Princípios da Relatividade Restrita

O material desta seção foi baseado na referência [12].

Vamos agora explorar as conseqüências dos dois princípios básicos da relatividade restrita, discutidos nas duas seções anteriores, a saber[7]:

- *"As leis que descrevem todos os fenômenos naturais são as mesmas em qualquer referencial inercial."*
- *"Existe uma velocidade absoluta c, ou seja, c tem o mesmo valor todos os referenciais inerciais."*

Imediatamente notamos que estes dois princípios não podem ser compatíveis com as transformações de Galileu da mecânica clássica. De acordo com a mecânica de Galileu-Newton, se dois sistemas inerciais de referência S (coordenadas de posição x, y, z e tempo t) e S' (coordenadas de posição x', y', z' e tempo t') são tais que o sistema S' está se movendo com velocidade V_x relativamente à S, as coordenadas de posição e o tempo estão relacionadas pelas transformações

$$\begin{aligned} x' &= x - V_x t \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

Uma conseqüência imediata destas transformações é que se uma partícula possui velocidade $v_x = dx/dt$ no referencial S, sua velocidade no referencial S' será, de acordo com a primeira e a última equações dadas acima,

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{d}{dt'}(x - V_x t) = \frac{d}{dt}(x - V_x t) = v_x - V_x. \tag{3.4.2}$$

Mas, de acordo com o segundo princípio da relatividade restrita existe uma velocidade absoluta, c, que possui o mesmo valor em todos os sistemas inerciais de referência. Portanto, a equação acima não será válida quando $v_x = c$. Temos assim a primeira conseqüência, *negativa*, dos princípios da relatividade restrita, a saber:

As transformações de Galileu estão erradas.

Como vimos na seção anterior, os experimentos de Michelson-Morley, foram os primeiros a fornecer a base fenomenológica para a afirmação acima. Atualmente, são inúmeros os fatos experimentais e aplicações tecnológicas consistentes com os princípios da relatividade restrita, tais como:

- A famosa equvalência entre energia e massa, $E = m\,c^2$, possui diversas aplicações tecnológicas (reatores nucleares, armamentos, etc), além de ser fundamental na interpretação de fenômenos envolvendo partículas elementares.
- A limitação do número de elétrons em uma dada camada atômica é uma conseqüência direta do "casamento" da teoria da relatividade com a teoria qüântica.
- O número de raios cósmicos, possuindo velocidades próximas à c, que atingem a superfície da Terra é aumentado devido a efeitos relativísticos. Esse fato possui implicações, entre outras coisas, na taxa de mutações genéticas, e, portanto, na evolução das espécies.

[7] Parte desta seção foi baseada no livro "Introduction to Electrodynamics", David Griffiths

- O funcionamento dos sistemas de posicionamento global, que utlizam relógios em terra e nos satélites, depende das correções relativísticas (principalmente da relatividade geral).

É importante notar que a mecânica de Galileu-Newton fornece resultados muitos precisos em diversas situações. Por exemplo, toda a descrição de sistemas mecânicos tais como o movimento de projéteis, foguetes, planetas, pêndulos, etc, ou mesmo a descrição de ondas elásticas estudadas nesta disciplina, baseiam-se nas leis da mecânica newtoniana. Portanto, se de fato a relatividade restrita introduz correções às leis da mecânica, tais correções devem ser *pequenas* nos caso mencionados. Não é difícil perceber porque isso ocorre. De acordo com o segundo princípio da relatividade restrita, a velocidade absoluta, c, tem o mesmo valor da velocidade da luz, ou seja, $c = 299.792.458\,\mathrm{m/s}$. Então, segundo a equação (3.4.2) quando as velocidades relativas V_x são pequenas em comparação com c, ou seja $V_x/c \ll 1$, o segundo princípio da relatividade restrita é *aproximadamente válido*, ou seja,

$$c' = c - V_x = c\left(1 - \frac{V_x}{c}\right) \approx c. \tag{3.4.3}$$

Neste sentido, podemos dizer que as leis da mecânica de Galileu-Newton "funcionam" bem quando são aplicadas a situações tais que as velocidades relativas são pequenas em relação à c. Veremos que a mecânica relativística de fato se reduz à mecânica newtoniana no limite $v/c \to 0$, onde v representa o valor típico das velocidades envolvidas nos processos físicos.

Antes de passarmos a derivação das transformações de coordenadas relativísticas, vamos discutir nas próximas sub-seções os conceitos de espaço e tempo e de que forma os princípios da relatividade restrita modificam estes conceitos de uma maneira fundamental.

3.4.1 Relatividade da Simultaneidade

Evento

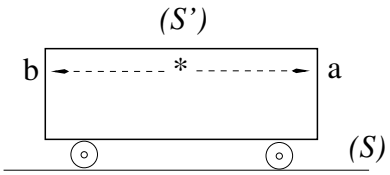
Um dos conceitos mais básicos na descrição de qualquer fenômeno natural é o conceito de *evento*. Um sistema inercial de referência S (coordenadas de posição x, y, z e tempo t) pode ser imaginado como um certo *aparato* (réguas e relógios) capaz de *registrar* a posição (x_0, y_0, z_0) e o tempo t_0 de um determinado evento E_0.

Simultaneidade de eventos

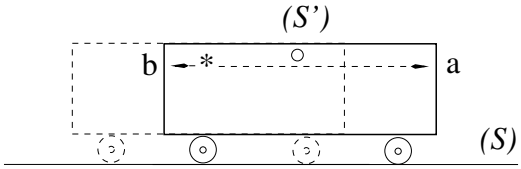
Podemos agora detalhar a noção de *simultaneidade de eventos*. Para isso é suficiente considerarmos inicialmente um exemplo simples. Considere um vagão de trem (referencial S') que está se movendo para a direta em relação ao referencial do dos trilhos (S). Um "flash" de luz é emitido por uma lâmpada que está exatamente no centro do vagão. Vamos analisar os seguintes eventos:

- E_a: O flash atinge o ponto (a), situado na frente do vagão.
- E_b: O flash atinge o ponto (b), situado na traseira do vagão.

Do ponto de vista do referencial S' (vagão) estes dois eventos são *simultâneos*, já que a luz viaja a mesma distância, entre a lâmpada e os pontos (a) e (b), como indicado na figura abaixo.



Para o observador que está em repouso em relação aos trihlos, a luz também viaja com a mesma velocidade c (segundo princípio da relatividade restrita). No entanto, o caminho percorrido pela luz entre a lâmpada e (a) será maior do que o caminho entre a lâmpada e (b). Portanto, para o observador S' (trilhos) o evento (a) ocorre depois do evento (b).



Portanto,

A simultaneidade de eventos que ocorrem em pontos distintos do espaço depende do referencial inercial.

É importante ter claro que toda vez que nos referimos a eventos, tais como E_a e E_b, estamos falando de ocorrências físicas inequivocas; imagine um filme fotográfico (ou um ccd) colocado em nas posições (a) e (b), onde estão também relógios que registram os tempos de chegada do lampejo de luz emitido pela lâmpada.

O *tempo de um evento* é um atributo de eventos simultâneos que ocorrem *no mesmo ponto do espaço*. Por exemplo, o evento "O avião chegou as 10h" significa que houve a simultaneidade dos eventos "chegada do avião" e "posição dos ponteiros do relógio", *no mesmo local* (o aeroporto). Mas se dois eventos ocorrem no *mesmo ponto*, todos os observadores inerciais (ou mesmo não inerciais) observarão estes eventos como simultâneos. Portanto,

A simultaneidade de eventos que ocorrem no mesmo ponto do espaço **não** *depende do referencial.*

Em outras palavras, quando um evento ocorre, ele ocorre para *todos os observadores inerciais*. A ocorrência de um evento é um dado absoluto, independente do *estado de movimento* do observador.

sincronização

Dois relógios dispostos em posições A e B, estarão sincronizados se um observador, parado em relação aos relógios, e situado em um ponto M tal que $\overline{MA} = \overline{MB}$ observa a chegada de sinais luminosos em M *simultaneamente*. Do que vimos acima sobre simultaneidade, conclui-se que um conjunto relógios que estão sincronizodas para o observador S, não estarão sincronizados para o observador S' que se move em relação à S.

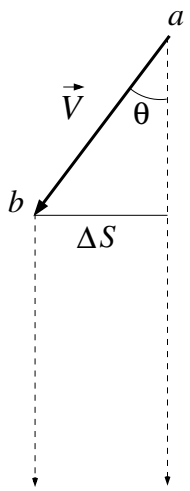
Os dois exercícios seguintes salientam a diferença entre *"ver um evento"* e *"observar um evento"*.

Exercício: Relógios, *devidamente sincronizados*, estão dispostos ao longo de uma reta, separados um do outro por uma distância de 10^9 m. Quando o relógio que está próximo de você marca meio dia:

(a) Qual horário você *vê* marcado no nonagésimo relógio?

(b) Qual horário você *observa* no nonagésimo relógio?

Exercício: Uma estrela está viajando com velocidade $\vec{V}$, formando um ângulo θ com a linha de visão, conforme a figura abaixo.



(a) Determine a *velocidade aparente* da estrela. Ou seja, determine $v_a \equiv \Delta S/\Delta t$. Sugestão: Δt é o intervalo de tempo decorrido entre as duas visualizações, na Terra, dos sinais emitidos em a e b. Expresse a resposta somente em termos de V, c e θ.

(b) Qual é o ângulo θ que resulta no máximo valor da velocidade aparente? (Resposta: $\cos\theta = V/c$)

(c) Mostre que a velocidade aparente pode ser maior do que c, mesmo quando $V < c$. Determine o valor de V/c acima do qual a velocidade aparente se torna maior do que c (resposta: $V/c = \sqrt{2}/2$)

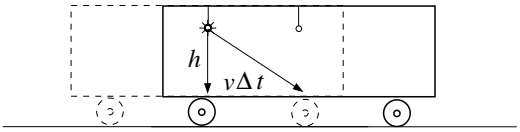
Relação de causa e efeito

Note também que eventos simultâneos que ocorrem *em pontos distintos do espaço*, para algum observador, não podem constituir um par *causa-efeito*, uma vez que a ordem temporal pode ser invertida para um outro observador, como no caso do exemplo acima (observador dos trilhos × observado do vagão).

Por outro lado, eventos que ocorrem *em um mesmo ponto do espaço*, para algum observador, podem constituir um par causa-efeito para qualquer outro observador. De fato, para um outro observador, poderá haver uma separação espacial entre os dois eventos, sempre menor do que o caminho que a luz percorreria entre os dois eventos. Logo os dois eventos podem estar correlacionados por uma relação de causa-efeito via um sinal enviado com velocidade $v \leq c$.

3.4.2 Dilatação do tempo

Voltando ao exemplo dos sistemas do vagão (S') e dos trilhos (S), consideremos agora o raio de luz que segue a trajetória indo da lâmpada até o chão do vagão, como ilustrado na figura abaixo.



Considere os seguintes eventos:

- E_a: Emissão do flash no teto do vagão.
- E_b: Detecção do flash no chão do vagão.

Estes dois eventos são observados pelo referencial S' (vagão) e S (trilhos) com intervalos de tempo respectivamente dados por $\Delta t'$ e Δt. Vejamos qual é a relação entre $\Delta t'$ e Δt.

No referencial S' (vagão) a distância espacial entre E_a e E_b é h. Como esta distância é percorrida pelo raio de luz, que viaja com velocidade c, então o tempo decorrido entre os dois eventos é

$$\Delta t' = \frac{h}{c}. \tag{3.4.4}$$

No referencial S as coordenadas dos eventos E_a e E_b são ($x_a = x_0$, $y_a = h$) e ($x_b = x_0 + v\Delta t$, $y_b = 0$), respectivamente. Portanto, a distância espacial entre E_a e E_b é

$$\sqrt{h^2 + (v\Delta t)^2}. \tag{3.4.5}$$

Esta distância é percorrida pelo raio de luz, que *também* viaja com velocidade c em S (segundo princípio de relatividade restrita). Logo, o intervalo de tempo entre E_a e E_b, medido pelo observador S é

$$\Delta t = \frac{\sqrt{h^2 + (v\Delta t)^2}}{c}. \tag{3.4.6}$$

Usando a equação (3.4.4), teremos

$$\Delta t = \frac{\sqrt{(c\Delta t')^2 + (v\Delta t)^2}}{c}. \tag{3.4.7}$$

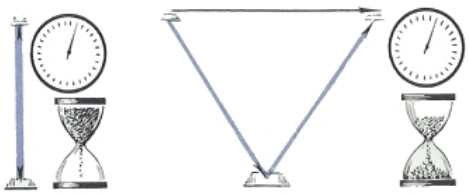
Resolvendo a equação acima para $\Delta t'$, obtemos

$$\Delta t' = \sqrt{1 - v^2/c^2}\,\Delta t. \tag{3.4.8}$$

Exercício: Mostre que *se* o princípio de invariância da velocidade da luz não fosse válido, ou seja, *se* S observasse a luz se propagando com velocidade $\vec{c}_S = v\hat{x} + c\hat{y}$, de modo que $|\vec{c}_S| = \sqrt{v^2 + c^2}$, então $\Delta t' = \Delta t$.

Portanto, o intervalo de tempo entre os dois *mesmos* eventos, E_a e E_b, é diferente para os observadores S e S'. No referencial do trem (S') o intervalo de tempo entre os eventos E_a e E_b é, de acordo com (3.4.8), *menor* do que no referencial S. As duas figuras abaixo[8] ilustram o significado desta relação em termos dos intervalos de tempo medidos por relógios que estão em S' e S.

[8] Esta ilustração foi feita por Anthony Ravielli para o livro *Relativity Simply Explained* de Martin Gardner, Dover Publications, INC.



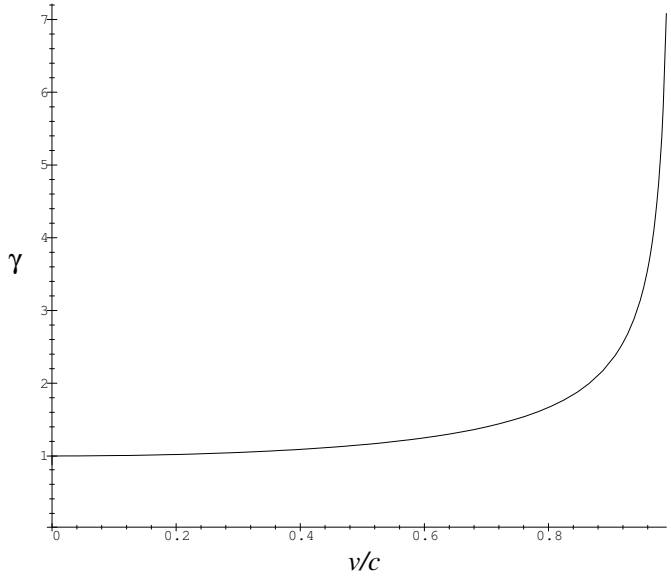
Assim quando observamos um sistema físico em movimento, o intervalo de tempo Δt, atribuido à um determinado processo que, no referencial do sistema, leva um tempo $\Delta t'$, será

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Delta t' = \gamma \Delta t', \tag{3.4.9}$$

onde introduzimos o *fator de dilatação do tempo*

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{3.4.10}$$

A figura abaixo mostra o gráfico do fator γ para um intervalo de velocidades entre 0 e $0,99\,c$.



Obviamente $\gamma = \infty$ quando $v = c$ e γ se torna imaginário quando $v > c$. Será que é possível uma interpretação que faça sentido físico no caso em que $v > c$? Afinal, os números imaginários frequentemente possuem interpretação física e nem sempre representam *soluções indesejáveis* que devem ser "jogadas fora". Será que isso ocorre no caso do fator γ? Voltaremos a esta questão quando tratarmos da mecânica relativística da partícula, ou seja, da descrição de partículas com movimento rápido em relação ao observador inercial.

Exercício: Obtenha a expressão para v em termos de γ e mostre que $\gamma \to 1$ quando $v \to c$.

Tempo próprio

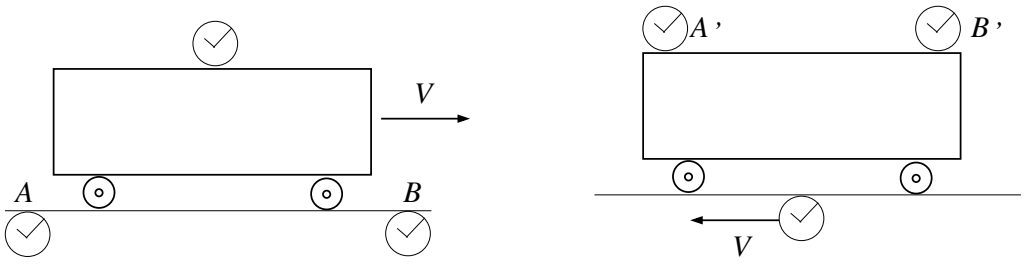
O intervalo de tempo $\Delta t'$ em (3.4.9) é denominado **intervalo de tempo próprio**. Ou seja, o intervalo de tempo medido por um observador que está em repouso em relação ao relógio. Quando

utilizamos um relógio em repouso para medir o intervalo de duração de um processo físico em um sistema também em repouso, estamos medindo o intervalo de tempo próprio do processo. O tempo próprio é uma característica intrínseca do sistema. Por exemplo, um pêndulo realiza um certo número de oscilações que é determinado pelo seu comprimento. Um relógio atômico oscila de acordo com as propriedades intrínsecas do átomo.

De todas as previsões da relatividade restrita, aquela que mais tem recebido confirmação experimental é a *dilatação do tempo*, especialmente quando consideramos os fenômenos físicos envolvendo *partículas elementares*. Muitas das partículas elementares são instáveis, desintegrando (em média) após um tempo próprio característico. Por exemplo, para o neutron esse tempo é de 15 min e para um múon é de 2×10^{-6} s. Mas esses tempos são para as partículas em repouso, ou seja, são os *tempos próprios* de desintegração. Quando estão se movendo com velocidades próximas à velocidade da luz, como ocorre nos aceleradores de partículas, seus "relógios internos" vão mais devagar, fazendo com que durem mais do que em repouso.

Exercício: Uma partícula elementar está se deslocando no laboratório com velocidade igual a $3/5c$. Sabendo que seu tempo de vida (tempo que ela existe antes de se transformar em outras partículas) é de 2×10^{-6} s quando observada em repouso, determine qual será o tempo de vida medido no referencial do laboratório.

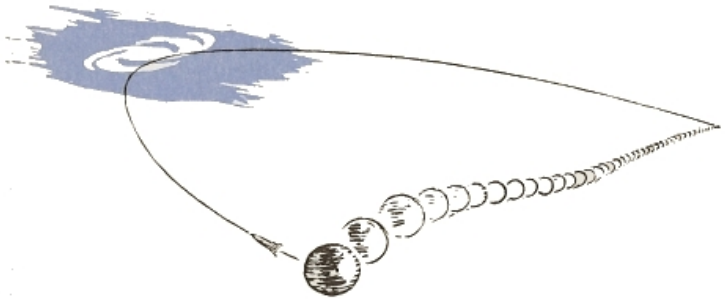
Neste ponto é comum ser confrontado com uma *aparente contradição*. Afinal, se o observador dos trilhos observa o relógio do trem indo mais devagar, então o observador do trem também pode concluir que o relógio dos trilhos anda mais devagar. Na verdade os dois pontos de vista estão corretos. Mas, os *procedimentos* dos dois observadores são, na verdade, *distintos*. O observador dos trilhos compara um relógio do trem com dois relógios *sincronizados nos trilhos*. O observador do trem compara um relógio dos trilhos com dois relógios *sincronizados no trem*. Porque então estes procedimentos são inequivalentes? A resposta é que relógios sincronizados em S não estão sincronizados em S', e vice-versa. Isso ocorre porque quando dizemos que os relógios estão sincronizados em S, significa que todos eles mostram, digamos 12h, *simultaneamente*. Mas nós já sabemos que o conceito de simultaneidade não é absoluto. Portanto, do ponto de vista de S', os relógios de S estão completamente bagunçados (e vice-versa). Ou seja, do ponto de vista de S, o observador S' utilizou relógios não sincronizados para realizar o procedimento de comparação.



Embora o *conjunto de relógios* em movimento não seja sincronizado, sempre é possível analisar um *único relógio* em movimento, e determinar o fenômeno de dilatação do tempo. Todos os relógios em movimento sofrem o mesmo fator de dilatação, mas o procedimento de verificação da dilatação deve ser feito em um único relógio, pois os diversos relógios que passam por nós não estão em sincronia. Por outro lado, podemos usar qualquer número de relógios estacionários (em repouso em relação ao observador), pois todos eles estão em sincronia no nosso referencial. Voltaremos a este problema mais adiante, utilizando as equações para as transformações de Lorentz.

3.4.3 O " paradoxo" das gêmeas

Exercício: Ao fazer 15 anos de idade Bia recebe de presente uma viagem em uma nave espacial que viaja a $(12/13)c$. Após 5 anos de viagem (no relógio de Bia) ela faz meia volta e retorna com a mesma velocidade para se reencontrar com sua irmã gêmea, Deb, que havia ficado em casa. Determine as idades de Bia e Deb no momento do reencontro (a figura abaixo é mais uma bela ilustração de Anthony Ravielli para o livro *Relativity Simply Explained* de Martin Gardner, Dover Publications, INC.)

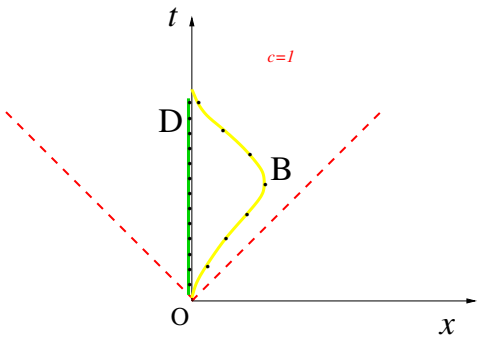


Um cálculo simples mostra que o fator γ no caso do execício acima é $\gamma = 13/5$. Ou seja, o tempo decorrido na Terra será $13/5 \cdot 10 = 26$ anos. Portanto, no reencontro, Deb terá 41 anos e Bia terá 25 anos.

Supondo que Deb e Bia estejam "programadas" para viver o mesmo número de anos, se estivessem permanecido em repouso relativo, será que poderíamos dizer que Bia terá vivido mais do que Deb pelo fato de ter feito a viagem espacial? Analisando com mais cuidado o tempo em que Bia esteve viajando, notamos que todos os seus processos biológicos – metabolismo, pulso, pensamentos, tique nervoso com a perna, etc – estiveram sujeitos ao mesmo efeito de dilatação do tempo. Ou seja, Bia não rejuvenesceu; ela simplesmente fez tudo mais lentamente. Deb, por exemplo, ao longo dos 26 anos, poderia ter completado os estudos básicos, ter vários namorados, completado um curso superior, feito pós-graduação, ter vários filhos, etc. Enquando isso, Bia poderia ter no máximo completado o mestrado (supondo que a nave seja na verdade uma grande colônia de viajantes espaciais).

Vejamos agora qual seria de fato o aparente paradoxo. Ele surge quando a história é contada do ponto de vista de Bia, a viajante. Segundo ela, é Deb que viaja com $12/13c$, faz meia volta e retorna. Portanto, no reencontro, seria Deb que estaria mais jovem. Não vamos analisar agora os detalhes da solução deste pseudo paradoxo. Faremos isso mais adiante utilizando as equações das transformações de Lorentz.

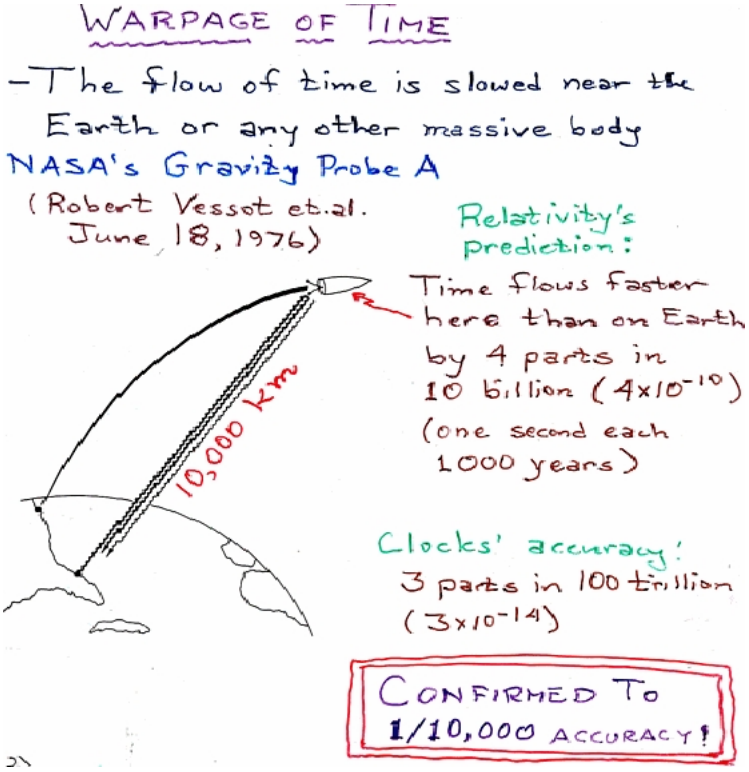
Mas é possível identificar uma falha na formulação do "paradoxo" usando somente os conceitos básicos desenvolvidos até aqui. Da maneira como está formulado, os dois pontos de vista seriam completamente equivalentes. Mas, na verdade *não são equivalentes*. O ponto de vista de Deb é o de um mesmo referencial inercial ao longo de toda a história. Por outro lado, Bia tem que necessariamente realizar um movimento acelerado para realizar sua viagem de retorno à Terra (sem contar que para sair da Terra ela também deveria ser acelerada até uma velocidade de $12/13c$). Ou seja, o referencial de Bia não é um único referencial inercial ao longo de toda a história. A figura abaixo, mostrando o *diagrama de espaço-tempo* com as *linhas de universo* de Bia e de Deb (mais detalhes na seção 3.5.7), ilustra bem a assimetria existente entre os dois pontos de vista.



Quando levamos em conta esta inequivalência, o paradoxo simplesmente evapora.

Mas será que o efeito físico de dilatação do tempo é de fato observado experimentalmente com aparatos macroscópicos (já vimos que não há dúvidas sobre isso em inúmeras situações envolvendo partículas elementares)?

A figura abaixo foi obtida em um palestra on-line, proferida pelo físico Kip Thorne, no sítio http://online.itp.ucsb.edu/online/plecture/thorne/.



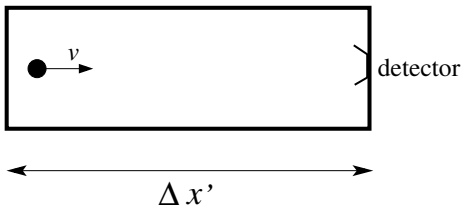
Embora a situação descrita na figura refira-se ao efeito da gravitação sobre os intervalos de tempo, mais adiante, quando abordarmos o princípio de equivalência, veremos qual é a relação entre gravitação e um referencial acelerado, como o de Bia. Na verdade, a principal razão de se mostrar esta figura, é tão somente chamar a atenção para a assombrosa precisão das medidas de tempo. Note que o efeito previsto pela *relatividade geral* é medido com uma precisão de 10^{-4} utilizando um relógio cuja precisão é 3×10^{-14} [9]

[9] Veja a seguinte notícia sobre o relógio mais preciso atualmente:

3.4.4 Contração de FitzGerald-Lorentz (distâncias longitudinais)

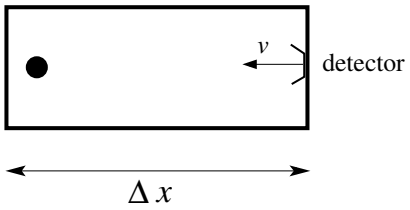
A invariância da velocidade da luz faz com que os conceitos de espaço e tempo fiquem completamente interdependentes. Podemos dizer que o segundo princípio da relatividade restrita *unifica* os conceitos de espaço e tempo[10]. Portanto, é de se esperar que as conclusões a que chegamos sobre a dilatação do tempo, impliquem em relações entre as medidas de distância realizadas pelos observadores S e S'. A derivação que faremos a seguir mostra como isso ocorre.

A figura abaixo mostra uma partícula se movendo em relação ao laboratório.



A distância $\Delta x'$ entre a partícula e o detector é medida usando um sistema de coordenadas rigidamente ligado ao laboratório.

No referencial rigidamente ligado à partícula, é o laboratório que está se movendo em relação à partícula como mostra a figura abaixo.



No primeiro caso (partícula em movimento) o intervalo de tempo entre sua posição atual e o instante em que ela é detectada é *maior* (dilatação do tempo) do que o correspondente intervalo de tempo no referencial em que a partícula está em repouso. Logo, por consistência, no referencial inercial da partícula o laboratório (em movimento) deve ser contraido pelo mesmo fator de dilatação do tempo. De fato, como já mostramos anteriormente, o evento "chegada da partícula ao detector" é independente de referencial. Ou seja, se a partícula é detectada, *todos* os observadores em qualquer referencial terão o registro deste evento. Denotando por Δx e $\Delta x'$ o comprimento do laboratório segundo o ponto de vista S' (laboratório em repouso) e S (laboratório em movimento), respectivamente, teremos então

$$\Delta x' = \gamma \Delta x. \tag{3.4.11}$$

Ou seja, o laboratório em repouso tem um comprimento maior do que o laboratório em movimento.

OPTICAL CLOCKS GET BETTER. Two separate experiments in Colorado compare the frequency of emissions from atoms or ions to an uncertainty of 10^{-16} *or better. Earlier atomic clocks operated by reading out the movements of internal transitions from one quantum state to another in cesium atoms; the light emitted was in the microwave range. With frequency comb techniques (http://www.aip.org/pnu/2008/split/853-1.html) measurement of optical-range frequencies can also be made with high accuracy. In the 28 March 2008 issue of Science two groups reported new superb levels of precision. One experiment, carried out by a JILA/Colorado/ NIST-Boulder team (Ludlow et al.), gauges the uncertainty of a clock based on neutral strontium atoms to a level of* 10^{-16} *by comparing it to a clock using calcium atoms and located a kilometer away. The other experiment, carried out at NIST-Boulder (Rosenband et al), looks at two clocks 100 meters apart. The clocks contain respectively a single aluminum and a single mercury ion. The fractional uncertainty in the ratio of the frequency outputs for the clocks was determined to be* 5.2×10^{-17}. *(NIST information at http://www.nist.gov/public_ affairs/clock/clock.html)*

[10] Veremos que os conceitos de *energia e momento* também são unificados. No eletromagnetismo, os vetores de campos elétrico e magnético são unificados em um único *tensor eletromagnético*. Campos que descrevem outros tipos de interações entre partículas elementares também são parcialmente unificados pela relatividade restrita.

Comprimento próprio

O comprimento de um objeto medido no referencial de repouso do objeto é denominado *comprimento próprio* do objeto.

Dimensões perpendiculares à velocidade não sofrem contração

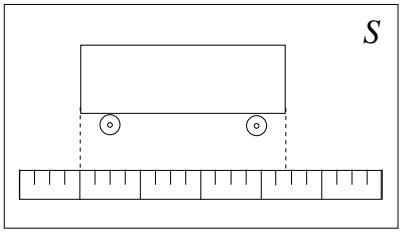
Considere a seguinte situação:

- Observador da plataforma segura um bastão de 1 m de altura posicionado verticalmente.
- Observadora do trem posiciona a mão a 1 m de altura.

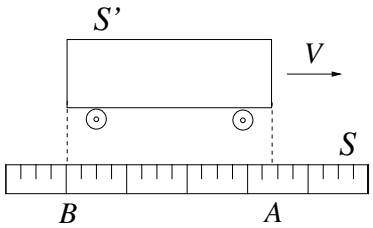
Se, do ponto de vista da observadora do trem o bastão ficasse mais curto, o evento "bastão foi tocado" não ocorreria. Por outro lado, se, do ponto de vista da plataforma a altura da mão da passageira ficasse mais para baixo, então o bastão seria tocado. Não há como conciliar estas duas possibilidades a não ser considerando que *as distâncias perpendiculares ao movimento não sofrem contração*. Somos levados a mesma conclusão se supusermos, por absurdo, que ocorre uma dilatação das dimensões perpendiculares ao movimento.

Como medir distâncias

(a) Régua e objeto a ser medido, ambos em repouso no referencial S.



(b) Régua em repouso em S e objeto a ser medido em movimento (repouso no referencial referencial S').



No caso (a), não há dúvidas sobre como determinar o comprimento do trenzinho; basta fazer duas marcas na régua, correspondentes aos extremos esquerdo e direito do trenzinho e subtrair os valores obtidos.

Também no caso (b), o observador S registra as marcas correspondentes aos extremos do trenzinho. Mas este registro deve ser feito *no mesmo instante de tempo*, de acordo com os relógios devidamente sincronizados em S. Ou seja, o procedimento de medida de comprimento de um objeto em movimento é descrito por dois eventos *simultâneos*:

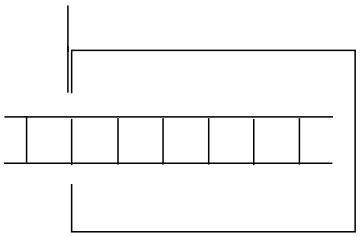
E_A: Registro da extremidade direita.

E_B: Registro da extremidade esquerda.

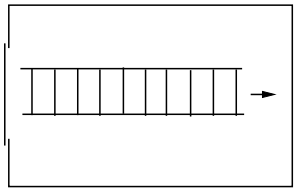
Para a observadora do trenzinho (S') E_A ocorre antes de E_B. Por outro lado, ela julga que a régua utilizada por S sofreu uma contração de Lorentz. A combinação destes dois fatores é portanto consistente com a ocorrência inequívoca dos dois eventos E_A e E_B. No entanto, no referencial (S'), os eventos E_A e E_B não representam uma medida de distância, simplesmente porque não são simultâneos.

Paradoxo da garagem

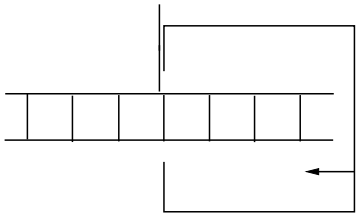
Considere o seguinte problema: O comprimento próprio de uma escada é maior do que o comprimento próprio de uma garagem, como ilustra a figura abaixo.



Alguém tem então a idéia "genial" de aplicar o princípio de relatividade para conseguir colocar a escada dentro da garagem. Para isso a escada é movida com velocidade relativística. Devido à contração de Lorentz o observador que está parado em relação à garagem julgará que a escada cabe dentro da garagem, como mostra a figura seguinte.



No entanto, do ponto de vista do observador que está se movendo com a escada, ocorre o que está esboçado da figura abaixo.



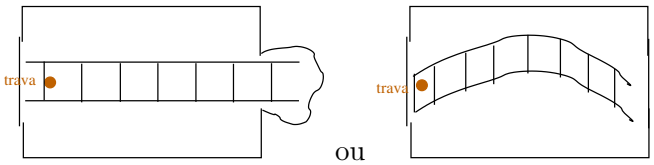
Para analisar corretamente o significado da frase "a escada entrou totalmente na garagem" devemos considerar cuidadosamente os seguintes eventos:

E_a: Extremo esquerdo da escada atinge a porta da garagem.

E_b: Extremo direito da escada atinge o fundo da garagem.

Para o observador da garagem, E_a ocorre antes de E_b, ou seja, a escada fica inteiramente dentro da garagem, *por algum tempo*. Para o observador que se move com a escada, E_b ocorre antes de E_a, ou seja, a escada nunca fica inteiramente dentro da garagem.

Mas o que ocorre quando a escada pára? Este é um novo dado a ser analizado! Veja as possibilidades nas duas figuras abaixo.



3.5 Transformação de Lorentz

3.5.1 Derivação da transformação de Lorentz

Considere um evento qualquer no espaço-tempo e suas coordenadas (x', y', z', t'), em S'. A transformação de Lorentz (TL) é um conjunto de equações que expressa (x', y', z', t'), em termos das coordenadas (x, y, z, t) do mesmo evento em S. Uma vez obtida a TL, todos os resultados discutidos nas seções anteriores, em contextos mais ou menos particulares, podem ser derivados de maneira bastante direta.

Simetrias do espaço-tempo

Suponhamos que S' esteja se movendo com velocidade $\vec{v}$ em relação à S. Levando em conta que a escolha das direções dos eixos de coordenadas pode ser qualquer (isotropia do espaço), podemos realizar *rotações* de modo a fazer com que x e x' coincidam com a direção da velocidade relativa. Além disso, podemos escolher o origem dos sistemas de modo a fazer com que ($x = 0$,$t = 0$) e ($x' = 0$,$t' = 0$) descrevam o mesmo ponto do espaço-tempo (translação). Note que esta liberdade de escolha pressupõe propriedades de *simetria do espaço-tempo*. Na física a palavra *simetria* significa que o fenômeno observado (no caso, os eventos) não são alterados quando certas transformações são realizadas.

Levando em conta que distâncias perpendiculares à direção do movimento relativo são mantidas inalteradas nos dois referenciais (ver seção 3.4.4), a TL procurada pode ser expressa (após as rotações e translação espaço-temporal) como

$$\begin{aligned} x' &= f_x(x,t) \\ t' &= f_t(x,t). \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

Linearidade das TL

Se usarmos novamente a simetria por translações, restrita ao plano (x,t), concluímos que a separação espaço-temporal entre dois eventos E_a e E_b, descrita por S', deve *depender apenas* da separação espaço-temporal entre dois eventos descrita por S, ou seja, usando (3.5.1)

$$\begin{aligned} x'_b - x'_a &= f_x(x_b,t_b) - f_x(x_a,t_a) = f_x(x_b - x_a, t_b - t_a) \\ t'_b - t'_a &= f_t(x_b,t_b) - f_t(x_a,t_a) = f_t(x_b - x_a, t_b - t_a). \end{aligned} \tag{3.5.2}$$

Como os eventos E_a e E_b são quaisquer, a segunda igualdade acima somente será satisfeita se as funções f_x e f_t forem *lineares*. Logo, podemos escrever

$$\begin{aligned} x' &= A\,x + B\,t \\ t' &= C\,x + D\,t, \end{aligned} \tag{3.5.3}$$

onde A, B, C e D são constantes a serem determinadas.

Exercício: Quais são as dimensões físicas das constantes A, B, C e D? Verifique explicitamente, usando a transformação linear (3.5.3), que um movimento uniforme em S também será uniforme em S'.

Ao longo desta seção utilizaremos também o *formalismo matricial* para as transformações lineares. A forma matricial da equação (3.5.3) é

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \tag{3.5.4}$$

Relatividade do movimento

A origem do sistema S' ($x' = 0$) está se deslocando com velocidade v em relação à S, de modo que $x = v\,t$. Substituindo estes valores na primeira equação de (3.5.3), obtemos $0 = Avt + Bt$, ou seja, $B = -vA$. Com isso, restam agora apenas três constantes a serem determinadas e podemos escrever a transformação procurada como

$$\begin{aligned} x' &= A(x - vt) \\ t' &= Cx + Dt, \end{aligned} \tag{3.5.5}$$

Por outro lado, o observador S' descreve o movimento da origem do sistema S ($x = 0$) como $x' = -v\,t'$. Substituindo estes valores nas equações (3.5.5), termos $-vt' = -Avt$ e $t' = Dt$. Portanto, $D = A$, ou seja,

$$\begin{aligned} x' &= A(x - vt) \\ t' &= A\left(\frac{C}{A}x + t\right), \end{aligned} \tag{3.5.6}$$

Restam agora apenas duas constantes, C e A, a serem determinadas. Por conveniência vamos definir as seguintes grandezas: $\gamma_v \equiv A$ e $E_v \equiv C/A$, onde o subscrito v denota que as constantes dependem da velocidade relativa. Desse modo, podemos escrever a equação (3.5.6) como

$$\begin{aligned} x' &= \gamma_v(x - vt) \\ t' &= \gamma_v(E_v x + t). \end{aligned} \tag{3.5.7}$$

Em notação matricial, a equação acima pode ser escrita como

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \gamma_v \begin{pmatrix} 1 & -v \\ E_v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \tag{3.5.8}$$

A seguir determinaremos os valores de γ e E.

Propriedade de grupo

Consideremos agora três referenciais quaisquer S, S' e S''. A velocidade relativa de S' em relação à S é v_1 e a velocidade relativa de S'' em relação à S' é v_2. Então,

$$\begin{aligned} x'' &= \gamma_{v_2}\,(x' - v_2 t'), & x' &= \gamma_{v_1}\,(x - v_1 t), \\ t'' &= \gamma_{v_2}\,(E_{v_2} x' + t'), & t' &= \gamma_{v_1}\,(E_{v_1} x + t), \end{aligned} \tag{3.5.9}$$

ou, em notação matricial,

$$\begin{pmatrix} x'' \\ t'' \end{pmatrix} = \gamma_{v_2} \begin{pmatrix} 1 & -v_{v_2} \\ E_{v_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \gamma_{v_1} \begin{pmatrix} 1 & -v_{v_1} \\ E_{v_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \tag{3.5.10}$$

Combinando as equações (3.5.9), podemos escrever

$$\begin{aligned} x'' &= \gamma_{v_2}\,\gamma_{v_1}\,[(1 - E_{v_1} v_2)x - (v_1 + v_2)t)], \\ t'' &= \gamma_{v_2}\,\gamma_{v_1}\,[(E_{v_1} + E_{v_2})x + (1 - E_{v_2} v_1)t], \end{aligned} \tag{3.5.11}$$

ou, em notação matricial,

$$\begin{pmatrix} x'' \\ t'' \end{pmatrix} = \gamma_{v_2}\,\gamma_{v_1} \begin{pmatrix} 1 & -v_{v_2} \\ E_{v_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -v_{v_1} \\ E_{v_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \tag{3.5.12}$$

Efetuando a multiplicação de matrizes, obtemos

$$\begin{pmatrix} x'' \\ t'' \end{pmatrix} = \gamma_{v_2}\,\gamma_{v_1} \begin{pmatrix} 1 - E_{v_1} v_2 & -v_1 - v_2 \\ E_{v_1} + E_{v_2} & 1 - E_{v_2} v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \tag{3.5.13}$$

A chamada *propriedade de grupo* significa, no presente contexto, que a equação (3.5.11) também representa uma TL entre S'' e S, cuja velocidade relativa é $v_1 + v_2$. Por outro lado, a forma geral da TL é, até aqui, dada pela equação (3.5.7) (ou a forma matricial (3.5.8)). Mas esta forma geral mostra que os coeficientes de x, na primeira equação, e de t, na segunda equação, são idênticos. Logo, como (3.5.11) também é uma TL, devemos ter

$$1 - E_{v_1} v_2 = 1 - E_{v_2} v_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_2}{E_{v_2}} = \frac{v_1}{E_{v_1}}\,. \tag{3.5.14}$$

Na segunda igualdade acima, o lado esquerdo só depende de v_2 e o lado direito só depende de v_1. Portanto, a única maneira de satisfazer esta equação é tomando $v/E_v = a$, com a independente de v, ou seja,

$$E_v = \frac{v}{a}. \tag{3.5.15}$$

Substituindo (3.5.15) em (3.5.7) (e também na forma matricial (3.5.8)), teremos,

$$x' = \gamma_v\,(x - vt), \qquad t' = \gamma_v\,(xv/a + t), \tag{3.5.16}$$

ou, na forma matricial,

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \gamma_v \begin{pmatrix} 1 & -v \\ v/a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \tag{3.5.17}$$

Resta agora apenas a função da velocidade γ_v para ser determinada. A constante fundamental a somente será determinada com a condição física estipulada pelo princípio de constância da velocidade da luz.

Isotropia do espaço

Consideremos agora o resultado da combinação de uma TL de S para S', e, em seguida, a operação inversa de S' para S. Ou seja,

$$\begin{aligned} x &= \gamma_{-v}\,(x' + vt'), & x' &= \gamma_v\,(x - vt), \\ t &= \gamma_{-v}\,(-x'v/a + t'), & t' &= \gamma_v\,(xv/a + t), \end{aligned} \tag{3.5.18}$$

ou, em notação matricial,

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \gamma_{-v} \begin{pmatrix} 1 & v \\ -v/a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \gamma_v \begin{pmatrix} 1 & -v \\ v/a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \tag{3.5.19}$$

Eliminando x' e t' das equações (3.5.18), obtemos

$$x = \gamma_{-v}\,\gamma_v\,(1 + v^2/a)\,x, \qquad t = \gamma_{-v}\,\gamma_v\,(1 + v^2/a)\,t, \tag{3.5.20}$$

ou, em notação matricial,

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \gamma_{-v}\,\gamma_v \begin{pmatrix} 1 & v \\ -v/a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -v \\ v/a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \tag{3.5.21}$$

Efetuando a multiplicação de matrizes, obtemos

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \gamma_{-v}\,\gamma_v \begin{pmatrix} 1+v^2/a & 0 \\ 0 & 1+v^2/a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \tag{3.5.22}$$

As equações (3.5.20) (ou a forma matricial (3.5.22)) devem ser válidas para quaisquer x e t. Logo,

$$\gamma_{-v}\,\gamma_v = \frac{1}{1+v^2/a}\,. \tag{3.5.23}$$

Essa condição também pode ser interpretada como sendo uma conseqüência da existência do elemento *identidade* do grupo de transformações.

Se γ_v dependesse do sentido da velocidade a *isotropia do espaço*, que utilizamos logo no início, não seria válida. Para explicitar mais esse fato, suponha que façamos uma mudança de sinal nas coordenadas espaciais, nos dois referenciais, mudando (x, x') para $(-x, -x')$. Neste caso, as equações (3.5.16) mudam para

$$-x' = \gamma_{-v}\,(-x+vt), \qquad t' = \gamma_{-v}\,(-x(-v)/a+t), \tag{3.5.24}$$

(note que mudamos também a velocidade relativa de v para $-v$). Cancelando os sinais, obtemos,

$$x' = \gamma_{-v}\,(x-vt), \qquad t' = \gamma_{-v}\,(xv/a+t), \tag{3.5.25}$$

A imposição de que esta transformação seja fisicamente equivalente à transformação original (isotropia) resulta em $\gamma_{-v} = \gamma_v$. Substituindo esta condição em (3.5.23), obtemos

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1+v^2/a}}\,. \tag{3.5.26}$$

Velocidade absoluta

Substituindo a equação (3.5.26) nas equações (3.5.16) e (3.5.17), encontramos as seguintes expressões para a TL

$$x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1+v^2/a}}, \qquad t' = \frac{xv/a+t}{\sqrt{1+v^2/a}}, \tag{3.5.27}$$

ou, em notação matricial,

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+v^2/a}} \begin{pmatrix} 1 & -v \\ v/a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \tag{3.5.28}$$

Assim, obtivemos a transformação mais geral possível, entre referenciais inerciais, compatível com as simetrias do espaço-tempo. Estas transformações possuem um parâmetro a, com dimensão de quadrado de velocidade.

Esta derivação mostra que a relação mais geral entre referenciais inerciais poderia ter sido obtida muito antes de terem surgido todas as controvérsias sobre o problema do éter, etc. As transformações (3.5.27) foram derivadas usando apenas as simetrias do espaço que já fazem parte da física newtoniana. Toda a diferença entre a física newtoniana e a relativística está no valor a ser atribuído ao parâmetro a. Isso parece simples...**mas não é!** A seguir introduziremos a condição física adicional que determina este parâmetro.

Exercício: Determine qual deve ser o valor da constante a na equação (3.5.27), para que um movimento com velocidade c no referencial S também seja um movimento com velocidade c no referencial S'. Sugestão: use $x = ct$ e $x' = ct'$ e resolva as equações para a.

O resultado do exercício acima mostra que

$$a = -c^2. \tag{3.5.29}$$

Neste caso, as equações (3.5.27) e (3.5.28) nos dão

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad t' = \frac{t - xv/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{3.5.30}$$

ou, em notação matricial,

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -v/c^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \tag{3.5.31}$$

Essa é a transformação de Lorentz que permite expressar as coordenadas do sistema S em termos das coordenadas do sistema S'.

Portanto, podemos identificar a velocidade c com a velocidade da luz, quando levamos em conta as previsões feitas pelo eletromagnetismo, ou seja, a luz é uma onda eletromagnética que se propaga com velocidade c em todos os referenciais inerciais.

3.5.2 Transformação de Galileu

É interessante considerar o caso especial (não físico) em que é permita a propagação de sinais com velocidade infinita, ou seja, fazendo $a = \infty$, nas equações (3.5.27) e (3.5.28). Isso nos leva a transformação de Galileu

$$x' = x - vt, \qquad t' = t, \qquad \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \tag{3.5.32}$$

3.5.3 Contração de Lorentz

Podemos agora analisar novamente o fenômeno de contração de Lorentz usando a transformação de Lorentz (3.5.30). Imagine uma barra se movendo para a esquerda com velocidade v. Seu comprimento próprio (comprimento em repouso) é $\Delta x' = x'_d - x'_e$, onde os subscritos denotam as extremidades direita e esquerda, respectivamente. Um observador S mede o comprimento da barra subtraindo as posições dos extremos *no mesmo instante de tempo*, ou seja, $\Delta t = t_d - t_e = 0$ e $\Delta x = x_d - x_e$. Usando a transformação de Lorentz (3.5.30), teremos

$$x'_d - x'_e = \gamma[(x_d - x_e) - v \underbrace{(t_d - t_e)}_{=0}] = \gamma(x_d - x_e). \tag{3.5.33}$$

Portanto,

$$\Delta x = \frac{1}{\gamma} \Delta x'. \tag{3.5.34}$$

Esse é o efeito de contração de Lorentz já discutido na seção 3.4.4.

3.5.4 Transformação de Lorentz em qualquer direção

Estude a seção 6.4 do vol. 4 do "Curso de Física Básica", Herch Moysés Nussenzveig [4].

3.5.5 Simultaneidade e sincronização

Uma primeira conseqüência simples da TL é a relatividade da smultaneidade e sincronização. Suponha que um evento A ocorra em $x_A = 0$ e $t_A = 0$, e um evento B ocorra em $x_B = b$ e $t_B = 0$. Ou seja, eventos simultâneos em pontos distintos do espaço. Em outro referencial inercial S', cuja origem do espaço tempo coincida com a de S, teremos, de acordo com (3.5.30), $x'_A = 0$ e $t'_A = 0$, $x'_B = \gamma b$ e $t'_B = -\gamma v/c^2 b$. Ou seja, em S' o evento B ocorre *antes* do evento A, como já havíamos discutido na seção 3.4.1 com o exemplo do trenzinho.

Suponha agora que em $t = 0$ o observador S decida examinar *todos* os relógios de S' que estão ao longo da direção x. De acordo com (3.5.30) esses relógios (que se movem no referencial S) marcam tempos dados por

$$t' = -\gamma \frac{v}{c^2} x. \tag{3.5.35}$$

Para $x < 0$ (esquerda da origem) todos os relógios estão adiantados e para $x > 0$ (direita da origem) todos os relógios estão atrasados. Esse é o efeito da não sincronia de relógios em movimento, discutido na seção 3.4.1.

3.5.6 Intervalos de Espaço-Tempo

Exercício: Verifique que a transformação (3.5.30) (ou a forma matricial (3.5.31)) deixa invariante a grandeza

$$s^2 \equiv (x)^2 - (ct)^2 \tag{3.5.36}$$

O resultado do exercício mostra que todos os observadores inerciais descrevem os eventos do espaço-tempo com o mesmo valor de s. A invariância do intervalo amarra os conceitos de espaço e tempo. Ou seja, espaço e tempo não podem mais ser julgados como grandezas independentes. Nas próximas seções derivaremos as principais conseqüências desta unificação do espaço com o tempo, como por exemplo, a dilatação do tempo e a contração das distâncias.

Invariantes relativísticos tais como s são de grande importância na física. Quando uma grandeza invariante é medida em um determinado referencial inercial, o valor obtido será o mesmo para qualquer outro observador inercial. Muitas vezes é possível encontar um referencial tal que o cálculo do invariante é simplificado.

Há aqui uma interessante analogia com a *invariância da distância* r entre dois pontos do espaço euclidiano, tal que

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \tag{3.5.37}$$

sob *rotações*. Neste caso, r é o mesmo para diferentes observadores que utilizam sistemas de coordenadas que diferem por rotações. Por exemplo,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{3.5.38}$$

Exercício: Mostre que r é invariante sob a transformação acima. Suponha que $a = \sigma^2 > 0$ na equação (3.5.27). Mostre que neste caso a transformação é uma rotação que leva $(x, \sigma t)$ em $(x', \sigma t')$. Determine o ângulo de rotação.

Se realizarmos uma translação espaço-temporal de modo que o evento correspondente à origem é transladado para (x_1, t_1) e o evento (x, t) para (x_2, t_2), teremos a forma explicitamente mais geral para o intervalo entre dois eventos quaisquer, dada por

$$(s_{12})^2 = (x_2 - x_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2. \tag{3.5.39}$$

Fazendo também uma rotação espacial teremos,

$$(s_{12})^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2. \tag{3.5.40}$$

Podemos também considerar eventos *infinitesimalmente próximos*, de tal forma que

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - c^2(dt)^2. \tag{3.5.41}$$

A grandeza ds é o elemento invariante de "distância" no *epaço-tempo de Minkowski* [11]. Neste espaço-tempo, o análogo da transformação de rotação é a TL.

Ao contrário da distância r entre dois pontos do espaço, s_{12} poder ser positiva ou negativa. É conveniente introduzir as seguintes definições:

(a) $s_{12} < 0$: intervalo do tipo tempo.

(b) $s_{12} = 0$: intervalo do tipo luz.

(c) $s_{12} > 0$: intervalo do tipo espaço.

Devido ao caráter absoluto de s_{12} as três possibilidades acima são características intrínsecas de pares de eventos, ou seja, todos os observadores inerciais atribuirão o mesmo valor ao intervalo de espaço-tempo entre dois eventos.

Intervalo do tipo tempo e velocidade limite

No caso $s_{12}^2 < 0$, a separação espacial entre os eventos, $|x_2 - x_1|$, é *menor* do que a distância $c|t_2 - t_1|$ que a luz percorreria no mesmo intervalo de tempo. Portanto, *é possível* que os eventos ocorridos em x_1 e x_2 estejam correlacionados por um sinal que se propaga com velocidade $V < c$.

Suponhamos que de fato os eventos estejam correlacionados por um sinal se propaga com velocidade V, ou seja, $(x_2 - x_1)^2 = V^2(t_2 - t_1)^2$. Usando (3.5.39) podemos escrever

$$(s_{12})^2 = (x_2 - x_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = (V^2 - c^2)(t_2 - t_1)^2 < 0 \tag{3.5.42}$$

Esta relação mostra que

$$|V| < c \tag{3.5.43}$$

[11] Em 1908 o geômetra russo-alemão Hermann Minkowski, que havia sido professor de Einstein na Polytechnic de Zürich , introduziu o conceito de espaço-tempo (veja o artigo "Space and Time" de Hermann Minkowski nas páginas 75 a 91 da referência [13]). Repoduzimos aqui a tradução para o inglês de um trecho da introdução que se tornou famoso: *The views of space and time which I wish to lay before you have sprung from the soil of experimental physics, and therein lies their strength. They are radical. Henceforth space by itself, and time by itself, are doomed to fade away into mere shadows, and only a kind of union of the two will preserve an independent reality.*

em todos os referenciais inerciais, uma vez que s_{12} é um invariante relativístico. Note que a velocidade V não será a mesma para os diferentes observadores inerciais (em particular, $V = 0$ no sistema inercial onde os eventos ocorrem no mesmo ponto do espaço). Mas, *se* V é a velocidade de *algo que se propaga de modo a correlacionar eventos* (um sinal), então $V < c$. Tal limitação deve se aplicar também à velocidade relativa entre referenciais inerciais, uma vez que referenciais inerciais são constituídos de objetos concretos tais como réguas e relógios.

Causalidade

De acordo com (3.5.39) é possível ter as seguintes *sucessões de eventos*

$$t_2 - t_1 > \frac{|x_2 - x_1|}{c} > 0$$
$$t_2 - t_1 < -\frac{|x_2 - x_1|}{c} < 0. \tag{3.5.44}$$

Será que a sucessão de eventos também é um invariante relativístico? Considere a mesma sucessão de eventos como julgada por um observador inercial S' que se desloca com velocidade v em relação a S. De acordo a transformação de Lorentz (3.5.30),

$$t'_2 - t'_1 = \gamma \left[(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2} (x_2 - x_1) \right]. \tag{3.5.45}$$

Supondo que $t_2 - t_1 > 0$ e que $x_2 - x_1 = V(t_2 - t_1)$, ou seja, a propagação de um sinal de x_1 para $x_2 > x_1$ com velocidade V, teremos

$$t'_2 - t'_1 = \gamma (t_2 - t_1) \left(1 - \frac{vV}{c^2} \right). \tag{3.5.46}$$

Levando em conta que, de acordo com o resultado da seção anterior, a velocidade V do sinal e a velocidade relativa v são ambas menores do que c, a relação acima mostra que $t_2 - t_1 > 0$ se e somente se $t'_2 - t'_1 > 0$. portanto, não é possível inverter a ordem temporal de eventos que estão correlacionados pela propagação de um sinal. A ordem temporal é um invariante relativístico. Esse resultado está de acordo com o *princípio de causalidade*, segundo o qual, não é possível, por exemplo, nascer antes dos pais legítimos.

Tempo próprio

Exercício: Mostre que, no caso $s_{12}^2 < 0$, pode existir um referencial inercial S' onde os eventos ocorrem no mesmo ponto do espaço. Determine a velocidade relativa deste referencial.

Solução: Quando $x'_1 - x'_2 = 0$, o intervalo (3.5.42) é

$$(s_{12})^2 = -c^2(t'_2 - t'_1)^2 = -c^2 \Delta\tau^2 \tag{3.5.47}$$

Portanto, $(s_{12})^2 < 0$. O intervalo

$$\Delta\tau = t'_2 - t'_1 \tag{3.5.48}$$

é o intervalo de tempo próprio, ou seja, o intervalo de tempo medido por um relógio estacionário.

Usando $x'_2 - x'_1 = 0$ na transformação de Lorentz (3.5.30), teremos

$$0 = \gamma[x_2 - x_1 - V(t_2 - t_1)]. \tag{3.5.49}$$

Portanto, a velocidade relativa é

$$V = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \tag{3.5.50}$$

Ou seja, S' se move em relação à S, passando por x_1 em t_1 e chegando em x_2 em t_2.

dilatação do tempo

Um observador S' mede um intervalo de tempo $\Delta t'$ em um relógio que está em repouso em relação à S'. Os eventos que caracterizam essa media são os seguintes:

E_a: Em em $t' = 0$ é disparado um cronômetro na origem $x = 0$.

E_b: Em $t' = \Delta t'$ o cronômetro é interrompido na origem $x = 0$.

Portanto, o valor do intervalo invariante de espaço-tempo é, de acordo com (3.5.36),

$$s^2 = 0 - c^2(\Delta t')^2 = -c^2(\Delta t')^2 \tag{3.5.51}$$

Como o intervalo é invariante, um outro observador inercial S cuja origem do espaço-tempo coincida com a de S', atribuirá ao evento E_b valores $x_b = \Delta x$ e $t_b = \Delta t$ tais que

$$-c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 = -(\Delta t')^2 \tag{3.5.52}$$

Mas $\Delta x = v\Delta t$ (v é a velocidade relativa entre os observadores inerciais). Portanto,

$$\Delta t = \Delta t' \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma \Delta t'. \tag{3.5.53}$$

Esse é o efeito de dilatação do tempo que já discutimos anteriormente na seção 3.4.2.

Exercício: Obtenha o efeito de dilatação do tempo diretamente da transformação de Lorentz.

Intervalo do tipo espaço

Consideremos agora um par de eventos tal que $(s_{12})^2 > 0$, ou seja eventos cujo intervalo é do tipo espaço. Neste caso, de acordo com a equação (3.5.40) teremos

$$|x_2 - x_1| > c|t_2 - t_1|. \tag{3.5.54}$$

Ou seja, um evento não pode ser causa do outro. De fato, nenhum sinal com velocidade $V \leq c$ pode ligar um evento ao outro.

Podemos mostrar que sempre existirá um referencial tal que os eventos com intervalo do tipo espaço ocorrem em um mesmo instante de tempo. Para isso, basta mostrar que existe um referencial inercial S' com velocidade relativa $V < c$. Usando a transformação de Lorentz (3.5.30) com a condição $t'_2 - t'_1 = 0$, teremos

$$0 = \gamma \left[(t_2 - t_1) - \frac{V}{c^2} (x_2 - x_1) \right]. \tag{3.5.55}$$

Portanto,

$$\frac{V}{c} = c \frac{t_2 - t_1}{x_2 - x_1} < 1, \tag{3.5.56}$$

onde usamos a relação (3.5.54). Logo, $V < c$. Neste referencial a grandeza

$$(s_{12})^2 = (x'_2 - x'_1)^2 \tag{3.5.57}$$

é a *distância própria* entre os dois eventos.

Mas podemos também encontrar um referencial tal que a ordem temporal dos eventos pode ser invertida. De fato, supondo que $t_2 > t_1$ no referencial S, teremos no referencial S'

$$t'_2 - t'_1 = \gamma \left[(t_2 - t_1) - \frac{V}{c^2} (x_2 - x_1) \right]. \tag{3.5.58}$$

De acordo com a relação (3.5.54) $(x_2 - x_1)/c$ pode ser arbitrariamente maior do que $t_2 - t_1$. Então, caso $x_2 - x_1$ seja positivo, $t'_2 - t'_1$ poderá ser negativo. Como não há relação causal entre os eventos de tipo espaço, a relatividade da ordem temporal é fisicamente consistente.

Intervalo do tipo luz

Quando $(s_{12})^2 = 0$, teremos

$$|x_2 - x_1| = c|t_2 - t_1|. \tag{3.5.59}$$

Portanto os dois eventos podem ser ligados por um sinal que se propaga com a velocidade da luz.

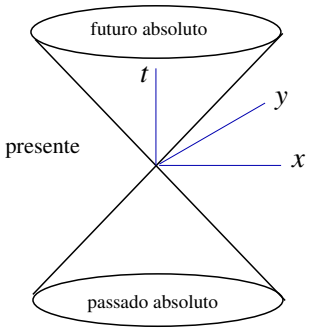
3.5.7 O cone de luz

Vamos agora analisar os resultados acima do ponto de vista geométrico.

Dado um evento qualquer E_0, podemos construir um certo "volume" de eventos E_p, que podem ser a causa de E_0, e um certo "volume" de eventos E_f que podem ser causados por E_0. Os conjuntos E_p e E_f são chamdos respectivamente de "passado absoluto" e "futuro absoluto" em relação à E_0. Se adotarmos um sistema inercial tal que E_0 coincide com a origem do espaço-tempo, os pontos correspondentes à E_p formam um hipercone cuja hipersuperfície é

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0. \tag{3.5.60}$$

Os pontos da hipersuperfície representam eventos que somente podem ser causa ($t < 0$) ou efeito ($t > 0$) de E_0 via *propagação de um sinal com velocidade c* (luz, por exemplo). Porisso a hipersuperfície é denominada *cone de luz*. Adodanto E_0 como o evento que representa o presente, os pontos que estão contidos no hipercone representarão o passado absoluto e o futuro absoluto respectivamente para $t < 0$ e $t > 0$. A figura abaixo é uma representação simplificada no caso de um espaço com somente duas dimensões espaciais.



Interpretação geométrica dos eventos do tipo tempo e do tipo espaço

Consideremos por simplicidade somente uma coordenada espacial. Um ponto (x, t) no interior do cone de luz satisfaz a condição

$$t^2 - (x/c)^2 = \tau^2, \tag{3.5.61}$$

onde τ^2 é tempo próprio invariante sob a transformação de Lorentz. Reescrevendo essa relação como

$$t = \pm\frac{1}{c}\sqrt{c^2\tau^2 + x^2}, \tag{3.5.62}$$

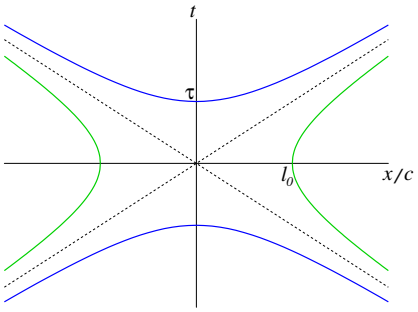
vemos que existem duas curvas, uma para cada sinal de t. Em cada uma destas curvas, um ponto pode ser obtido de outro fazendo uma transformação de Lorentz. Mas não é possível conectar pontos de curvas distintas por uma trasnformação de Lorentz. De fato, sabemos que o sinal de t não pode ser invertido, por uma TL, no interior do cone de luz.

Por outro lado, o conjunto de pontos exterior ao cone de luz é tal que (verifique)

$$x = \pm\sqrt{l_0^2 + c^2t^2}, \tag{3.5.63}$$

onde l_0 é o invariante comprimento próprio. Como estamos considerando uma dimensão espacial, as duas curvas parecem não estar conectadas. Na verdade, podemos considerar, sem perda de generalidade, apenas uma curva; a rotação em torno do eixo t produz uma superfície. Novamente, os pontos desta curva são gerados por transformações de Lorentz. Porém, neste caso, há pontos com $t < 0$ que são levados em pontos com $t > 0$. Ou seja, é possível inverter uma sucessão de eventos fazendo uma transformação de Lorentz. Esse é o resultado que já obtivemos anteriormente de forma analítica.

A figura abaixo mostra duas hipérboles formadas por eventos do tipo tempo (azul), correspondentes à equação (3.5.62), e duas de tipo espaço (verde), correpondentes à equação (3.5.63). Os cones de luz estão esboçados pelas linhas tracejadas.



3.5.8 Composição de velocidades

Vejamos agora como a velocidade de uma partícula é descrita em dois referenciais inerciais S e S' com velocidade relativa v ao longo do eixo x. Suponha que a partícula esteja se movendo com velocidade

$$\vec{u} = u_x\hat{x} + u_y\hat{y} + u_z\hat{z} \tag{3.5.64}$$

no referencial S. As componentes da velocidade são

$$u_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad u_x = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \quad \text{e} \quad u_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}. \tag{3.5.65}$$

No referencial S' teremos, usando a TL (3.5.30),

$$u'_x = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}\left[\gamma\left(x - vt\right)\right]}{\mathrm{d}\left[\gamma\left(t - vx/c^2\right)\right]} = \frac{\mathrm{d}x - v\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t - v\mathrm{d}x/c^2} = \frac{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t - v}{1 - (v/c^2)(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)}. \tag{3.5.66}$$

Portanto,

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v\,u_x}{c^2}}. \tag{3.5.67}$$

Para as componentes u'_y e u'_z, teremos

$$u'_y = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\left[\gamma\left(t - vx/c^2\right)\right]} = \frac{1}{\gamma}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t - v\mathrm{d}x/c^2} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{1-(v/c^2)(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)} \tag{3.5.68}$$

e

$$u'_z = \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\left[\gamma\left(t - vx/c^2\right)\right]} = \frac{1}{\gamma}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t - v\mathrm{d}x/c^2} = \frac{\mathrm{d}z/\mathrm{d}t}{1-(v/c^2)(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)}. \tag{3.5.69}$$

Portanto,

$$u'_{y,z} = \frac{u_{y,z}}{\gamma\left(1 - \frac{v\,u_x}{c^2}\right)}. \tag{3.5.70}$$

Exercício: Mostre que:

(a) se $\vec{u} = c\hat{x}$ então $\vec{u}'_x = c$, $u'_y = u'_z = 0$.

(b) se $\vec{u} = c\hat{y}$ então $\vec{u}'_x = -v$, $u'_y = u_y/\gamma$ e $u'_z = 0$.

(c) se $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = c^2$ então $(u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (u'_z)^2 = c^2$.

Solução: Use as equações (3.5.67) e (3.5.70).

Exercício: Use as equações (3.5.67) e (3.5.70) para determinar o valor de γ' no referencial S'. (Sugestão: veja a equação (A.1.4).)

3.6 Efeito Doppler relativístico

[Seção 6.8, vol. 4 do "Curso de Física Básica", H. Moysés Nussenzveig.]

Consideremos uma onda plana que se propaga com a velociade absoluta c. A *fase* desta onda em um referencial S, cujas coordenadas são x, y, z e t, é (veja a equação (2.2.6); por simplicidade a *constante de fase* foi considerada nula)

$$\phi = k_x x + k_y y + k_z z - \omega t = \vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t \tag{3.6.1}$$

($\vec{x} \equiv x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$). Usando $\vec{k} = |\vec{k}|\hat{u} = \frac{\omega}{c}\,\hat{u}$ (onda se propagando direção $\hat{u}$ com velocidade c), teremos

$$\phi = -\omega\left(t - \frac{\hat{u}\cdot\vec{x}}{c}\right) = -2\pi\nu\left(t - \frac{\hat{u}\cdot\vec{x}}{c}\right). \tag{3.6.2}$$

Definimos agora a grandeza $F(\vec{x}, t)$ tal que

$$\phi = -2\pi F(\vec{x}, t), \tag{3.6.3}$$

ou seja,

$$F(\vec{x}, t) = \nu\left(t - \frac{\hat{u}\cdot\vec{x}}{c}\right). \tag{3.6.4}$$

Considere agora instantes sucessivos t_n para os quais F adquire valores inteiros $n = 0, 1, 2, \ldots$, em um ponto descrito pela origem espacial do sistema S, ou seja, $F(0, t_n) = n$. Como nestes instantes, $\phi = -2\pi n$, então, no instante t_{n+1} a onda tem o mesmo valor que no instante t_n. Podemos dizer que a sucessão de valores $F(0, t_n)$ constituem uma seqüência de *eventos idênticos* no ponto $\vec{x} = 0$.

Levando em conta a propagação da onda, a mesma seqüência de eventos também ocorrerá em um outro ponto $\vec{x}$, distante da origem, em instantes $t_n + t_0$, tais que

$$t_0 = \frac{\hat{u} \cdot \vec{x}}{c}. \tag{3.6.5}$$

Naturalmente, os "eventos" são *frentes de onda* que passam pela origem e se propagam até o ponto $\vec{x}$. A grandeza

$$F(0, t_n) = n = \nu(t_n - t_0) \tag{3.6.6}$$

fornece a contagem destes pares frentes de onda.

Um outro observador em um sistema qualquer S' observará a mesma contagem n. Mas sabemos que o observador em S' atribuirá valores distintos para as coordenadas de espaço-tempo. Portanto, para manter n invariante na equação (3.6.6) o valor de ν também deverá mudar para um valor diferente ν'. Essa mudança na freqüência ν é o *efeito Doppler relativístico*, ou seja, o efeito Doppler para uma onda que se propaga com a velocidade absoluta c, como por exemplo a luz.

Podemos agora expressar ν' em termos de ν, usando a invariância de n, ou seja,

$$\nu' \left(t'_n - t'_0\right) = n = \nu \left(t_n - t_0\right). \tag{3.6.7}$$

Usando (3.6.5), teremos

$$\nu' \left(t'_n - \frac{\hat{u}' \cdot \vec{x}'}{c}\right) = \nu \left(t_n - \frac{\hat{u} \cdot \vec{x}}{c}\right). \tag{3.6.8}$$

Supondo que o ponto $\vec{x}$ esteja no plano xy e que S' esteja se movendo ao longo da direção x, ou seja

$$\hat{u} = \cos\theta\, \hat{x} + \text{sen}\theta\, \hat{y} \tag{3.6.9}$$

e

$$\hat{u}' = \cos\theta'\, \hat{x}' + \text{sen}\theta\, \hat{y}', \tag{3.6.10}$$

podemos escrever a relação (3.6.8) como

$$\nu' \left(t'_n - \frac{x' \cos\theta'}{c} - \frac{y' \text{sen}\theta'}{c}\right) = \nu \left(t_n - \frac{x\cos\theta}{c} - \frac{y\text{sen}\theta}{c}\right). \tag{3.6.11}$$

Podemos agora usar a inversa das TL (3.5.30), expressando x, y, t em termos de x', y', t'. Fazendo isso na equação (3.6.11), teremos

$$\nu' \left(t'_n - \frac{x' \cos\theta'}{c} - \frac{y' \text{sen}\theta'}{c}\right) - \nu \left[\gamma \left(t'_n + \frac{vx'}{c^2}\right) - \frac{\cos\theta}{c}\gamma \left(x' + vt'\right) - \frac{y' \text{sen}\theta}{c}\right] = 0. \tag{3.6.12}$$

Como a identidade acima deve ser válida para quaisquer valores de x', y' e t', então, os respectivos coeficientes devem ser iguais a zero, ou seja,

$$\nu' - \gamma\nu + \gamma\beta\nu\cos\theta = 0, \tag{3.6.13}$$

$$-\nu' \frac{\cos\theta'}{c} - \frac{\beta\gamma\nu}{c} + \frac{\gamma\nu}{c}\cos\theta = 0 \tag{3.6.14}$$

e

$$-\nu' \frac{\text{sen}\theta'}{c} + \frac{\nu}{c}\text{sen}\theta = 0, \tag{3.6.15}$$

onde $\beta = v/c$. Destas relações obtemos os seguinte valores para a freqüência e ângulo no referencial S':

$$\nu' = \gamma\nu\,(1 - \beta\cos\theta) \tag{3.6.16}$$

e

$$\tan\theta' = \frac{1}{\gamma}\frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta - \beta}. \tag{3.6.17}$$

Esta última equação descreve o fenômeno de aberração da luz emitida por um objeto em movimento.

O efeito Doppler relativístico é descrito pela equação (3.6.16). É interessante comparar este resultado com o que foi obtido, no caso de ondas sonoras, nas equações (2.2.23) e (2.2.28) respectivamente para um observador em movimento em relação ao ar e para a fonte em movimento. Como já havíamos salientado, no caso do som, o referencial do ar faz com que as duas situações sejam distintas.

Note que o efeito Doppler relativístico existe mesmo quando o movimento raltivo de dá na direção perpendicular à propagação da onda, ou seja, quando $\theta = \pi/2$, teremos

$$\nu' = \gamma\nu = \frac{\nu}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{3.6.18}$$

Neste caso, o efeito é menos pronunciado, sendo de *segunda ordem* em v/c (veja o próximo exercício).

Exercício: Considere as equações (2.2.23) e (2.2.28) para o efeito Doppler sonoro.

(a) Mostre que o efeito Doppler sonoro desaparece quando $\zeta = \theta = \pi/2$ (efeito Doppler transverso).

(b) Considere agora o caso $\zeta = \theta = 0$. Supondo que as velocidades V e u (observador ou fonte em movimento) sejam pequenas em relação à velocidade do som v, mostre que as duas expressões para o efeito Doppler sonoro diferem apenas por termos de segunda ordem em u/v ou u/v.

(c) Obtenha a expressão para o efeito Doppler relativístico até termos de segunda ordem em β. Mostre que o efeito Doppler transverso ($\theta = \pi/2$) é de segunda ordem em β.

3.6.1 Efeito Doppler e a expansão no Universo

3.7 Mecânica relativística

Vimos que a transformação mais geral entre referenciais inerciais, compatível com as simetrias do espaço-tempo, é a dada pela equação (3.5.27). Quando levamos em conta a existência de uma velocidade absoluta c obtivemos a TL dada pela equação (3.5.30). Vimos também que a transformarão de Galileu é um caso particular de (3.5.27) quando $a \to \infty$. Por outro lado, as leis de Newton da mecânica somente mantém a mesma forma em diferentes sistemas inerciais, quando é utilizada a transformarão de Galileu. Portanto, a mecânica de Newton deve ser modificada de tal forma a manter a mesma forma sob a transformarão de Lorentz.

O material desta seção foi baseado na referência [12].

3.7.1 Velocidade

Assim como o espaço-tempo, o conceito de velocidade é um dos mais básicos em qualquer descrição de um sistema mecânico. Vimos na seção 3.5.6 que qualquer objeto físico que se desloca no espaço, o faz com velocidade $|\vec{u}| < c$. Portanto, a *linha de universo* seguida por uma partícula deve ser do tipo tempo. Ou seja,

$$c^2 \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 = c^2 \mathrm{d}\tau^2, \tag{3.7.1}$$

onde τ é o tempo próprio, ou seja, o tempo medido no referencial ligado à partícula. Usando ainda $\mathrm{d}x = u_x\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y = u_y\,\mathrm{d}t$ e $\mathrm{d}z = u_z\,\mathrm{d}t$, a relação acima permite expressar o tempo próprio como

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \tag{3.7.2}$$

Dividindo ambos os membros de (3.7.1) por $(\mathrm{d}\tau)^2$, obtemos

$$\left(\frac{\mathrm{d}(ct)}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = c^2. \tag{3.7.3}$$

Definindo a *velocidade própria*

$$\vec{\eta} \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}\,\vec{u} \tag{3.7.4}$$

podemos escrever a equação (3.7.3) como

$$\left(\frac{\mathrm{d}(ct)}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \eta_x^2 - \eta_y^2 - \eta_z^2 = c^2. \tag{3.7.5}$$

Portanto, temos agora uma nova grandeza invariante cujas componentes espaciais são η_x, η_y e η_z e a *componente temporal* é

$$\eta_0 \equiv \frac{\mathrm{d}(ct)}{\mathrm{d}\tau} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \tag{3.7.6}$$

Ou seja,

$$c^2 = \eta_0^2 - \eta_x^2 - \eta_y^2 - \eta_z^2. \tag{3.7.7}$$

Como c^2 tem o mesmo valor em todos os sistemas inerciais, então o lado direito da equação (3.7.7) é também um invariante.

Exercício: Determine η_0', η_x', η_y' e η_z', no referencial S' que se move com velocidade $\vec{v} = v\hat{x}$ em relação à S.

Solução:

$$\eta_0{}' \equiv \frac{c}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} \tag{3.7.8}$$

e

$$\vec{\eta}\,' \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}\,\vec{u}\,' \tag{3.7.9}$$

Usando as equações (A.1.4), (3.5.67) e (3.5.70) teremos

$$\eta_0{}' = c\frac{\gamma\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \gamma\left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - \frac{\frac{v}{c}u_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right) = \gamma\left(\eta_0 - \frac{v}{c}\eta_x\right), \tag{3.7.10}$$

$$\eta_x{}' = \frac{\gamma\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\,\frac{u_x - v}{1-\frac{v\,u_x}{c^2}} = \gamma\left(\frac{u_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - \frac{v}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right) = \gamma\left(\eta_x - \frac{v}{c}\eta_0\right), \tag{3.7.11}$$

$$\eta_y' = \frac{\gamma\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\,\frac{u_y}{\gamma\left(1-\frac{v\,u_x}{c^2}\right)} = \eta_y \tag{3.7.12}$$

e

$$\eta_z' = \frac{\gamma\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\,\frac{u_z}{\gamma\left(1-\frac{v\,u_x}{c^2}\right)} = \eta_z \tag{3.7.13}$$

O exercício acima mostra que η_0, η_x, η_y e η_z, se transformam da mesma forma que as coordenadas de espaço-tempo $x_0 = ct$, x, y e z. Ou seja, é uma transformação de Lorentz.

3.7.2 Momento e energia

Massa

Vejamos agora como atribuir momento linear a uma partícula cuja *massa* é m. Estamos supondo que a quantidade m é medida no referencial onde a partícula se encontra em repouso. Ou seja, m é uma característica intrínseca da partícula a qual assume o *mesmo* valor para *todos* os observadores inerciais.

Momento relativístico

Uma vez definido o conceito de massa, devemos agora decidir qual é a grandeza a ser definida como o momento da partícula,

$$\vec{p} = m\vec{u} \quad \text{ou} \quad \vec{p} = m\vec{\eta}\ ? \tag{3.7.14}$$

A relação (3.7.4) mostra que as duas velocidades $\vec{\eta}$ e $\vec{u}$ coincidem quando $u/c \to 0$. Ou seja, o momento

$$\vec{p} = m\vec{\eta} \tag{3.7.15}$$

é mais geral e se reduz ao momento não relativístico quando a velocidade da partícula é pequena em comparação com c. Além disso, mostramos no apêndice A que

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{p}\,'}{\mathrm{d}t'} = 0. \tag{3.7.16}$$

Ou seja, essa definição de momento é compatível com o conceito absoluto de *conservação de momento*.

Energia-momento

Levando em conta que m é um invariante relativístico, se multiplicarmos a relação (3.7.7) por m^2, obteremos um outro invariante relativístico dado por

$$m^2c^2 = (m\,\eta_0)^2 - \left[(m\,\eta_x)^2 + (m\,\eta_y)^2 + (m\,\eta_z)^2\right]. \tag{3.7.17}$$

Usando a equação (3.7.15)

$$m^2c^2 = (m\,\eta_0)^2 - |\vec{p}|^2. \tag{3.7.18}$$

Vejamos agora qual é o significado físico da grandeza $m\eta_0$. No limite de pequenas velocidades,

$$m\eta_0 = \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \approx mc\left(1+\frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}\right) = mc + \frac{1}{2}\frac{mu^2}{c}. \tag{3.7.19}$$

Multiplicando a expressão acima por c,

$$mc\eta_0 \approx mc^2 + \frac{mu^2}{2}. \tag{3.7.20}$$

O segundo termos no lado direito da expressão acima é a *energia cinética* não relativística. Portanto, a grandeza $mc\eta_0$ é a generalização relativística da energia da partícula (note que a partícula em questão está se movendo livremente). Imediatamente notamos qua há um importante bonus nesta generalização. De fato, podemos notar que a partícula possui uma energia não nula mesmo quando está em repouso. Esta *energia de repouso*, é

$$E_0 = mc^2. \tag{3.7.21}$$

Esta importante relação possui conseqüências importantíssimas em processos físicos onde ocorrem transformações envolvendo diferentes tipos de partículas, tais como na física de partículas elementares ou mesmo em processos que ocorrem em reatores de *fissão nuclear*, reações de *fusão nuclear* em estrelas, etc.

A partir de agora vamos designar a *energia total relativística* por

$$E(u) = mc\eta_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}. \tag{3.7.22}$$

Substituindo $E = mc\eta_0$ na relação invariante (3.7.18), obtemos também a *relação entre energia e momento*

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4. \tag{3.7.23}$$

O lado direito da equação (3.7.23) é um invariante relativístico. Em um outro sistema inercial, a energia e o momento da partícula serão diferentes, mas a relação $(E')^2 - (p')^2c^2$ terá sempre o mesmo valor m^2c^4.

A relação (3.7.22) pode também ser escrita como

$$E = m_{\rm rel} c^2, \tag{3.7.24}$$

onde

$$m_{\rm rel} \equiv \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \tag{3.7.25}$$

é a *massa relativística*.

Massa nula

A relação (3.7.23) mostra que mesmo no caso $m = 0$ ainda há uma energia finita dada por

$$E = pc. \tag{3.7.26}$$

No entanto, de acordo com a equação (3.7.22), a energia aparentemente tenderia a zero quando a massa de repouso é nula. Porém, notando que o denominador também tende a zero quando $u \to c$, há a possibilidade de que existam partículas de massa nula, desde que possuam a velocidade absoluta c.

Mas o que poderia se propagar com a velocidade absoluta c? Há de pelo menos um exemplo, a saber, a *luz*. No eletromagnetismo é possível mostrar que a energia e o momento contidos na onda eletromagnética estão de fato relacionados como na equação (3.7.26). Mas, no presente contexto, estamos tratando da mecânica relativística de *partículas*. Porém, a *teoria quântica* prevê que uma onda de freqüência ν, tal como a onda eletromagnética, nada mais é do que uma coleção de *quanta de energia* cada um possuindo o valor

$$E = h\,\nu; \quad h = 6,6260755 \cdot 10^{-34}\,\text{Js}, \tag{3.7.27}$$

onde h é a *constante de Planck*. No caso da onda eletromagnética os quanta recebem o nome de *fótons*. Portanto, a relação entre energia e momento para os fótons, ou qualquer outra partícula de massa nula, é dada por (3.7.26) [12]. Esta relação será utilizada em diversos exemplos de processos envolvendo a interação entre fótons com elétrons ou *pósitrons*. O pósitron é uma partícula que possui a mesma massa e spin do elétron, mas sua carga possui sinal oposto; é a *anti-partícula* do elétron.

Exercício: Estime o número de fótons emitidos por segundo por uma lâmpada de 100 W (Sugestão: use o valor da freqüência da cor amarela). Calcule o momento total de fótons emitidos em 10 s.

3.7.3 Cinemática relativística

Vejamos agora algumas aplicações das leis de conservação de energia e momento relativísticos.

[12] Note que a relatividade não prevê a existência de partículas de massa nula. Porém, se elas existirem, devem necessariamente se propagar com velocidade c.

Colisões

Exercício: Dois corpos de mesma massa m colidem frontalmente, com velocidade $\frac{3}{5}c$, formando uma única massa M. Calcule o valor de M.

Solução: A energia total antes da colisão é:

$$E^i = \frac{2\,m\,c^2}{\sqrt{1-(3/5)^2}} = \frac{5}{2}mc^2. \tag{3.7.28}$$

Após a colisão a energia é

$$E^f = Mc^2. \tag{3.7.29}$$

Usando a conservação de energia $E_f = E_i$, obtemos

$$M = \frac{5}{2}m > m \tag{3.7.30}$$

O exercício mostra que a massa não foi conservada no processo de colisão. A energia cinética foi convertida em uma parte da massa de repouso M. Na análise newtoniana deste mesmo processo, diríamos que a energia cinética foi convertida em *energia térmica*. Mas o que é a energia térmica? Na relatividade, um objeto quente pesa mais do que o mesmo objeto frio.

Exercício: Um píon em repouso decai em um múon e um neutrino. Calcule a energia do múon em termos das massas do píon, m_π, e do múon m_μ (considere a massa no neutrino, m_ν, como sendo nula). Qual é a velocidade do múon?

Solução: A energia e o momento iniciais são:

$$E^i = m_\pi c^2, \quad \vec{p}^{\,i} = 0 \tag{3.7.31}$$

Após o decaimento do píon, teremos

$$E^f = E_\mu + E_\nu, \quad \vec{p}^{\,f} = \vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu. \tag{3.7.32}$$

A conservação de energia e momento requer

$$\begin{aligned} E_\mu + E_\nu &= m_\pi c^2 \\ \vec{p}_\mu &= -\vec{p}_\nu. \end{aligned} \tag{3.7.33}$$

Como o neutrino tem massa nula, podemos tomar

$$E_\nu = |\vec{p}_\nu|c = |\vec{p}_\mu|c = \sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2 c^4}. \tag{3.7.34}$$

Substituindo a equação acima da primeira equação de (3.7.33), teremos

$$\sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2 c^4} = m_\pi c^2 - E_\mu. \tag{3.7.35}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado,

$$E_\mu^2 - m_\mu^2 c^4 = m_\pi^2 c^4 + E_\mu^2 - 2m_\pi c^2 E_\mu. \tag{3.7.36}$$

Portanto,

$$E_\mu = \frac{(m_\pi^2 + m_\mu^2)c^2}{2m_\pi} \tag{3.7.37}$$

Podemos calcular a velocidade do múon, usando a expressão da energia relativística em termos da velocidade da partícula, de modo que

$$\frac{m_\mu c^2}{\sqrt{1-\frac{v_\mu^2}{c^2}}} = \frac{(m_\pi^2+m_\mu^2)c^2}{2m_\pi}. \tag{3.7.38}$$

Um cálculo simples mostra que

$$v_\mu = \frac{|m_\pi - m_\mu|}{\sqrt{m_\pi^2+m_\mu^2}}c. \tag{3.7.39}$$

Também no caso deste exercício, a energia cinética e a massa não são conservadas separadamente.

Exercício: Um elétron de massa m e momento p_e incide sobre um pósitron em repouso. Quando isso ocorre, o elétron e o pósitron, que possui a mesma massa do elétron e carga elétrica oposta, são aniquilados e a energia final é convertida em fótons.

(a) Mostre que não é possível ter somente um fóton no estado final.

(b) No caso em que são produzidos dois fótons, determine a energia do fóton que é emitido em uma direção formando um ângulo de 60^o com a direção do elétron incidente.

Solução:

(a) A energia e o momento iniciais são

$$E^i = mc^2 + \sqrt{m^2c^4+p_e^2c^2} \quad \text{e} \quad \vec{p}^{\,i} = p_e. \tag{3.7.40}$$

Após a aniquilação, teríamos, no caso de um único fóton,

$$E^f = p^f c \quad \text{e} \quad \vec{p}^{\,f} = \vec{p}^{\,i} = \vec{p}_e. \tag{3.7.41}$$

É fácil verificar que as condições $E^f = E^i$ e $p^f = p^e$ não são compatíveis.

(b) No caso da aniquilação em dois fótons, teremos

$$E^f = p^{f_1}c + p^{f_2}c \quad \text{e} \quad \vec{p}^{\,f_1} + \vec{p}^{\,f_2} = \vec{p}_e. \tag{3.7.42}$$

A conservação de momento implica na seguinte relação

$$(\vec{p}^{\,f_2})^2 = (\vec{p}_e - \vec{p}^{\,f_1})^2 = p_e^2 + (p^{f_1})^2 - 2p_e p^{f_1}\cos\phi. \tag{3.7.43}$$

Substituindo na equação para a conservação de energia,

$$mc^2 + \sqrt{m^2c^4+p_e^2c^2} = E_1 + \sqrt{p_e^2c^2 + E_1 - 2p_e c E_1\cos\phi}. \tag{3.7.44}$$

Esta relação permite obter a energia E_1 do fóton espalhado na direção que faz um ângulo ϕ com a direção do elétron incidente, em termos do momento e da massa do elétron.

Espalhamento Compton

Vejamos agora um exemplo de *espalhamento elástico*, ou seja, um processo tal que a soma das massas iniciais é igual à soma das massas finais. Isso ocorre, por exemplo, quando as partículas sobrevivem ao processo de colisão.

Exercício: Um fóton de energia E_0 incide sobre um elétron de massa m em repouso. É observado um fóton emergente, em uma direção que forma um ângulo θ com a direção de incidência, possuindo energia E. Qual é a relação entre E, E_0 e θ?

Solução: A energia inicial é a soma da energia do fóton E_0 com a energia de repouso do elétron mc^2. A energia final é a soma da energia E do fóton com a energia $\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}$ do elétron emergente possuindo momento $\vec{p}$. Portanto, a conservação de energia fornece a relação

$$E_0 + mc^2 = E + \sqrt{p^2c^2+m^2c^4}. \tag{3.7.45}$$

O momento inicial é somente o momento do fóton $\vec{p}_0^{\,f}$ e o momento final é $\vec{p}+\vec{p}^{\,f}$. Impondo conservação do momento, teremos

$$\vec{p}_0^{\,f} = \vec{p} + \vec{p}^{\,f}. \tag{3.7.46}$$

Temos ainda as relações entre a energia e o momento do fóton, $E_0 = p_0^f c$ e $E = p^f c$. Além disso, o ângulo θ é tal que $\vec{p}_0^{\,f}\cdot\vec{p}^{\,f} = p_0^f p^f \cos\theta$. Usando a relação (3.7.46),

$$p^2c^2 = (\vec{p}_0^{\,f} - \vec{p}^{\,f})^2c^2 = \left(p_0^f\right)^2c^2 + \left(p^f\right)^2c^2 - p_0^f p^f c^2\cos\theta = E_0^2 + E^2 - 2E_0E\cos\theta. \tag{3.7.47}$$

Substituindo (3.7.47) em (3.7.45),

$$E_0 + mc^2 - E = \sqrt{E_0^2 + E^2 - 2E_0E\cos\theta + m^2c^4}. \tag{3.7.48}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado,

$$E_0^2 + m^2c^4 + E^2 + 2E_0mc^2 - 2Emc^2 - 2E_0E = E_0^2 + E^2 - 2E_0E\cos\theta + m^2c^4. \tag{3.7.49}$$

Ou seja,

$$\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0} = \frac{1}{mc^2}\left(1-\cos\theta\right). \tag{3.7.50}$$

Podemos também combinar a equação (3.7.50) com a relação quântica de Einstein (3.7.27) de modo a expressar a relação entre as freqüências do fóton incidente e emergente. Substituindo $E_0 = h\nu_0$ e $E = h\nu$ em (3.7.50), teremos

$$\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu_0} = \frac{h}{mc^2}\left(1-\cos\theta\right). \tag{3.7.51}$$

Em termos do comprimento de onda $\lambda = c/\nu$, teremos

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{mc}\left(1-\cos\theta\right). \tag{3.7.52}$$

A grandeza $h/(mc)$ é o comprimento de onda de Compton do elétron e vale $2,2463\cdot10^{-12}$ m.

Exercício: Determine o ângulo θ para o qual a energia do fóton é *mínima*. Qual é a a energia cinética do elétron neste caso? Qual é o momento do elétron?

Solução: De acordo com a equação (3.7.50),

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{E_0} + \frac{1}{mc^2}\left(1 - \cos\theta\right). \tag{3.7.53}$$

Portanto,

$$E = \frac{E_0 mc^2}{mc^2 + E_0(1 - \cos\theta)}. \tag{3.7.54}$$

É fácil ver que o valor *mínimo* desta expressão ocorre quando $(1 - \cos\theta)$ é *máximo*, ou seja, $\theta = \pi$. Portanto,

$$E_{\min} = \frac{E_0 mc^2}{mc^2 + 2E_0}. \tag{3.7.55}$$

Neste caso, a energia total *máxima* do elétron é

$$E_{e\max} = E_0 + mc^2 - E_{\min}. \tag{3.7.56}$$

Ou seja, a energia cinética *máxima* do elétron é

$$T_{\max} = E_{e\max} - mc^2 = E_0 - E_{\min} = 2\frac{E_0^2}{mc^2 + 2E_0}. \tag{3.7.57}$$

3.7.4 Dinâmica relativística

Primeira lei de Newton

A primeira lei de Newton está incluída na relatividade restrita. Ou seja, um movimento com velocidade constante em S também é um movimento com velocidade constante em S'.

Segunda lei de Newton

Supondo que exista uma *lei de força* que seja compatível com a relatividade, então a segunda lei de Newton pode ser generalizada como

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\vec{u}(t)}{\sqrt{1 - \frac{u(t)^2}{c^2}}}. \tag{3.7.58}$$

Um exemplo de lei de força compatível com a relatividade é a força produzida por campos eletromagnéticos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sobre uma partícula de carga q. Essa é a *força de Lorentz* dada por

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}\right). \tag{3.7.59}$$

Um caso particular é quando $q\vec{E} = F_0\hat{x}$, com F_0 independente de $\vec{x}$ e t, e $\vec{B} = 0$. Usando a segunda lei de Newton, teremos, neste caso,

$$F_0 = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}. \tag{3.7.60}$$

Integrando entre 0 e t,

$$F_0\, t = p(t) - p(0). \tag{3.7.61}$$

Supondo que a partícula esteja inicialmente em repouso ($p(0) = 0$),

$$p(t) = F_0 t. \tag{3.7.62}$$

Expressando $p(t)$ em termos de $u(t)$

$$F_0\, t = \frac{m u(t)}{\sqrt{1 - u(t)^2/c^2}}. \tag{3.7.63}$$

Resolvendo para $u(t)$, teremos

$$u(t) = \frac{F_0 t/m}{\sqrt{1 + (F_0^2\, t^2)/(m^2\, c^2)}}. \tag{3.7.64}$$

Esse resultado é a generalização relativística para o movimento em um campo de força uniforme e constante

Para $t \to \infty$, $(F_0^2\, t^2)/(m^2\, c^2) \gg 1$, de modo que

$$u \to \frac{F t/m}{(F\, t)/(m\, c)} = c. \tag{3.7.65}$$

Ou seja, a aplicação da força constante e uniforme por um tempo infinito, acelera a partícula até, *no máximo*, a velocidade absoluta c.

Integrando a equação (3.7.64), teremos (tomando $x(0) = 0$)

$$x(t) = \int_0^t u(\bar{t})\mathrm{d}\bar{t} = \int_0^t \frac{F_0/m}{\sqrt{1 + (F_0^2\, \bar{t}^2)/(m^2\, c^2)}} \bar{t}\, \mathrm{d}\bar{t} \tag{3.7.66}$$

Usando a variável de integração $z = 1 + F_0^2 \bar{t}^2/(m^2 c^2)$,

$$x(t) = \frac{mc^2}{2F_0} \int_1^{1+F_0^2\, t^2/(m^2c^2)} \frac{1}{\sqrt{z}} \mathrm{d}z = \frac{mc^2}{F_0} \left(\sqrt{1 + F_0^2\, t^2/(m^2 c^2)} - 1 \right) \tag{3.7.67}$$

Exercício: Suponha que um raio de luz é emitido em $x = -h$. Determine o valor de h, tal que $x(t)$ dado em (3.7.67) é sempre maior do que a $x_{\mathrm{lux}} = -h + ct$. Interprete fisicamente este resultado.

Para $F_0\, t \ll mc$, podemos expandir a raiz quadrada em (3.7.67) até primeira ordem, resultando em

$$x(t) \approx \frac{mc^2}{F_0} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{F_0^2 t^2}{m^2 c^2} - 1 \right) = \frac{mc^2}{F_0} \frac{1}{2} \frac{F_0^2 t^2}{m^2 c^2} = \frac{1}{2} \frac{F_0}{m} t^2 \tag{3.7.68}$$

que é a equação não relativística da partícula sob a ação de uma força uniforme e constante.

Teorema trabalho-energia

Consideremos agora o *trabalho* realizado pela força $\vec{F}$. Quando a partícula se desloca ao longo de uma trajetória qualquer, o trabalho em um trecho infinitesimal $\mathrm{d}\vec{l} = \vec{u}\, \mathrm{d}t$ da trajetória é

$$\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \vec{F} \cdot (\vec{u}\, \mathrm{d}t) = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{u}\, \mathrm{d}t \tag{3.7.69}$$

Usando a expressão (3.7.15) para o momento relativístico,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{u} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{m\vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) \cdot \vec{u}; \quad u^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}. \tag{3.7.70}$$

Desenvolvendo essa relação,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{u} &= \frac{m}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{u}-\frac{1}{2}\frac{mu^2}{(1-\frac{u}{c^2})^{3/2}}\left(-\frac{2}{c^2}\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{u}\right)\\ &= \frac{m}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{3/2}}\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{u}=\frac{m}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{3/2}}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}t}\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right). \qquad (3.7.71)\end{aligned}$$

Exercício: Verifique a última igualdade na equação acima.

Substituindo (3.7.71) em (3.7.69) em, obtemos

$$\mathrm{d}W=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)\mathrm{d}t. \qquad (3.7.72)$$

Integrando,

$$W=\left(\frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)_{\text{final}}-\left(\frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)_{\text{inicial}}. \qquad (3.7.73)$$

Este resultado está de acordo com a interpretação da energia relativística como sendo dada pela equação (3.7.22). Como a energia de repouso é constante, o lado direito de (3.7.73) é a variação da energia cinética. Portanto, o teorema trabalho-energia permanece válido na relatividade.

Terceira lei de Newton

A terceira lei de Newton não é, em geral, compatível com a relatividade. De fato, para dois objetos separados no espaço, a terceira lei de Newton não está de acordo com a relatividade da simultaneidade. Por exemplo, se a força sobre A devida à B é $\vec{F}(t)$ e a força sobre B devida à A é $-\vec{F}(t)$, em um outro referencial inercial estas duas forças ocorrem em *instantes diferentes*; portanto a terceira lei não é verificada para outros observadores inerciais. Somente no caso especial de *interações de contato*, quando a ação e reação são aplicadas no *mesmo ponto*, (ou quando as forças não dependem do tempo), pode a terceira lei ser mantida.

Capítulo 4

Leis da Termodinâmica

O presente texto baseia-se em grande parte nas seções 4.1, 4.2, 4.3 e 4.5 das notas de aula do Prof. David Tong. O texto original completo, que pode ser acessado em `sp.pdf`, trata de Mecânica Estatística em um nível bem superior ao que será aqui adotado. Mas o capítulo sobre as leis da Termodinâmica é bem acessível mesmo para um nível mais introdutório.

4.1 Introdução

As leis da Termodinâmica encapsulam todas as propriedades da energia e suas transformações e nos permitem entender de maneira profunda o papel da energia nos processos que ocorrem na natureza. A partir no início do século 20, a termodinâmica adquiriu uma formulação sistemática, em termos de quatro leis fundamentais. A *Lei Zero da Termodinâmica* introduz o conceito de *temperatura* de maneira precisa e fundamental, como uma das propriedades que caracterizam um sistema macroscópico [1].

Outro conceito extremamente importante no dia a dia é o de *energia*. A *Primeira Lei da Termodinâmica* nos permite compreender que há muito mais sobre este conceito familiar do que aparenta a primeira vista. Veremos como a primeira lei introduz o conceito de energia como uma propriedade característica e fundamental dos sistemas macroscópicos. Além disso a conservação da energia é generalizada pela primeira lei, incluindo a possibilidade de transferência de energia por meios não mecânicos [2].

A *Segunda Lei da Termodinâmica* introduz a propriedade denominada *entropia*. É justificadamente considerada a mais importante das leis da ciência pois explica porque processos (transformações) acontecem (ou não acontecem). Ou seja, dá uma explicação para a espontaneidade de processos físicos. Vale a pena citar o que disse no início do século 20 o astrofísico, filósofo e popularizador da ciência, Sir Arthur Stanley Eddington [14]:

"Penso que a lei segundo a qual a entropia sempre cresce, ocupa uma posição suprema entre as leis da natureza. Se alguém disser que sua teoria mais estimada está em desacordo com as equações de Maxwell - pior para as equações de Maxwell. Se for descoberto que observações a contradizem - bem, as vezes os físicos experimentais são descuidados. Mas se a sua teoria se mostra em contradição com

[1] Essa numeração das leis, iniciando com "zero", se deve à sequência histórica em que as leis foram formuladas; no esquema lógico da termodinâmica, a lei zero foi formulada tardiamente, não restando alternativa.

[2] Em termos mais fundamentais, a conservação de energia é uma consequência da simetria por translações temporais, como veio a ser entendido com a descoberta do *teorema de Noether*, feita pela matemática Amalie Emmy Noether em 1915.

a segunda lei da termodinâmica, então não posso lhe dar nenhuma esperança; não resta alternativa a não ser colapsar na mais profunda humilhação."

Na segunda lei da termodinâmica entram em jogo apenas as *variações* no valor da entropia (não há um valor absoluto de referência). A *Terceira lei da Termodinâmica* [3], permite estabelecer uma escala absoluta para a entropia. A terceira lei afirma que a entropia tende para um valor finito no limite de temperatura absoluta nula. Ao contrário das três primeiras, às quais estão associadas as grandezas temperatura, energia e entropia, não há uma nova grandeza termodinâmica associada à terceira lei. O aspecto mais interessante da terceira lei, é o estabelecimento de um conexão entre a definição termodinâmica, de Clausius, e a definição estatística, de Boltznmann. O verdadeiro significado da terceira lei é iluminado quando levamos em consideração que os sistemas microscópicos obedecem às leis da Mecânica Quântica. Especialmente no limite de temperaturas muito baixas, os efeitos da Mecânica Quântica não podem ser menosprezados. De fato, a dinâmica clássica não é compatível com a terceira lei. Um exemplo simples é o tratamento do gás ideal como um sistema de partículas que obedecem as leis clássicas de movimento. Do ponto de vista prático, a terceira lei possui implicações importantes na busca de temperaturas muito próximas do zero absoluto [4].

4.2 Leis da Termodinâmica

4.2.1 Lei Zero

A lei zero recebe esse nome por ter sido tardiamente formulada. Embora já se soubesse que uma tal lei seria essencial para a estrutura lógica da termodinâmica, somente no início so século 20 ela foi formulada. Como nesta época a primeira e a segunda leis já haviam sido firmemente estabelecidas, não pareceu razoável renumerar as leis. A lei zero estabelece o significado de uma propriedade bastante familiar, a saber, a temperatura.

Vamos começar com algumas definições:

- Um sistema é definido por sua fronteira. Um sistema cuja fronteira é impermeável à passagem de matéria é denominado *sistema fechado*. Por exemplo, o vinho contido em uma garrafa fechada é em ótima aproximação um sistema fechado. Exemplos de "sistema" podem ser um bloco de ferro, um copo de água, uma máquina, o corpo humano, etc.

- Um sistema que está completamente isolado de influências externas é dito estar delimitado por *paredes adiabáticas*. Dizemos que o sistema está *isolado*. Um líquido no interior de uma garrafa térmica é bem aproximadamente um sistema isolado. O Universo como um todo, pode ser considerado um sistema isolado.

- Chamamos de "ambiente" toda a parte externa ao sistema, que é normalmente onde nos situamos para fazer as observações do sistema. O sistema e o ambiente constituem, juntos, o *universo*.

- Paredes que não são adiabáticas são denominadas *diatérmicas* e dois sistemas separados por paredes diatérmicas são ditos estarem em contato térmico. Por ser uma *parede*, não há

[3] As vezes denominada postulado de Nernest.

[4] Para uma discussão em nível elementar sobre a possibilidade de se obter temperaturas absolutas negativas, veja o capítulo 5 de [15].

movimento e também não é possível transferir partículas entre um sistema e outro. Um exemplo simples, seria uma fina folha metálica.

- Um sistema isolado, quando deixado por si só por um longo período de tempo, irá relaxar para um estado onde nenhuma mudança macroscópica é observada. Este estado é chamado de *estado de equilíbrio*

A descrição do sistema em equilíbrio, feita pela Termodinâmica, não faz qualquer referência à átomos e seus *micro estados*. Para um gás, por exemplo, somente as duas variáveis pressão (P) e volume (V) especificam o estado de equilíbrio. Conhecendo P e V, todas as outras quantidades (cor, cheiro, viscosidade, condutividade térmica, etc) são fixadas. Para outros sistemas, outras (ou diferentes) variáveis macroscópicas podem ser necessárias para descrever seus estados macroscópicos (macro-estados). Exemplos comuns são a tensão superficial e área de uma película; o campo magnético e a magnetização de um magneto; o campo elétrico e a polarização de um dielétrico.

Equilíbrio mecânico

Consideremos dois sistemas fechados possuindo um pistão conectado como na figura abaixo. Os dois pistões estão ligados entre si rigidamente de modo que quando um se move para fora do sistema 1, o outro se move para dentro do sistema 2. Inicialmente o par de pistões está travado. Quando a trava é solta, poderá ocorrer um movimento do par de pistões. Se o par de pistões se mover para a direita, podemos concluir que a pressão à esquerda era maior que a pressão à direita, mesmo sem ter feito uma medida direta das duas pressões. Analogamente, podemos concluir que a pressão da direita era maior, caso o movimento se de para a esquerda. Se nada ocorrer quando a trava é liberada, concluimos que as pressões eram idênticas, apesar de não sabermos o seu valor. Tecnicamente, dizemos que há *um equilíbrio mecânico*. O conceito de equilíbrio é muito importante na termodinâmica.

Suponha que dois sistemas A e C estejam em equilíbrio mecânico, da maneira descrita acima. Agora suponha que ao substituirmos A por um outro sistema B nenhuma mudança ocorra. Ou seja, observamos que B também está em equilíbrio mecânico com C. Então podemos dizer que seguramente A tem a mesma pressão que B.

De maneira análoga à propriedade de equilíbrio mecânico, vamos agora introduzir a propriedade *temperatura*. Isso é possível quando invocamos a chamada *Lei Zero da Termodinâmica*, segundo a qual o equilíbrio é, em geral, uma *propriedade transitiva*.

Lei Zero: Se dois sistemas, A e B, estão em equilíbrio com um terceiro corpo C, então A está em equilíbrio com B e vice-versa.

Vejamos porque isso nos permitte definir o conceito de temperatura. Suponha que o sistema A está no estado (P_1, V_1) e o sistema C está no estado (P_3, V_3). Para testar se os dois sistemas estão em equilíbrio, basta coloca-los em contato térmico e observar se os seus estados macroscópicos mudam. Para valores arbitrários das pressões e volumes, os sistemas não estarão em equilíbrio. O equilíbrio requer alguma relação entre (P_1, V_1) e (P_3, V_3). Por exemplo, suponha que fixamos P_1, V_1 e P_3, então haverá um valor específico de V_3, para o qual nada ocorre quando os dois sistemas são colocados em contato. Ou seja, em geral devemos ter o vínculo

$$F_{AC}(P_1, V_1; P_3, V_3) = 0 \tag{4.2.1}$$

que pode ser resolvido resultando em

$$V_3 = f_{AC}(P_1, V_1; P_3). \tag{4.2.2}$$

Analogamente, quando B e C estão em equilíbrio, devemos ter

$$F_{BC}(P_2, V_2; P_3, V_3) = 0 \tag{4.2.3}$$

que também pode ser resolvido resultando em

$$V_3 = f_{BC}(P_2, V_2; P_3). \tag{4.2.4}$$

As equações (4.2.2) e (4.2.4) combinadas nos levam a

$$f_{AC}(P_1, V_1; P_3) = f_{BC}(P_2, V_2; P_3). \tag{4.2.5}$$

Usando agora a Lei Zero, as relações (4.2.1) e (4.2.3) (A e B em equilíbrio com C), que são equivalentes a (4.2.5), implicam em

$$F_{AB}(P_1, V_1; P_2, V_2) = 0 \tag{4.2.6}$$

(A em equilíbrio com B). Mas a única maneira de obter a relação acima a partir de (4.2.5) é que P_3 (que não aparece na relação acima) seja cancelado em (4.2.5), de tal forma que

$$\theta_A(P_1, V_1) = \theta_B(P_2, V_2). \tag{4.2.7}$$

Esta relação nos diz que há uma propriedade que é a mesma em todos os sistemas em equilíbrio térmico. O valor de $\theta_B(P, V)$ é chamado de *temperatura* do sistema e a relação $T = \theta(P, V)$ é a *equação de estado*.

O argumento apresentado acima apenas nos diz que existe uma propriedade chamada temperatura. Não há nada, até aqui, que nos impeça de fazer uma outra escolha, tal como $\sqrt{\theta(P, V)}$. É possível mostrar, no entando, que há uma escolha canônica de temperatura, definida via segunda lei da termodinâmica e uma construção chamada *ciclo de Carnot* Por equanto vamos utilizar a equação de estado do gás ideal (que é uma boa aproximação para gases reais a baixas densidades), dada por

$$T = \frac{PV}{Nk_B}, \tag{4.2.8}$$

em que N é o número de partículas contidas no gás.

4.2.2 Primeira Lei

A primeira lei é simplesmente a afirmação de que a energia se conserva, juntamente com o reconhecimento tácito de que há mais de uma maneira de mudar a energia do sistema. Podemos espressá-la como

Primeira Lei: A quantidade de trabalho necessária para mudar um sistema *isolado* do estado 1 para o estado 2 é independente de como o trabalho é realizado.

Esta frase complicada está simplesmente nos dizendo que há uma outra função de estado $E(P, V)$. Esta é a energia. Podemos realizar uma quantidade de trabalho W sobre um sistema isolado de várias possíveis e imaginativas maneiras: podemos espreme-lo, agita-lo, colocar um resistor em seu interior e passar uma corrente elétrica. Independentemente do método que escolhermos, a mudança da energia, $\Delta E = E_2 - E_1$. sempre será

$$\Delta E = W \qquad \text{(sistema isolado)}. \tag{4.2.9}$$

No entando, para sistemas que não são isolados, a mudança da energia *não é* igual à quantidade de trabalho feito no sistema. Por exemplo, poderíamos colocar dois sistemas, possuindo temperaturas diferentes, em contato térmico. Mesmo sem fazer trabalho, a energia de cada sistema vai

mudar. Somos então forçados a aceitar que existem outras maneiras de mudar a energia do sistema. Escrevemos

$$\Delta E = Q + W, \tag{4.2.10}$$

em que Q é a quantidade de energia, transferida para o sistema, que não pode ser contabilizada como trabalho. Esta transferência de energia ocorre devido a diferenças de temperatura entre sistemas em contato térmico. É chamada de *calor*.

Usamos o termo energia apenas no sentido acima definido, ou seja, um número $E(V,T)$. Calor não é um tipo de energia; é um processo; um modo de transferir energia. Não faz sentido dividir $E(P,V)$ em calor e trabalho. Não podemos escrever algo como "$E = Q+W$", simplesmente porque Q e W não são funções de estado.

Processos quase estáticos

Em geral a transferência de energia pode ser tão violenta e caótica quanto se queira. O sistema não precisa estar em equilíbrio durante a transferência de energia. A primeira lei expressa em (4.2.10) se refere apenas à energia inicial e final.

É conveniente introduzir um processo particular de transferência de energia, tal que durante todo o processo o sistema está efetivamente em equilíbrio e pode ser descrito por variáveis termodinâmicas P e V. Este tipo de processo é chamado de *quase estático*.

Para processos quase estáticos é útil escrever (4.2.10) na forma infinitesimal. Mas devemos ser cuidadosos com a notação a ser utilizada, uma vez que $E(P,V)$ é uma função de estado mas Q e W não são. Ou seja, isso significa que uma mudança infinitesimal na egergia é uma *derivada total*,

$$dE = \frac{\partial E}{\partial P}dP + \frac{\partial E}{\partial V}dV, \tag{4.2.11}$$

enquanto uma quantidade infinitesimal de trabalho ou calor não possui essa interpretação: são meramente quantidades pequenas. Para enfatizar isso, é comum inventar uma nova notação. Uma pequena quantidade de calor será denotada como $đ\,Q$ e uma pequena quantidade de trabalho será denotada como $đ\,W$. Assim, a primeira lei da termodinâmica na forma infinitesimal é

$$dE = đ\,Q + đ\,W. \tag{4.2.12}$$

Por simplicidade vamos considerar os casos em que $đ\,W$ seja devido a uma variação do volume do sistema, ou seja, o sistema está sendo, por exemplo, comprimido (vimos que essa é apenas uma das formas de realizar trabalho sobre o sistema). A figura abaixo mostra um gás contido em um volume possuido uma parede móvel de área A. Quando uma força é aplicada no lado externo da parede, a variação produzida no volume do gás é $dV = Adx$. O trabalho realizado pela força externa é então $đ\,W = \text{Força}\,dx = (\text{Força}/A)\,dV$. A pressão exercida pelo gás sobre o lado interno da parede é $P = -\text{Força}/A$. Portando

$$đ\,W = -PdV. \tag{4.2.13}$$

Note que quando o sistema está sendo comprimido, teremos $dV < 0$, resultando em $đ\,W > 0$. Neste caso, estamos realizando trabalho sobre o sistema. Quando $dV > 0$, estamos realizando um trabalho negativo, ou seja, o sistema está realizando trabalho.

A expressão $đ\,W = -PdV$ também permite enfatizar, mais uma vez, o significado do símbolo $đ$. Não há uma função $W(P,V)$ tal que "$dW = -PdV$". A notação $đ$ serve para nos lembrar que trabalho não é uma diferencial exata.

Sunponha agora que produzimos uma variação no estado do sistema utilizando os dois caminhos quase estáticos mostrados na figura abaixo. A mudança na energia é independente do caminho, sendo simplesmente $\int dE = E(P_2,V_2) - E(P_1,V_1)$. Por outro lado, o trabalho $\int đ\,W = -\int Pdv$ depende do caminho. Esta simples observação será importante na discussão a seguir.

4.2.3 Segunda Lei

A essência de segunda lei da termodinâmica é a existência de uma direção privilegiada do tempo. Existem vários processos macroscópicos na natureza que não podem ser revertidos. Objetos se espatifando ao cair no chão. As pessoas envelhecem. Palavras não podem ser desditas. A segunda lei da termodinâmica resume todas observações deste tipo em uma única afirmação sobre o fluxo de calor.

Processos reversíveis

Antes de formular a segunda lei, é útil considerar processos (transformações entre estados de equilíbrio) que *podem* se dar em ambas as direções do tempo. Estes são um caso especial de processos quase estáticos que podem ser revertidos. São chamados de *reversíveis*.

Um processo reversível ocorre ao longo de estados de equilíbrio (condição de quase estaticidade), mas, além disso, não deve ocorrer atrito.

A figura abaixo mostra dois estados (P_1, V_1) e (P_2, V_2), conectados por processos reversíveis. Se iniciarmos em (P_1, V_1), seguirmos pelo caminho de baixo até (P_2, V_2) e voltarmos para (P_1, V_1), a energia não muda. De fato,

$$\oint dE = 0. \tag{4.2.14}$$

Mas o trabalho total realizado é não nulo: $\oint PdVn_{\rm e}0$. Então, de acordo com a primeira lei da termodinâmica (4.2.12), o trabalho realizado durante o *ciclo* deve ser igual ao calor absorvido pelo sistema, $\oint đ Q = \oint PdV$. Realizando o ciclo em um sentido, o sistema realiza trabalho e absorve calor do meio externo; seguindo no sentido oposto, é realizado trabalho sobre o sistema e o fluxo de calor se dá para o meio externo.

Processos que ocorrem em ciclos deste tipo, retornando ao ponto de partida, são muito interessantes, uma vez que podemos converter calor em trabalho, o que pode ser muito útil em várias situações de interessa prático. Temos aqui a essência básica do funcionamento de uma *máquina térmica*.

Segunda Lei da Termodinâmica

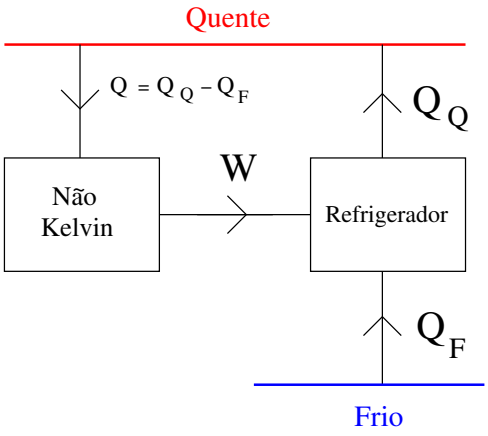
A segunda lei da termodinâmica poder ser formulada de duas maneiras equivalentes. A primeira nos diz quando a energia pode ser utilizada para realizar trabalho. A segunda enfatiza a observação de que existe uma *seta do tempo* no mundo macroscópico: o calor flui do quante para o frio. Podemos enuncia-las como

Segunda Lei à la Kelvin: Nenhum processo é possível cujo *único efeito* seja extrair calor de um *reservatório quente* e converter tudo em trabalho.

Segunda Lei à la Clausius: Nenhum processo é possível cujo *único efeito* seja transferir calor de um corpo frio para um corpo quente.

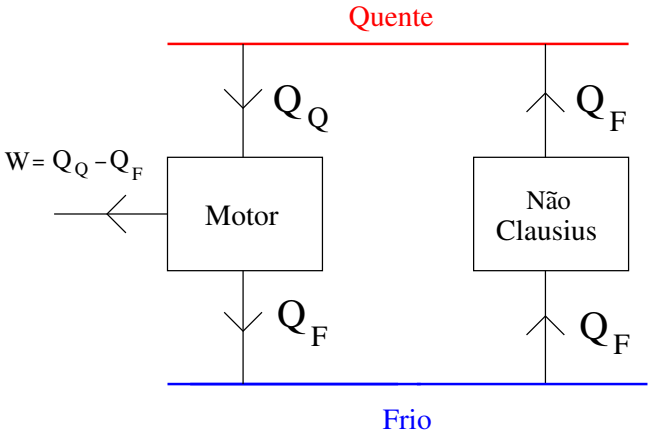
Vale a pena elaborar um pouco mais sobre o significado destas duas formulações. Primeiramente, todos nós sabemos que há em nossas casas objetos que transferem calor de um ambiente frio para um ambiente quente (a geladeira e o aparelho de ar condicionado, por exemplo). Mas notem que esse não é o "único efeito" produzido no processo. Basta olhar o ponteiro do medidor de consumo de energia elétrica! Na linguagem termodinâmica, a geladeira funciona porque estamos fornecendo trabalho (motor elétrico). O significado da formulação de Clausius vem do fato que quando dois objetos são colocados em contato, a energia sempre flui de mais quente para o mais frio.

Para ver a equivalência das formulações de Kelvin e Clausius, suponha, por exemplo, que exista uma máquina que viole a formulação de Kelvin, extraindo calor de um reservatório quente e convertendo tudo em trabalho. Neste caso, podemos utilizar este trabalho para fazer funcionar uma geladeira, extraindo calor de uma fonte fria e depositando-o de volta na fonte quente, da maneira esquematizada na figura abaixo.



Mas então, essa combinação das duas máquinas viola a formulação de Clausius. Ou seja, a violação da formulação de Kelvin ("motor miraculoso") implica na violação da formulação de Clausius ("refrigerador miraculoso"). Logo a formulação de Kelvin segue da formulação de Clausius.

A verificação da implicação oposta é ilustrada no diagrama abaixo onde temos um refrigerador miraculoso (não Clausius) operando juntamente com um motor. Vemos que essa combinação resulta em uma máquina que efetivamente retira uma quantidade de calor $Q_Q - Q_F$ da fonte quente e transforma tudo em trabalho, violando a formulação de Kelvin. Logo a formulação de Clausius segue da formulação de Kelvin.



O principal objetivo desta seção é mostrar que estas formulações da segunda lei nos levam a definir uma nova quantidade (função de estado) chamada "entropia".

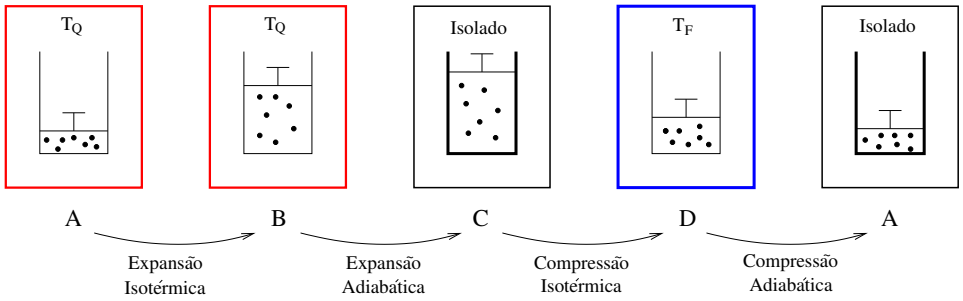
O ciclo de Carnot

Segundo a formulação de Kelvin da segunda lei, não podemos extrair calor de um reservatório quente e transforma-lo completamente em trabalho. Ainda assim, aparentemente, isso parece estar em contradição com o que vimos sobre ciclos reversíveis, uma vez que, para tais ciclos, $\oint đ Q = \oint đ W$.

Na verdade, não há uma contadição, uma vez que um ciclo reversível faz mais do que apenas extrair calor de um reservatório quente. Ao longo do ciclo deve haver necessariamente a transferência de calor para um (ou mais) reservatório(s). A energia disponível para realizar trabalho é a diferença entre o calor extraido e o calor perdido. Para ilustrar isso, é conveniente considerar um tipo particularmente simples de ciclo, denominado *Ciclo de Carnot*. Tal ciclo é composto por uma série de processos reversíveis, operando entre dois (e não mais do que dois) reservatórios que estão

a temperaturas T_Q (quente) e T_F (frio), nos quais ocorre a troca de calor com o sistema. Os quatro estágios deste ciclo, ilustrados na figura abaixo, são os seguintes:

- Expansão isotérmica AB a temperatura constante T_Q. Neste trecho o gás empurra a parede do recipiente e expande lentamente. Para que a temperatura seja mantida constante, o sistema deve absorver uma quantidade de calor Q_Q do ambiente.
- Expansão adiabática BC. O sistema é isolado, de modo que nenhum calor é transferido. Mas o gás ainda continua expandindo. Ao fazer isso, tanto a pressão quanto a temperatura diminuem.
- Contração isotérmica CD a temperatura constante T_F. Aqui o sistema começa a retornar ao seu estado inicial. Trabalho é realizado sobre o sistema, comprimindo o gás. Como o sistema não está isolado, calor Q_F é transferido para o ambiente.
- Contração adiabática DA. O gás é isolado das suas vizinhanças e continua sendo comprimido. Como não há transferência de calor, a temperatura e a pressão aumentam. Finalmente, o ponto inicial é atingido, quando a temperatura é novamente T_Q.



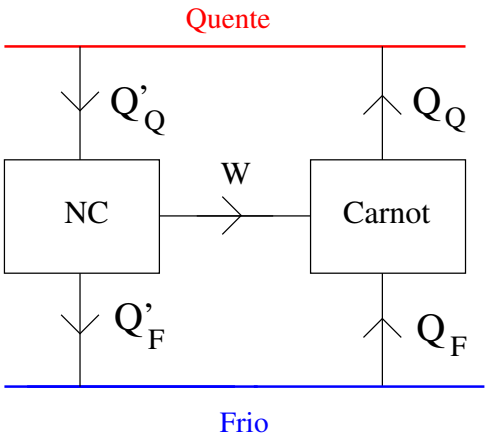
Ao final das quatro etapas, o sistema retorna ao seu estado original e o ciclo pode ser repetido. O calor líquido absorvido é $Q_Q - Q_F$ que é igual ao trabalho realizado pelo sistema W. Podemos então definir a *eficiência* η de uma máquina térmica como a razão entre o trabalho realizado e o calor transferido para o sistema.

$$\eta = \frac{W}{Q_Q} = \frac{Q_Q - Q_F}{Q_Q} = 1 - \frac{Q_F}{Q_Q}. \tag{4.2.15}$$

Idealmente, nós gostaríamos de não desperdiçar calor, fazendo $Q_F = 0$. Se isso fosse possível, a máquina térmica teria eficiência $\eta = 1$. Mas isso violaria a formulação de Kelvin da segunda lei. O ciclo de Carnot exibe claramente o problema, uma vez que só é possível retornar ao estado inicial (de modo a configurar o que se entende por uma máquina operando em ciclos) eliminando calor para um reservatório frio. Na verdade, podemos mostrar que o ciclo de Carnot é o melhor que pode ser feito, ou seja, o mais eficiente possível.

Teorema de Carnot: Carnot é o melhor. Ou, mais precisamente: De todas as máquinas, operando entre dois reservatórios de calor, a máquina reversível é a mais eficiente. Como um corolário simples, todas as máquinas reversíveis possuem a mesma eficiência que depende apenas das temperaturas dos reservatórios $\eta(T_Q, T_F)$.

Prova: Consideremos uma máquina – que denominaremos NC – operando entre os dois reservatórios de temperaturas T_Q e T_F. NC também realiza trabalho mas, ao contrário de Carnot, não é reversível. Suponha que NC absorve calor Q'_Q do reservatório quente e libera calor Q'_F no reservatório frio. Podemos então acoplar NC à Carnot e fazer Carnot funcionar como um refrigerador, como está esquematizado na figura abaixo.



O trabalho realizado por NC faz o refrigerador Carnot funcionar. O efeito resultante é extrair calor $Q'_Q - Q_Q$ do reservatório quente e, por conservação de energia, depositar a mesma quantidade $Q'_F - Q_F = Q'_Q - Q_Q$ no reservatório frio. Mas o calor que *sai* do reservatório quente deve ser, de acordo com a formulação de Clausius, positivo (ou nulo). Ou seja, $Q'_Q \geq Q_Q$. Então, a eficiência de NC é

$$\eta_{NC} = 1 - \frac{Q'_F}{Q'_Q} = \frac{Q'_Q - Q'_F}{Q'_Q} = \frac{Q_Q - Q_F}{Q'_Q} \leq \frac{Q_Q - Q_F}{Q_Q} = \eta_{Carnot}. \tag{4.2.16}$$

Logo, provamos que

$$\eta_{Carnot} \geq \eta_{NC}. \tag{4.2.17}$$

Suponha agora que NC é na verdade reversível. Então poderíamos utilizar os mesmos argumentos para provar que $\eta_{NC} \geq \eta_{Carnot}$. Então necessariamente $\eta_{NC} = \eta_{Carnot}$ quando NC é reversível. Isso significa que todas as máquinas revesíveis operando entre dois reservatórios possuem a mesma eficiência. Ou ainda, a razão Q_Q/Q_F é a mesma para todas as máquinas reversíveis. Além disso, esta eficiência deve ser uma função apenas das temperaturas, $\eta_{Carnot} = \eta(T_Q, T_C)$, simplesmente porque essas são as únicas variáveis em jogo.

Escala de Temperatura Termodinâmica e o Gás Ideal

Lembre-se que a lei zero da termodinâmica implica na existência de uma função de estado, que chamamos de temperatura, definida de maneira que ela possui o mesmo valor para quaisquer dois sistemas em equilíbrio térmico. Mas até aqui, ainda não definimos um critério canônico para decidir entre diferentes definições de temperatura: $\theta(P,V)$, ou $(\theta(P,V))^{1/3}$, ou $\sqrt{\theta(P,V)}$ ou qualquer outra função. Acabamos adotando um sistema de referência – o gás ideal – como um padrão para definir temperatura. Tal escolha foi bastante arbitrária. Podemos fazer melhor agora.

Já que a eficiência de uma máquina de Carnot depende apenas das duas temperaturas T_Q e T_F, podemos usar isso para *definir uma escala de temperatura que é independente de qualquer material específico*. (Embora, como veremos, a escala assim obtida acaba sendo equivalente à escala de gás ideal). Vejamos então como definir a temperatura usando o ciclo de Carnot.

A ideía chave é considerar duas máquinas de Carnot. A primeira opera entre dois reservatórios cujas temperaturas são tais que $T_1 > T_2$; a segunda máquina opera entre $T_2 > T_3$. Se a primeira máquina extrai calor Q_1 e elimina Q_2 então

$$Q_2 = Q_1 \left(1 - \eta(T_1, T_2)\right). \tag{4.2.18}$$

Aqui estamos utilizando as argumentos discutidos acima, segundo os quais $\eta = \eta_{Carnot}$ é uma função de T_1 e T_2, apenas. Quando a segunda máquina absorve Q_2 e elimina Q_3, teremos

$$Q_3 = Q_2\left(1-\eta(T_2,T_3)\right) = Q_1\left(1-\eta(T_1,T_2)\right)\left(1-\eta(T_2,T_3)\right). \tag{4.2.19}$$

Mas podemos considerar também as duas máquinas operando em conjunto, como uma única máquina de Carnot, entre T_1 e T_3. Para essa máquina, teremos

$$Q_3 = Q_1\left(1-\eta(T_1,T_3)\right). \tag{4.2.20}$$

Combinando as duas últimas equações,

$$1-\eta(T_1,T_3) = \left(1-\eta(T_1,T_2)\right)\left(1-\eta(T_2,T_3)\right). \tag{4.2.21}$$

O fato que T_2 deve se cancelar no lado direito (o lado esquerdo não depende de T_2) já é o bastante para nos dizer que

$$1-\eta(T_1,T_2) = \frac{f(T_2)}{f(T_1)}, \tag{4.2.22}$$

para alguma função $f(T)$. Neste ponto, podemos usar a liberdade que temos para definir temperatura fazendo a escolha mais simples $f(T) = T$. Assim, *definimos* a temperatura termodinâmica de tal maneira que a eficiência da máquina de Carnot é

$$\eta(T_1,T_2) = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \tag{4.2.23}$$

O Ciclo de Carnot para um Gás Ideal

Temos até aqui duas maneiras de especificar a temperatura. A primeira, em termos da equação de estado do gás ideal, é $T = PV/Nk_B$. A segunda utiliza o conceito de ciclos de Carnot. Vamos agora mostrar que, felizmente, estas duas definições são equivalentes. Para isso, calcularemos a eficiência da máquina de Carnot para um gás ideal.

Uma propriedade importante do gás ideal, que utilizaremos aqui, é que sua energia interna depende apenas da temperatura $E = E(T)$. Esse propriedade será deduzida quando estudarmos a teoria cinética. No contexto da termodinâmica, os *experimentos de Joule e de Joule-Thomson* são compatíveis com essa propriedade para gases rarefeitos (Moysés sec. 9.2, vol. 2).

Nos trechos isotérmicos do ciclo de Carnot temos $dT = 0$ e, para um gás ideal, $dE = 0$. Então, de acordo com a primeira lei da termodinâmica, $đQ = -đW$. Ao longo do trecho AB do ciclo de Carnot, teremos

$$Q_Q = \int_A^B đQ = -\int_A^B đW = \int_A^B PdV = \int_A^B \frac{NK_BT_Q}{V}dV = NK_BT_Q\log\left(\frac{V_B}{V_A}\right). \tag{4.2.24}$$

Para o trecho CD, teremos, usando $Q_F = -\int_C^D đQ$ (o sinal decorre da nossa conveção segundo a qual o calor cedido Q_F é positivo)

$$Q_F = -NK_BT_F\log\left(\frac{V_D}{V_C}\right) = NK_BT_F\log\left(\frac{V_C}{V_D}\right). \tag{4.2.25}$$

Nos trechos adiabáticos, $đQ = 0$, e o trabalho vai todo para a energia interna, de modo que $dE = -PdV$. Podemos mostrar que para um gás ideal submetido a um processo adiabático

$$TV^{\gamma-1} = \text{constante}; \quad \gamma = C_P/C_V \tag{4.2.26}$$

em que C_P e C_V são as capacidades térmicas a pressão e volume constante, respectivamente. Aplicado esta relação ao longo de BC e DA, teremos

$$T_Q V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}\ , \quad T_F V_D^{\gamma-1} = T_Q V_A^{\gamma-1}. \tag{4.2.27}$$

Portanto, $V_A/V_B = V_D/V_C$. Usando essa propriedade e as expressões (4.2.24) e (4.2.25), a eficiência do ciclo de Carnot de um gás ideal é

$$\eta = 1 - \frac{Q_F}{Q_Q} = 1 - \frac{T_F}{T_Q}. \tag{4.2.28}$$

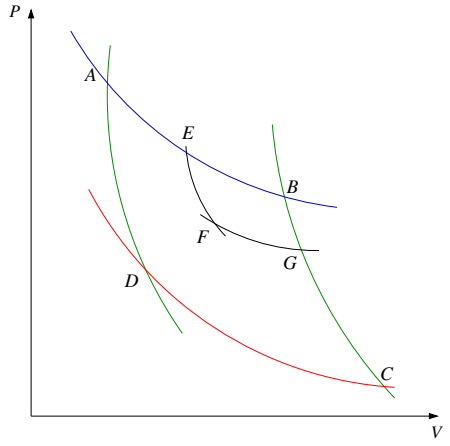
Ou seja, vemos que a eficiência em termos da temperatura de gás ideal coincide com aquela utilizando a temperatura temodinâmica em (4.2.23). As duas escalas de temperatura ficam completamente identificadas quando adotamos um ponto de referência; o padrão utilizado é o ponto triplo da água.

Entropia

Até aqui tratamos dos ciclos reversíveis operando entre dois reservatórios de calor (ciclo de Carnot). A segunda lei nos diz que não podemos transformar todo o calor da fonte quente em trabalho, no ciclo. Algum calor tem que ser devolvido. A fim de generalizar esta análize, vamos mudar nossa notação de modo que o calor Q denote a transferência de energia para o sistema, podendo ser positivo (calor que entra) ou negativo (calor que sai). Em termos da notação usada até aqui, $Q_1 = Q_Q$, $Q_2 = -Q_F$, $T_1 = T_Q$, $T_2 = T_C$. Assim, para qualquer ciclo de Carnot,

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{Q_i}{T_i} = 0. \tag{4.2.29}$$

Consideremos agora o ciclo mostrado na figura abaixo, no qual um dos seus cantos foi cortado na forma de uma pequeno ciclo de Carnot.



Para o ciclo sem o corte, $ABCD$, sabemos que

$$\frac{Q_{AB}}{T_Q} + \frac{Q_{CD}}{T_F} = 0. \tag{4.2.30}$$

Para o pequeno ciclo $EBGF$ vale

$$\frac{Q_{EB}}{T_Q} + \frac{Q_{GF}}{T_{FG}} = 0. \tag{4.2.31}$$

Será que o ciclo deformado $AEFGCD$ satisfaz a condição

$$\frac{Q_{AE}}{T_Q} + \frac{Q_{FG}}{T_{FG}} + \frac{Q_{CD}}{T_F} = 0 \ ? \tag{4.2.32}$$

Usando as relações (4.2.30), (4.2.31) e também $Q_{GF} = -Q_{FG}$, podemos verificar que de fato a (4.2.32) é satisfeita. Cortando mais e mais extremidades de tamanho arbitrariamente pequeno, podemos "esculpir" qualquer ciclo reversível como sendo formado por segmentos isotérmicos e adiabáticos de comprimento infinitesimal. Somando todas as contribuições Q/T ao longo do ciclo, aprendemos que o calor total absorvido em qualquer ciclo reversível deve obedecer

$$\oint \frac{đ Q}{T} = 0. \tag{4.2.33}$$

Mas isso é um resultado muito importante. Significa que se mudarmos o sistema do estado A para o estado B, de maneira reversível, a quantidade $\int_A^B \frac{đ Q}{T}$ é independente de caminho. Qualquer dos dois caminhos mostrados na figura dão o mesmo resultado, ou seja

$$\int_{\text{Caminho I}} \frac{đ Q}{T} = -\int_B^A \frac{đ Q}{T} = \int_A^B \frac{đ Q}{T} = \int_{\text{Caminho II}} \frac{đ Q}{T}. \tag{4.2.34}$$

Dado um estado de referência O, teremos a definição de uma nova função de estado. Essa função de estado é denominada *entropia*, S

$$S(A) = \int_O^A \frac{đ Q}{T}. \tag{4.2.35}$$

A entropia depende apenas do estado do sistema: $S = S(P, V)$. Ela não depende do caminho adotado para se chegar ao estado. Não precisamos nem mesmo considerar um caminho reversível. Uma vez em equilíbrio, o sistema possui uma entropia bem definida em relação ao estado de referência. Veremos que a mecânica estatística permite chegar à mesma grandeza a partir dos estados microscópicos do sistema.

De (4.2.35) temos que $dS = đ Q/T$, de modo que a primeira lei da termodinâmica pode ser expressa como

$$dE = TdS - PdV. \tag{4.2.36}$$

Irreversibilidade

Como seria a variação da entropia para o caso de caminhos não reversíveis? De acordo com o teorema de Carnot, sabemos que uma máquina irreversível operando entre T_Q e T_F é menos eficiente do que a máquina de Carnot. Voltando para a notação que utilizamos na demonstração do teorema de Carnot, denotamos Q_Q e Q_F o calor absorvido e eliminado pela máquina reversível e Q'_Q e Q'_F o calor absorvido e eliminado pela máquina irreversível. Podemos então mostra que

$$\frac{Q'_Q}{T_Q} - \frac{Q'_F}{T_F} \leq 0, \tag{4.2.37}$$

em que foi usado $Q_Q/T_Q = Q_F/T_F$, $Q'_Q \geq Q_Q$ (teorema de Carnot) e $T_Q > T_F$.

Para demonstrar a relação (4.2.37) notamos que se os dois ciclos (reversível e irreversível) realizam o mesmo trabalho $W = Q_Q - Q_F = Q'_Q - Q'_F$ então podemos escrever (verifique!)

$$\frac{Q'_Q}{T_Q} - \frac{Q'_F}{T_F} = \underbrace{\frac{Q_Q}{T_Q} - \frac{Q_F}{T_F}}_{=0 \ \text{(processo reversível)}} + \underbrace{\left(Q'_Q - Q_Q\right)}_{\geq 0 \text{ pelo teorema de Carnot}} \underbrace{\left(\frac{1}{T_Q} - \frac{1}{T_F}\right)}_{<0}. \tag{4.2.38}$$

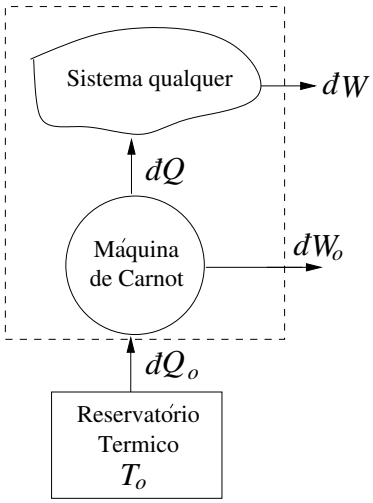
Portanto, segue a relação (4.2.37).

O resultado acima vale para qualquer máquina operando entres duas temperaturas. Utilizando o mesmo método de esculpir um ciclo de Carnot para gerar um ciclo mais geral, podemos fazer a generalização para qualquer ciclo, e chegamos à *desigualdade de Clausius* (voltamos à notação com o sinal negativo para o calor retirado do sistema)

$$\oint \frac{đ Q}{T} \leq 0. \tag{4.2.39}$$

Derivação alternativa da desigualdade de Clausius

Suponha que um sistema absorve calor $đ Q$ a temperatura T. Como o valor de $\frac{đ Q}{T}$ não depende dos detalhes de como o calor é transferido, podemos assumir que $đ Q$ vem de uma máquina de Carnot, como esquematizado na figura abaixo.



A máquina de Carnot, por sua vez, absorve calor $\frac{đ Q_0}{T}$ de um reservatório térmico a temperatura T_0. Para o ciclo de Carnot, vale a relação

$$\frac{đ Q}{T} = \frac{đ Q_0}{T_0} \Rightarrow đ Q_0 = T_0 \frac{đ Q}{T}. \tag{4.2.40}$$

Portanto, em um ciclo, o calor total fornecido pelo reservatório é

$$Q_0 = T_0 \oint \frac{đ Q}{T}. \tag{4.2.41}$$

Após um ciclo, o sistema e o ciclo de Carnot, como um todo, retornam ao estado inicial. De acordo com a primeira lei da termodinâmica,

$$Q_0 = \Delta U + W + W_0 = W + W_0 = W_{\text{total}}. \tag{4.2.42}$$

De acordo com a formulação de Kelvin da segunda lei, não é possível extrair calor de um reservatório e converte-lo totalmente em trabalho, retornando o sistema ao mesmo estado inicial (um ciclo). Logo,

$$W_{\text{total}} \leq 0. \tag{4.2.43}$$

Combinando as equações acima, obtemos

$$\oint \frac{đ Q}{T} \leq 0. \tag{4.2.44}$$

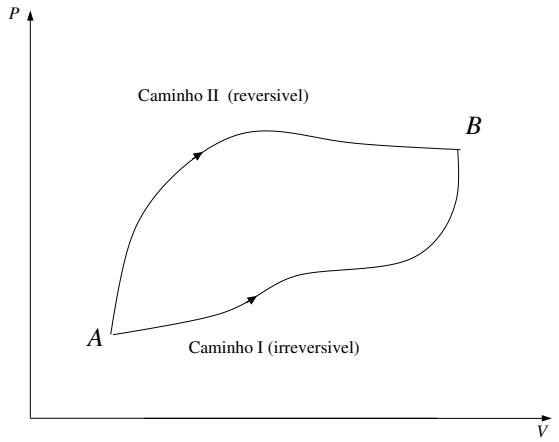
Caso o processo seja reversível, podemos reverter o caminho, obtend

$$-\oint \frac{đ\,Q}{T} \leq 0. \tag{4.2.45}$$

Logo,

$$\oint \frac{đ\,Q}{T} = 0. \tag{4.2.46}$$

Vamos agora utilizar a desigualdade de Clausius para entender melhor o papel da entropia nas transformações termodinâmicas. Considere dois estados A e B que podem ser conectados por processos reversíveis ou irreversíveis, como mostra a figura abaixo [5].



Então, de acordo com a desigualdade de Clausius

$$\oint \frac{đ\,Q}{T} = \int_I \frac{đ\,Q}{T} - \int_{II} \frac{đ\,Q}{T} \leq 0. \tag{4.2.47}$$

Ou seja,

$$\int_I \frac{đ\,Q}{T} \leq S(B) - S(A). \tag{4.2.48}$$

Quando o caminho I é adiabático (sistema isolado), $đ\,Q = 0$ e aprendemos que a entropia do sistema isolado nunca diminui

$$S(B) \geq S(A). \tag{4.2.49}$$

Além disso, se o processo adiabático for reversível, então os dois estados possuem a mesma entropia.

Degradação de energia [16]

Quando um sistema passa do estado A para o estado B (ambos de equilíbrio), a variação da entropia é sempre $\Delta S = S(B) - S(A)$, independentemente do caminho seguido. Então qual é a diferença entre seguir um caminho reversível ou irreversível? Para entender isso, consideremos por exemplo a expansão livre (irreversível) de um gás ideal quando o volume aumenta de V_A para V_B. A mesma variação de volume poderia ocorrer de maneira reversível em uma expansão isotérmica a temperatura T. Neste caso, seria realizado um trabalho

$$W_{AB} = nRT\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right). \tag{4.2.50}$$

[5] No caso irreversível, o caminho é apenas simbólico, não representando uma sequência de estados de equilíbrio.

Esse trabalho pode em princípio ser utilizado para levantar um peso ou comprimir uma mola, armazenando energia potencial. Como $\Delta U = Q - W$ e $\Delta U = 0$ em um processo isotérmico no gás ideal, obtemos $W_{AB} = Q$, onde Q é o calor absorvido do reservatório térmico. Como o reservatório térmico constitui a vizinhança do gás, temos que

$$\Delta S^R_{\text{vizinhança}} = \Delta S^R_{\text{reservatório}}. \tag{4.2.51}$$

Por outro lado, como o processo é reversível $\Delta S^R_{\text{reservatório}} = -\Delta S^R_{\text{gás}}$. Então

$$\Delta S^R_{\text{universo}} = \Delta S^R_{\text{vizinhança}} + \Delta S^R_{\text{gás}} = 0 \tag{4.2.52}$$

Já no processo irreversível de expansão livre, não há troca de calor com a vizinhança. Portanto

$$\Delta S^I_{\text{vizinhança}} = 0. \tag{4.2.53}$$

Por outro lado,

$$\Delta S^I_{\text{gás}} = \Delta S^R_{\text{gás}} = \frac{Q}{T} = \frac{W_{AB}}{T} = nR\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) > 0. \tag{4.2.54}$$

Portanto,

$$\Delta S^I_{\text{universo}} = \Delta S^I_{\text{vizinhança}} + \Delta S^R_{\text{gás}} = \Delta S^R_{\text{gás}} > 0. \tag{4.2.55}$$

Note que **não** é realizado trabalho na expansão livre irreversível. No caso irreversível, é **desperdiçada** uma quantidade de trabalho

$$W_{AB} = Q = T\Delta S^I_{\text{universo}} \tag{4.2.56}$$

que poderia ter sido utilizada se a transformação tivesse sido realizada de forma reversível. A relação acima mostra que o aumento da entropia do universo no processo irreversível está associado a uma *degradação de energia*.

Em geral, processos irreversíveis evolvem algum tipo de "desperdício de energia". Por exemplo, o calor produzido por uma fonte geotérmica que é dissipado na atmosfera, poderia ser aproveitado conectando uma máquina térmica entre a fonte de calor e o meio ambiente. Isso constituiria uma produção de energia mecânica *limpa* uma vez que não seria necessária a queima de combustível.

Seta do tempo

A formulação da segunda lei da termodinâmica, expressa em (4.2.49) é responsável pela observada *seta do tempo* no mundo macroscópico. Sistemas isolados podem apenas evoluir para estados de entropia maior ou igual à do estado inicial. Veremos que isso coincide com a definição de entropia de Boltzmann, na descrição microscópica, estatística.

Para concluir, vale a pena citar a seguinte explicação simples dada por Isaac Asimov:
A Segunda Lei da Termodinâmica afirma que a quantidade de trabalho útil que você pode obter a partir da energia do universo está constantemente diminuindo. Se você tem uma grande porção de energia em um lugar, uma alta intensidade dela, você tem uma alta temperatura aqui e uma baixa temperatura lá, então você pode obter trabalho dessa situação. Quanto menor for a diferença de temperatura, menos trabalho você pode obter. Então, de acordo com a Segunda Lei da Termodinâmica, há sempre uma tendência para as áreas quentes se resfriarem e as áreas frias se aquecerem - assim cada vez menos trabalho poderá ser obtido. Até que finalmente, quando tudo estiver numa mesma temperatura, você não poderá mais obter nenhum trabalho disso, mesmo que toda a energia continue lá. E isso é verdade para **tudo** *em geral, em todo o universo.*
(The Origin of the Universe em Origins: How the World Came to Be, série em vídeo, Eden Communications, EUA, 1983.)

Ciclo de Carnot em um campo gravitacional

É interessante considerar o conceito de temperatura, como definido pelo ciclo de Carnot, quando o sistema encontra-se imerso em um campo gravitacional. Surge aqui uma diferença fundamental, uma vez que a força gravitacional também atua sobre o equivalente em massa de qualquer forma de energia. Isso decorre da famosa relação de Einstein

$$E = mc^2, \tag{4.2.57}$$

onde c é a velocidade da luz, m é a massa e E é a energia. Por causa disso, o conceito de temperatura deve ser investigado em maior profundidade quando um campo gravitacional está presente.

Para entender isso consideremos um ciclo de Carnot que opera entre dois reservatórios térmicos. Vamos supor que os reservatórios, possuindo temperaturas T_1 e T_2, estejam localizados em posições do espaço possuindo potenciais gravitacionais ϕ_1 e ϕ_2, respectivamente. As respectivas trocas de calor Q_1 e Q_2 obedecem a relação que obtivemos anteriormente

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}. \tag{4.2.58}$$

Ou seja, vamos manter nossa definição de temperatura termodinâmica.

Consideremos então um sistema qualquer sujeito a uma transformação $ABCDA$ definida da seguinte forma:

1. Calor Q_1 é introduzido *isotermicamente* no sistema ao longo da transformação AB. Nesta etapa o sistema é mantido em um potencial gravitacional ϕ_1. A energia do sistema muda de U_A para
$$U_B = U_A + Q_1 - W_{AB}, \tag{4.2.59}$$
onde W_{AB} é o trabalho realizado.

2. O sistema é isolado e realiza um trabalho W_{BC}; em seguida transporta-se adiabaticamente para outro reservatório térmico, onde o potencial gravitacional é ϕ_2. Nesta primeira etapa

adiabática a energia muda para

$$\begin{aligned} U_C &= U_B - W_{BC} - \frac{U_B - W_{BC}}{c^2}\Delta\phi \\ &= (U_B - W_{BC})\left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}\right), \quad \Delta\phi \equiv \phi_2 - \phi_1. \end{aligned} \tag{4.2.60}$$

Note que o sistema dispende energia interna para se transportar para outro reservatório térmico, quando $\Delta\phi > 0$. Aqui usamos (4.2.57) para identificar $(U_B - W_{BC})/c^2$ como o equivalente em massa da energia interna do sistema (usualmente uma quantidade muito pequena).

3. Calor Q_2 é retirado *isotermicamente* do sistema ao longo da transformação CD. Nesta etapa o sistema é mantido em um potencial gravitacional ϕ_2. A energia do sistema muda de U_C para
$$U_D = U_C - Q_2 - W_{CD}, \tag{4.2.61}$$
onde W_{CD} é o trabalho "realizado" (nesta etapa, seria, em geral, negativo).

4. O sistema é isolado e "realiza" um trabalho W_{DA} (também nesta etapa, seria, em geral, negativo); em seguida transporta-se adiabaticamente de volta para o primeiro reservatório térmico, onde o potencial gravitacional é ϕ_1. Nesta segunda etapa adiabática a energia retorna ao seu valor original U_A. Portanto,
$$(U_D - W_{DA})\left(1 + \frac{\Delta\phi}{c^2}\right) = U_A. \tag{4.2.62}$$

(note a mundança de sinal em $\Delta\phi$ em relação à (4.2.60))

Combinando as (4.2.62) e (4.2.61), teremos

$$U_A = (U_C - Q_2 - W_{CD} - W_{DA})\left(1 + \frac{\Delta\phi}{c^2}\right) \tag{4.2.63}$$

Usando o valor de U_C dado em (4.2.60), obtemos

$$U_A = \left[(U_B - W_{BC})\left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}\right) - Q_2 - W_{CD} - W_{DA}\right]\left(1 + \frac{\Delta\phi}{c^2}\right) \tag{4.2.64}$$

Desconsiderando termos de ordem superior em $\Delta\phi/c^2$, teremos[6]

$$U_A = U_B - W_{BC} - (Q_2 + W_{CD} + W_{DA})\left(1 + \frac{\Delta\phi}{c^2}\right). \tag{4.2.65}$$

Usando o valor de U_B dado em (4.2.59), obtemos

$$U_A = U_A + Q_1 - W_{AB} - W_{BC} - (Q_2 + W_{CD} + W_{DA})\left(1 + \frac{\Delta\phi}{c^2}\right). \tag{4.2.66}$$

[6] $(1 + \Delta\phi/c^2)(1 - \Delta\phi/c^2) \approx 1$

Portanto,

$$Q_1 - Q_2\left(1+\frac{\Delta\phi}{c^2}\right) = \underbrace{W_{AB}+W_{BC}+(W_{CD}+W_{DA})\left(1+\frac{\Delta\phi}{c^2}\right)}_{\text{Trabalho total W}} \tag{4.2.67}$$

O rendimento deste ciclo é então

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}\left(1+\frac{\Delta\phi}{c^2}\right) \tag{4.2.68}$$

Usando a definição de temperatura termodinâmica, dada pela equação (4.2.58), obtemos

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}\left(1+\frac{\Delta\phi}{c^2}\right). \tag{4.2.69}$$

De acordo com a segunda lei da termodinâmica, o rendimento deve ser nulo em um universo que está em equilíbrio térmico (se todo o universo tivesse a mesma temperatura, nenhuma máquina poderia funcionar). Na ausência de gravidade, ou seja, $\Delta\phi = 0$, a equação (4.2.69), com $\eta = 0$, nos daria a condição usual $T_1 = T_2$, de onde decorre que a temperatura seria uniforme em todo o espaço. Mas no caso em que a gravidade está presente, a condição de rendimento nulo nos dá

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{1+\frac{\Delta\phi}{c^2}} = \frac{1}{1+\frac{\phi_2}{c^2}-\frac{\phi_1}{c^2}} \approx \frac{1+\frac{\phi_1}{c^2}}{1+\frac{\phi_2}{c^2}}, \tag{4.2.70}$$

onde na última passagem desconsideramos termos de ordem superior em ϕ_1/c^2. Essa relação também pode ser escrita como

$$T_1\left(1+\frac{\phi_1}{c^2}\right) = T_2\left(1+\frac{\phi_2}{c^2}\right). \tag{4.2.71}$$

Portanto, a temperatura de equilíbrio não é uniforme em todo o espaço, na presença de gravidade. Por exemplo, se $\phi_2 > \phi_1$, então $T_1 > T_2$. Esse interessante fenômeno foi originalmente previsto por Tolman em 1930 [17] e mais tarde generalizado utilizando argumentos semelhantes aos aqui apresentados [18, 19]. Trata-se de um efeito extremamente diminuto. Por exemplo para regiões separdas por uma altura Δh, nas proximidades da Terra,

$$\frac{T_2 - T_1}{\Delta h\, T_1} = \frac{g}{c^2} \approx 10^{-16}\mathrm{m}^{-1}, \tag{4.2.72}$$

onde usamos $\Delta\phi = g\Delta h$ (g é a aceleração da gravidade). Porém, nas escalas cosmológicas ou em certos fenômenos astrofísicos, o efeito pode ser apreciável.

A relação de Tolman, (4.2.71), pode ser obtida em um contexto mais geral de gravidade relativística (Teoria da Relatividade Geral). É possível mostrar que

$$T\sqrt{g_{00}} = \text{constante}, \tag{4.2.73}$$

onde g_{00} é uma das componentes do *tensor métrico*. No limite de gravitação newtoniana, quando $g_{00} \approx 1 + 2\phi/c^2$, a relação acima se reduz à

$$T\left(1+\frac{\phi}{c^2}\right) = \text{constante} \tag{4.2.74}$$

que é o mesmo que (4.2.71).

4.2.4 Terceira Lei

A segunda lei se refere apenas a diferenças no valor da entropia entre dois estados de equilíbrio. De fato, a equação (4.2.35) define a entropia em relação a um estado de referência. A terceira lei, também chamada de postulado de Nernst, fornece uma escala absoluta para a entropia, usualmente dada pela relação

$$\lim_{T\to 0} S(T) = 0. \tag{4.2.75}$$

É possível relaxar um pouco essa condição e impor apenas que a densidade de entropia S/N vá a zero no limite $T \to 0$. Discutiremos mais o significado disso quando tratarmos dos aspectos estatísticos.

Uma consequência imediata da terceira lei, é que capacidades térmicas devem se anular quando $T \to 0$. Isso decorre da equação

$$S(B) - S(A) = \int_A^B \frac{C_V}{T} dT. \tag{4.2.76}$$

Para que a entropia seja finita no zero absoluto, esta integral deve convergir. Portanto, a capacidade térmica deve tender a zero pelo menos como $C_v \to T^n$, com $n \geq 1$. Veremos que a descrição estatística está de acordo com essa propriedade, quando levamos em conta a teoria quântica. Por outro lado, se nos restringirmos a um tratamento clássico, veremos que as capacidades térmicas comportam-se como constantes, como no caso de uma gás ideal clássico ou da lei de Dulong-Petit. Isso violaria a terceira lei. Neste sentido, a terceira lei reflete o caráter quântico da física de baixas temperaturas.

Capítulo 5

Tópicos de Mecânica Estatística

5.1 Volume do espaço de fase no ensemble microcanônico

Para um gás monoatômico clássico, um microestado é caracterizado por $3N$ valores das coordenadas $q_i = x_1,\, y_1,\, z_1,\, x_2,\, y_2,\, z_2,\, \ldots,\, x_N, y_N, z_N$ e $3N$ momentos $p_i = p_{x_1},\, p_{y_1},\, p_{z_1},\, p_{x_2},\, p_{y_2},\, p_{z_2},\, \ldots,\, p_{x_N}, p_{y_N}, p_{z_N}$ Considerando um sistema de átomos livres (gás ideal), o hamiltoniano é

$$H(p) = \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m} \tag{5.1.1}$$

O volume do espaço de fase acessível que é ocupado por estados com energia no intervalo $E \leq H \leq E + \delta E$ é

$$\Omega(E, V, N) = \int_{\text{estados acessíveis}} dq_1 dq_2 \ldots dq_{3N} dp_1 dp_2 \ldots dp_{3N} \tag{5.1.2}$$

Supondo um volume V fixo,

$$\Omega(E, V, N) = V^N \int_{E \leq H(p) \leq E+\delta E} dp_1 dp_2 \ldots dp_{3N}. \tag{5.1.3}$$

Na equação acima, a integral sobre o $3N$ momentos, limitada à região $E \leq H \leq E + \delta E$, é a diferença entre o volume

$$\Phi(E, V, N) = V^N \int_{E \leq H(p)} dp_1 dp_2 \ldots dp_{3N} \tag{5.1.4}$$

e o volume $\Phi(E + \delta E, V, N)$. Ou seja,

$$\begin{aligned} \Omega(E, V, N) &= \Phi(E + \delta E, V, N) - \Phi(E, V, N) \\ &= \Phi(E, V, N) + \delta E \frac{\partial}{\partial E} \Phi(E, V, N) + \mathcal{O}(\delta E)^2 - \Phi(E, V, N) \\ &\approx \delta E \frac{\partial}{\partial E} \Phi(E, V, N). \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

Para calcular a integral sobre os momentos na equação (5.1.4) notamos que a mesma é o volume de uma esfera $3N$-dimensional, de raio $R = \sqrt{2mE}$. Usando o resultado [1]

$$(\text{volume da esfera em } 3N \text{ dimensões}) = \frac{\pi^{3N/2}}{\left(\frac{3N}{2}\right)!} R^{3N}, \tag{5.1.6}$$

[1] É claro que, um dos dois, $3N/2$ ou $3(N \pm 1)/2 \approx 3N/2$, é inteiro. De qualquer forma, é possível generalizar $z!$ para z não inteiro via $z! = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^z dt$.

teremos

$$\Phi(E,V,N) = V^N \frac{\pi^{3N/2}}{\left(\frac{3N}{2}\right)!}(2mE)^{3N/2}. \tag{5.1.7}$$

Substituindo (5.1.7) em (5.1.5), teremos

$$\begin{aligned}\Omega(E,V,N) &= V^N \frac{\pi^{3N/2}}{\left(\frac{3N}{2}\right)!}(2m)^{3N/2}\delta E \frac{3N}{2}(E)^{3N/2-1} \\ &= \frac{\pi^{3N/2}}{\left(\frac{3N}{2}\right)!}(2m)^{3N/2}\frac{3N}{2}\frac{\delta E}{E}V^N(E)^{3N/2}\end{aligned} \tag{5.1.8}$$

Usando a fórmula de Stirling ($x! \approx (x/e)^x$ para x grande ...),

$$\Omega(E,V,N) = \frac{3N}{2}\frac{\delta E}{E}V^N\left(\frac{4\pi emE}{3N}\right)^{3N/2} \tag{5.1.9}$$

5.1.1 "Correções" quânticas

Indstinguibilidade ...

$$\Omega(E,V,N) \to \frac{\Omega(E,V,N)}{N!} \approx \Omega(E,V,N)\left(\frac{e}{N}\right)^N \tag{5.1.10}$$

Tamanho mínimo de uma célula de espaço de fase ... $dxdp \to dxdp/(2\pi\hbar)$ ...

$$\Omega(E,V,N) \to \frac{\Omega(E,V,N)}{(2\pi\hbar)^{3N}}\left(\frac{e}{N}\right)^N = \left(\frac{V}{N}\right)^N\left(\frac{E}{N}\right)^{3N/2}\frac{3N\delta E}{2E}\left(\frac{em}{3\pi\hbar^2}\right)^{3N/2}e^N \tag{5.1.11}$$

5.1.2 Entropia estatística do gás ideal

$$\begin{aligned}S &= k_B \log\Omega(E,V,N) = k_B\left\{N\left[\log\left(\frac{V}{N}\right)+\frac{3}{2}\log\left(\frac{E}{N}\right)+\frac{3}{2}\log\left(\frac{em}{3\pi\hbar^2}\right)+1\right]\right. \\ &+ \left.\log\left(\frac{3N\delta E}{2E}\right)\right\}.\end{aligned} \tag{5.1.12}$$

No limite $N \gg 1$ (limite termodinâmico), teremos [2]

$$S = k_B \log\Omega(E,V,N) = Nk_B\left[\log\left(\frac{V}{N}\right)+\frac{3}{2}\log\left(\frac{E}{N}\right)+\frac{3}{2}\log\left(\frac{em}{3\pi\hbar^2}\right)+1\right]. \tag{5.1.13}$$

Note que o caráter extensivo de S decorre da correção feita em (5.1.10). Sem esta correção, teríamos o *paradoxo de Gibbs* [3].

[2] *É importante ressaltar este ponto. Átomos não são apenas pequenos: eles são realmente muito pequenos.* 10^{23} *é um número surpreendentemente grande. O número de grãos de areia em todas as praias do mundo é de cerca de* 10^{18}*. O número de estrelas em nossa galáxia é de cerca de* 10^{11}*. O número de estrelas em todo o Universo visível é, provavelmente, em torno de* 10^{22}*. E, no entanto, o número de moléculas de água em uma xícara de chá é mais do que* 10^{23} (trecho extraido da página de David Tong em `sp.pdf`). Não sub-estime o valor de N !

[3] http://en.wikipedia.org/wiki/GibbsParadox

5.1.3 Termodinâmica do gás ideal

Exercício: Obtenha as equações de estado para o gás ideal a partir das relações termodinâmicas

$$\frac{P}{T} = \frac{\partial}{\partial V} S(E, V, N) \tag{5.1.14}$$

e

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial}{\partial E} S(E, V, N). \tag{5.1.15}$$

5.1.4 Probabilidades de configurações microscópicas

Densidade de probabilidade de que a i-ésima partícula possua posição x_i, com y_i, z_i, x_j, y_j e z_j ($j \neq i$), quaisquer

$$\begin{aligned} p(x_i) &= \frac{\text{volume de espaço de fase com } x_i \text{ fixo}}{\text{volume total de espaço de fase}} \\ &= \frac{L_x^{N-1} L_y^N L_z^N \ldots}{L_x^N L_y^N L_z^N \ldots} = \frac{1}{L_x} \end{aligned} \tag{5.1.16}$$

(o fator de indistinguibilidade das outras partículas $(N-1)!$ se cancela). Os $\ldots$ representam as integrais sobre todos os p_i ($i = 1, \ldots, 3N$).

Então, a probabilidade de encontrar as N partículas em $x \geq L_x/2$ (todas as moléculas na metade de uma sala de comprimento L_x) é

$$p = \prod_{i=1}^{N} \int_0^{\frac{L_x}{2}} p(x_i) dx_i = \left(\frac{1}{L_x} \frac{L_x}{2} \right)^N \frac{1}{2^N}. \tag{5.1.17}$$

5.1.5 Distribuição de Maxwell via ensemble microcanônico

Densidade de probabilidade $p(p_i^x)$ de ter a i-ésima partícula com momento p_i^x

$$p(p_i^x) = \frac{\Omega'}{\Omega}. \tag{5.1.18}$$

$$\Omega' = \Omega|_{3N \to 3N-1;\ E \to E-\epsilon} \tag{5.1.19}$$

Justifique a expressão acima!

$$\epsilon = \frac{(p_i^x)^2}{2m} \tag{5.1.20}$$

Usando (5.1.9),

$$\begin{aligned} p(p_i^x) &= \frac{\frac{3N-1}{2}\frac{\delta E}{E-\epsilon}V^N\left(\frac{4\pi em(E-\epsilon)}{3N-1}\right)^{(3N-1)/2}}{\frac{3N}{2}\frac{\delta E}{E}V^N\left(\frac{4\pi emE}{3N}\right)^{3N/2}}. \\ &= \underbrace{\frac{3N-1}{3N}}_{\approx 1}\underbrace{\frac{E}{E-\epsilon}}_{\approx 1}(4\pi em)^{-1/2}\frac{(E-\epsilon)^{\frac{3N-1}{2}}}{E^{\frac{3N}{2}}}\underbrace{\frac{(3N)^{\frac{3N}{2}}}{(3N-1)^{\frac{3N-1}{2}}}}_{=3^{1/2}\frac{N^{3N/2}}{(N-1/3)^{(3N-1)/2}}} \\ &= \left(\frac{3}{4\pi em}\right)^{1/2}\underbrace{\frac{(E-\epsilon)^{\frac{3N-1}{2}}}{E^{\frac{3N}{2}}}}_{A}\underbrace{\frac{N^{3N/2}}{(N-1/3)^{(3N-1)/2}}}_{B}. \end{aligned} \tag{5.1.21}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{E}}\left(1-\frac{\epsilon}{E}\right)^{\frac{3N-1}{2}} \approx \frac{1}{\sqrt{E}}\left(1-\frac{\epsilon}{E}\right)^{\frac{3N}{2}}. \tag{5.1.22}$$

Usando o valor da energia total $E = \frac{3}{2}Nk_BT$,

$$A \approx \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}Nk_BT}}\left(1-\frac{\epsilon}{\frac{3}{2}Nk_BT}\right)^{\frac{3N}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}Nk_BT}}\left(1-\frac{\epsilon}{k_BT}\frac{1}{\frac{3N}{2}}\right)^{\frac{3N}{2}}. \tag{5.1.23}$$

Para $N \gg 1$,

$$A \approx \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}Nk_BT}}\mathrm{e}^{-\frac{\epsilon}{k_BT}} \tag{5.1.24}$$

$$B = \sqrt{N}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3N}}\right)^{\frac{3N}{2}} \approx \sqrt{N}\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{3N}{2}}\right)^{\frac{3N}{2}} \approx \sqrt{N}\mathrm{e}^{1/2} \tag{5.1.25}$$

Substituindo A, B e a equação (5.1.20) em (5.1.21),

$$\begin{aligned} p(p_i^x) &= \left(\frac{3}{4\pi em}\right)^{1/2}\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}Nk_BT}}\mathrm{e}^{-\frac{\epsilon}{k_BT}}\sqrt{N}\mathrm{e}^{1/2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi mk_BT}}\mathrm{e}^{-\frac{(p_i^x)^2}{2mK_BT}}. \end{aligned} \tag{5.1.26}$$

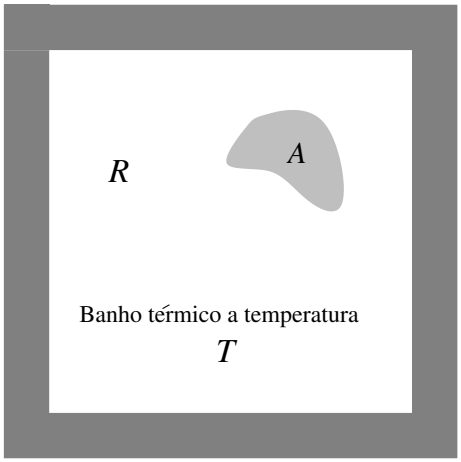
Usando $p_i^x = mv_i^x$, teremos

$$p(v_i^x) = p(p_i^x)\frac{dp_i^x}{dv_i^x} = p(p_i^x)m = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_BT}}\mathrm{e}^{-\frac{m(v_i^x)^2}{2K_BT}}, \tag{5.1.27}$$

que é a distribuição de Maxwell.

5.2 O ensemble canônico

Consideremos um sistema $\boxed{A}$ que pode trocar energia com um *reservatório térmico* $\boxed{R}$ [4].



- $\boxed{A}$ e $\boxed{R}$ são macroscópicos.
- $\boxed{R}$ é um reservatório térmico ($\partial T/\partial E \to 0$).
- Um dado microestado j de A possui energia E_j.
- $\boxed{A} + \boxed{R}$ compõe um sistema isolado de energia fixa

$$E_0 = E_j + E_R. \tag{5.2.1}$$

com E_R a energia do reservatório de calor. Portanto, podemos tratar o sistema composto $\boxed{A}$ e $\boxed{R}$ usando as hipóteses do ensemble microcanônico.

$\boxed{\text{Qual é a probabilidade } p_j \text{ de encontrar } A \text{ no estado } j?}$

Seja Ω'_{A+R} o número de microestados do sistema composto, com $\boxed{A}$ no estado j. Então, de acordo com o postulado estatístico (probabilidades iguais a priori)

$$p_j = \frac{\Omega'_{A+R}}{\Omega_{A+R}(E_0)}. \tag{5.2.2}$$

Para cada microestado do conjunto Ω'_{A+R} temos um microestado de $\boxed{R}$ com energia $E_0 - E_j$. Portanto,

$$p_j = \frac{\Omega_R(E_0 - E_j)}{\Omega_{A+R}(E_0)}. \tag{5.2.3}$$

[4] Por definição, a temperatura do reservatório não muda quando uma quantidade de energia flui de $\boxed{A}$ para $\boxed{R}$.

Tomando o log,

$$\begin{aligned} k_B \log p_j &= S_R(\underbrace{E_0 - E_j}_{=E_R}) - S_{A+R}(E_0) \\ &= S_R(E_0) - E_j \underbrace{\left.\frac{\partial S_R}{\partial E_R}\right|_{E_j=0}}_{\frac{1}{T}} + \mathcal{O}(E_j^2) - S_{A+R}(E_0) \\ &\approx -\frac{E_j}{T} + \underbrace{S_R(E_0) - S_{A+R}(E_0)}_{\text{independente do microestado } j} . \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

$$\boxed{p_j = \mathrm{e}^{-\beta E_j} \mathrm{e}^{\frac{1}{k_B}(S_R(E_0) - S_{A+R}(E_0))}} \tag{5.2.5}$$

$$\boxed{\beta \equiv \frac{1}{k_B T}} \tag{5.2.6}$$

$$\boxed{\text{Fator, ou peso, de Boltzmann} = \mathrm{e}^{-\beta E_j}}$$

- Escala de energia: $k_B T = 1/\beta$.
- Comparação entre estados de diferentes energias.
- Microestado de altas (baixas) energias são menos (mais) prováveis.

5.2.1 Função de partição

A probabilidade normalizada é

$$p_j = \frac{1}{Z} \mathrm{e}^{-\beta E_j} \tag{5.2.7}$$

com

$$\boxed{Z = \sum_k \mathrm{e}^{-\beta E_k}} \tag{5.2.8}$$

Z é a *função de partição*. Temos aqui toda a informação microscópica encapsulada em Z.

- p_j é a distribuição de probabilidades dos estados canônicos de Gibbs.
- A soma $\sum_k$ é sobre *estados* com energia E_k; **não é uma soma sobre energias!**

Valores médios ...

$$\begin{aligned}\langle E_j\rangle &= \sum_j E_j p_j \\ &= \frac{1}{Z}\sum_j E_j \mathrm{e}^{-\beta E_j} \\ &= \frac{1}{Z}\left(-\frac{\partial}{\partial\beta}\sum_j \mathrm{e}^{-\beta E_j}\right) \\ &= -\frac{1}{Z}\frac{\partial}{\partial\beta}Z \\ &= -\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z \end{aligned} \tag{5.2.9}$$

$$\boxed{\langle E_j\rangle = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z} \tag{5.2.10}$$

Flutuações ...

$$\sigma^2_{E_j} = \langle (E_j - \langle E_j\rangle)^2\rangle = \langle E_j^2\rangle - \langle E_j\rangle^2 \tag{5.2.11}$$

$$\begin{aligned}\langle E_j^2\rangle &= \sum_j E_j^2 p_j \\ &= \frac{1}{Z}\sum_j E_j^2 \mathrm{e}^{-\beta E_j} \\ &= \frac{1}{Z}\left(-\frac{\partial}{\partial\beta}\sum_j E_j \mathrm{e}^{-\beta E_j}\right) \\ &= -\frac{1}{Z}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(Z\langle E_j\rangle\right) \\ &= -\frac{\partial\langle E_j\rangle}{\partial\beta} - \langle E_j\rangle \underbrace{\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta}}_{-\langle E_j\rangle} \\ &= -\frac{\partial\langle E_j\rangle}{\partial\beta} + \langle E_j\rangle^2 \end{aligned} \tag{5.2.12}$$

$$\sigma^2_{E_j} = \langle E_j^2\rangle - \langle E_j\rangle^2 = -\frac{\partial\langle E_j\rangle}{\partial\beta} - \langle E_j\rangle^2 - \langle E_j\rangle^2 = -\frac{\partial\langle E_j\rangle}{\partial\beta}. \tag{5.2.13}$$

Flutuação em relação à média

$$\frac{\sigma^2_{E_j}}{\langle E_j\rangle^2} = -\frac{1}{\langle E_j\rangle^2}\frac{\partial\langle E_j\rangle}{\partial\beta}. \tag{5.2.14}$$

Tomando

$$\langle E_j\rangle = Nu \tag{5.2.15}$$

onde u é a densidade de energia média.

$$\frac{\sigma_{E_j}^2}{\langle E_j\rangle^2} = -\frac{1}{N}\frac{1}{u^2}\frac{\partial u}{\partial \beta}. \tag{5.2.16}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} = \frac{\partial T}{\partial \beta}\frac{\partial u}{\partial T} = \frac{1}{\frac{\partial \beta}{\partial T}}\frac{\partial u}{\partial T} = \left(-\frac{1}{k_B T}\right)^{-1} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial T}}_{c_V} \tag{5.2.17}$$

$$\frac{\sigma_{E_j}^2}{\langle E_j\rangle^2} = \frac{k_B T^2 c_V}{N u^2} \tag{5.2.18}$$

$$\frac{\sigma_{E_j}}{\langle E_j\rangle} = \frac{\sqrt{k_B c_V}T}{u}\frac{1}{\sqrt{N}}. \tag{5.2.19}$$

Flutuação relativa $\approx 1/\sqrt{N}$ justifica $Nu = \langle E_j\rangle$.

5.2.2 Conexão com a termodinâmica

Comparando (5.2.5) com (5.2.7), obtemos a relação entre a função de partição (obtida a partir das características microscópicas) e a entropia. De fato, (5.2.5) com (5.2.7) implicam em

$$\frac{1}{Z} = \mathrm{e}^{\frac{1}{k_B}(S_R(E_0) - S_{A+R}(E_0))} \tag{5.2.20}$$

Devemos ser capazes de mostrar que o lado esquerdo da igualdade acima não depende das características do sistema $\boxed{R}$ (apenas da sua temperatura). Vejamos

$$S_{A+R}(E_0) = S_A(\langle E_j\rangle) + S_R(\langle E_R\rangle) \tag{5.2.21}$$

$$\begin{aligned} S_R(E_0) &= S_R(\langle E_R + \langle E_j\rangle) \\ &\approx S_R(\langle E_R\rangle) + \langle E_j\rangle \underbrace{\left.\frac{\partial S_R}{\partial E_R}\right|_{E_R=\langle E_R\rangle}}_{\frac{1}{T}} \\ &= S_R(\langle E_R\rangle) + \frac{\langle E_j\rangle}{T} \end{aligned} \tag{5.2.22}$$

Ou seja,

$$S_R(E_0) - S_{A+R}(E_0) \approx \cancel{S_R(\langle E_R\rangle)} + \frac{\langle E_j\rangle}{T} - S_A(\langle E_j\rangle) - \cancel{S_R(\langle E_R\rangle)} = \frac{\langle E_j\rangle}{T} - S_A(\langle E_j\rangle) \tag{5.2.23}$$

Então,

$$\frac{1}{Z} = \mathrm{e}^{\frac{1}{k_B}\left(\frac{\langle E_j\rangle}{T} - S_A(\langle E_j\rangle)\right)}. \tag{5.2.24}$$

Como era de se esperar, apenas as propriedades termodinâmicas de $\boxed{A}$ (e a temperatura T comum ao banho térmico) aparecem. Temos assim duas expressões equivalentes para Z, a saber

$$\boxed{Z = \sum_k \mathrm{e}^{-\beta E_k} \quad \text{e} \quad Z = \mathrm{e}^{-\frac{1}{k_B}\left(\frac{\langle E_j\rangle}{T} - S_A(\langle E_j\rangle)\right)}}. \tag{5.2.25}$$

A expressão à esquerda está expressa em termos de propriedades microscópicas; a expressão à direita está em termos de grandezas termodinâmicas.

De agora em diante, vamos nos referir apenas às grandezas associadas ao sistema $\boxed{A}$. Assim, quando $E = \langle E_j \rangle = E$ e $S = S_A(\langle E_j \rangle)$, são a energia e a entropia de um sistema qualquer em contato com um reservatório térmico a temperatura T, teremos

$$\boxed{Z = \mathrm{e}^{-\beta(E-TS)}}. \tag{5.2.26}$$

A função de estado

$$F(T, V, N) = E - TS \tag{5.2.27}$$

é a *energia livre de Helmholtz*. Então a conexão entre as "coisas micro" (Z) e a termodinâmica (F) é

$$\boxed{F = -k_B T \log Z(T, V, N).} \tag{5.2.28}$$

Programa no ensemble microcanônico:

- Construa um modelo microscópico (muita criatividade).
- Conte os microestados, ou seja, encontre Ω (parte difícil).
- Calcule a entropia $S = k_B \log \Omega$ (fácil).
- Use
$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} \quad \text{e} \quad \frac{P}{T} = \frac{\partial S}{\partial V} \tag{5.2.29}$$
(fácil).
- Mais importante aplicação do ensemble microcanônico: Derivação do ensemble canônico.

Programa no ensemble canônico:

- Construa um modelo microscópico (muita criatividade).
- Calcule
$$Z = \sum_k \mathrm{e}^{-\beta E_k} \tag{5.2.30}$$
(nem sempre fácil, porém *tratável*, usando técnicas de aproximações, etc; requer engenhosidade/criatividade ...)
- Calcule
$$F = -k_B T \log Z \tag{5.2.31}$$
(imediato).
- Usando (5.2.27),
$$dF = d(E - TS) = dE - dTS - TdS = \cancel{TdS} - PdV - SdT - \cancel{TdS} = -PdV - SdT. \tag{5.2.32}$$
Portanto a conexão com a termodinâmica é
$$S = -\frac{\partial F}{\partial T}, \quad P = -\frac{\partial F}{\partial V}, \quad \ldots \tag{5.2.33}$$

- Aplicações do ensemble canônico: Tudo ...

Aviso importante:

A distribuição de probabilidades de energia, $p(E)$, **não é** $\mathrm{e}^{-\beta E}$. O que mostramos acima foi que

$$p_j = Z^{-1}\mathrm{e}^{-\beta E_j} \tag{5.2.34}$$

onde E_j é a energia do estado j. Em geral, podemos ter vários estados com a mesmo energia (degenerescência). Neste caso,

$$p(E) = Z^{-1}\mathrm{e}^{-\beta E} \times \underbrace{(\text{degenerescência})}_{\text{número de microestados com energia } E} \tag{5.2.35}$$

5.2.3 Exemplos

Gás ideal monoatômico

Neste caso, o estado j é caracterizado pelos valores contínuos do conjunto $\{q, p\}$ (configuração de posição e momento de todas as partículas). A energia de cada configuração é

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m}(\vec{p}_i)^2. \tag{5.2.36}$$

A função de partição é uma "soma contínua" (também conhecida como *integral*) de todos os pesos de Boltzmann

$$\begin{aligned}
\exp\left[-\sum_{i=1}^{N}\frac{\beta}{2m}(\vec{p}_i)^2\right] &= \exp\left[-\frac{\beta}{2m}\left((p_1^x)^2+(p_1^y)^2+(p_1^z)^2\right)\right] \\
&\times \exp\left[-\frac{\beta}{2m}\left((p_2^x)^2+(p_2^y)^2+(p_2^z)^2\right)\right]\ldots \\
&\times \exp\left[-\frac{\beta}{2m}\left((p_N^x)^2+(p_N^y)^2+(p_N^z)^2\right)\right]
\end{aligned} \tag{5.2.37}$$

Do ponto de vista puramente clássico, isso seria tudo ... No entanto, como já observamos ao tratar o ensemble microcanônico, devemos levar em conta que átomos são quanticamente indistinguíveis, e também que o menor volume possível (no espaço de fase $3N$-dimensional) é h^{3N} (h é a constante de Planck). Levando isso em conta, teremos

$$Z = \frac{1}{N!h^{3N}}\int \exp\left[-\sum_{i=1}^{N}\frac{\beta}{2m}(\vec{p}_i)^2\right]. \tag{5.2.38}$$

Explicitando a integral $6N$-dimensional

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{N!h^{3N}} \underbrace{\int dx_1 dy_1 dz_1}_{V} \underbrace{\int dx_2 dy_2 dz_2}_{V} \ldots \underbrace{\int dx_N dy_N dz_N}_{V} \\ &\times \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dp_1^x \exp\left[-\frac{\beta}{2m}\left((p_1^x)^2\right)\right]}_{I} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dp_1^y \exp\left[-\frac{\beta}{2m}\left((p_1^y)^2\right)\right]}_{I} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dp_1^z \exp\left[-\frac{\beta}{2m}\left((p_1^z)^2\right)\right]}_{I} \\ \ldots &\ \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dp_N^x \exp\left[-\frac{\beta}{2m}\left((p_N^x)^2\right)\right]}_{I} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dp_N^y \exp\left[-\frac{\beta}{2m}\left((p_N^y)^2\right)\right]}_{I} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dp_N^z \exp\left[-\frac{\beta}{2m}\left((p_N^z)^2\right)\right]}_{I} \\ &= \frac{1}{N!h^{3N}} V^N (I)^{3N}. \end{aligned} \tag{5.2.39}$$

A integral I é a nossa velha conhecida integral gaussiana

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dp \exp\left[-\frac{\beta}{2m}p^2\right] = \sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}}. \tag{5.2.40}$$

Quem disse que é impossível fazer uma integral em um espaço de 6×10^{23} dimensões?

Exercício:

Obtenha a equação de estado do gás ideal.

Rede de N osciladores clássicos

- Modelo: Osciladores harmônicos independentes de mesma frequência natural ω em sítios de uma rede unidimensional. A energia de uma configuração $j = \{p, q\}$ é

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{1}{2m}(p_i)^2 + \frac{m\omega^2}{2}(x_i)^2\right] \tag{5.2.41}$$

- Os pesos de Boltzmann na função de partição canônica são:

$$\begin{aligned} \exp\left[-\sum_{i=1}^{N} \frac{\beta}{2m}(p_i)^2 + \frac{\beta m\omega^2}{2}(x_i)^2\right] &= \exp\left[-\frac{\beta}{2m}p_1^2\right] \exp\left[-\frac{\beta m\omega^2}{2}x_1^2\right] \\ &\times \exp\left[-\frac{\beta}{2m}p_2^2\right] \exp\left[-\frac{\beta m\omega^2}{2}x_2^2\right] \ldots \\ &\times \exp\left[-\frac{\beta}{2m}p_N^2\right] \exp\left[-\frac{\beta m\omega^2}{2}x_N^2\right] \end{aligned} \tag{5.2.42}$$

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{h^N}\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \exp\left[-\frac{\beta m\omega^2}{2}x_1^2\right]\ldots\int_{-\infty}^{\infty} dx_N \exp\left[-\frac{\beta m\omega^2}{2}x_N^2\right] \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} dp_1 \exp\left[-\frac{\beta}{2m}p_1^2\right]\ldots\int_{-\infty}^{\infty} dp_N \exp\left[-\frac{\beta}{2m}p_N^2\right] \\ &= \frac{1}{h^N}\left(\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left[-\frac{\beta m\omega^2}{2}x^2\right]\right)^N\left(\int_{-\infty}^{\infty} dp \exp\left[-\frac{\beta}{2m}p^2\right]\right)^N. \\ &= \left(\frac{2\pi}{\beta h\omega}\right)^N = \left(\frac{1}{\beta\hbar\omega}\right)^N;\ \ \hbar = \frac{h}{2\pi} = 10^{-34}\text{J . s.} \end{aligned} \tag{5.2.43}$$

Exercício: Obtenha todas as quantidades termodinâmicas.

Rede de N osciladores quânticos

- Modelo microscópico e resultado previsto pela Mecânica Quântica:

  Cada oscilador (considerado independentemente) no estado j, possui energia

$$E_j = \left(j+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega;\quad j = 0,1,2,\ldots \tag{5.2.44}$$

  O estado de N osciladores é então caracterizado pelo conjunto de valores $\{j_1, j_2, \ldots, j_N\}$ e a energia correspondente é

$$E_{j_1,\ldots,j_N} = \hbar\omega\sum_{i=1}^{N}\left(j_i+\frac{1}{2}\right) \tag{5.2.45}$$

- Função de partição:

  O peso de Boltzmann é

$$\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega\sum_{i=1}^{N}\left(j_i+\frac{1}{2}\right)} = \mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega\left(j_1+\frac{1}{2}\right)}\ldots\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega\left(j_N+\frac{1}{2}\right)} \tag{5.2.46}$$

  A função de partição é então

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{j_1,j_2\ldots j_N}\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega\left(j_1+\frac{1}{2}\right)}\ldots\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega\left(j_N+\frac{1}{2}\right)} \\ &= \sum_{j_1}\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega\left(j_1+\frac{1}{2}\right)}\sum_{j_2}\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega\left(j_2+\frac{1}{2}\right)}\ldots\sum_{j_N}\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega\left(j_N+\frac{1}{2}\right)} \\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega\left(j+\frac{1}{2}\right)}\right)^N. \end{aligned} \tag{5.2.47}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega\left(j+\frac{1}{2}\right)} = \mathrm{e}^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}}\sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega j} = \mathrm{e}^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}}(1+\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega}+(\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega})^2+\ldots) \tag{5.2.48}$$

Progressão geométrica infinita de razão $q = \exp(-\beta\hbar\omega)$ ...

$$\sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega\left(j+\frac{1}{2}\right)} = \mathrm{e}^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}}\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega}} \tag{5.2.49}$$

$$Z = \left(\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}}}{1 - \mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega}} \right)^N . \tag{5.2.50}$$

Esta expressão também pode ser escrita como

$$Z = Z_1^N \tag{5.2.51}$$

onde

$$Z_1 = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}}}{1 - \mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega}} \tag{5.2.52}$$

é a função de partição de um oscilador. Veremos mais adiante que Z_1 será importante no cálculo da distribuição de energia da radiação térmica (corpo negro).

Exercício: Mostre que o resultado acima se reduz ao resultado clássico, dado pela equação (5.2.43), no limite $\beta\hbar\omega \ll 1$ (ou seja, quando a escala de energia térmica, $k_B T$ é muito menor do que a energia $\hbar\omega$)[5]. Estime a frequência ω no caso em essas duas energias são da mesma ordem de grandeza, para a temperatura ambiente.

Rede de N spins independentes

- Modelo microscópico e resultado previsto pela Mecânica Quântica para um paramagneto ideal de spin 1/2:

  A energia da partícula de spin 1/2, de momento magnético μ_0, em um campo externo H é

  $$E_\sigma = -\mu_0 H \sigma; \quad \sigma = \pm 1 \tag{5.2.53}$$

  O estado de N spins é então caracterizado pelo conjunto de valores $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N\}$ e a energia correspondente é

  $$E_{\sigma_1,\ldots,\sigma_N} = -\mu_0 H \sum_{i=1}^{N} \sigma_i. \tag{5.2.54}$$

- Função de partição:

  O peso de Boltzmann é

  $$\mathrm{e}^{\beta\mu_0 H \sum_{i=1}^N \sigma_i} = \mathrm{e}^{\beta\mu_0 H\sigma_1} \ldots \mathrm{e}^{\beta\mu_0 H\sigma_N} \tag{5.2.55}$$

  A função de partição é então

  $$\begin{aligned} Z &= \sum_{\sigma_1,\sigma_2\ldots\sigma_N} \mathrm{e}^{\beta\mu_0 H\sigma_1} \ldots \mathrm{e}^{\beta\mu_0 H\sigma_N} \\ &= \sum_{\sigma_1=\pm1} \mathrm{e}^{\beta\mu_0 H\sigma_1} \ldots \sum_{\sigma_N=\pm1} \mathrm{e}^{\beta\mu_0 H\sigma_N} \\ &= \left(\sum_{\sigma=\pm1} \mathrm{e}^{\beta\mu_0 H\sigma} \right)^N \\ &= \left(\mathrm{e}^{\beta\mu_0 H} + \mathrm{e}^{-\beta\mu_0 H} \right)^N \\ &= (2\cosh\beta\mu_0 H)^N \end{aligned} \tag{5.2.56}$$

[5] $\exp x \approx 1 + x$

- Energia interna

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z = -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta} = -N\left(\mu_0 H e^{\beta\mu_0 H} - \mu_0 H e^{-\beta\mu_0 H}\right)\frac{\left(e^{\beta\mu_0 H}+e^{-\beta\mu_0 H}\right)^{N-1}}{\left(e^{\beta\mu_0 H}+e^{-\beta\mu_0 H}\right)^{N}} \\ &= -\mu_0 N H\frac{e^{\beta\mu_0 H}-e^{-\beta\mu_0 H}}{e^{\beta\mu_0 H}+e^{-\beta\mu_0 H}} \\ &= -\mu_0 N H\tanh(\beta\mu_0 H) \equiv -mHN, \end{aligned} \tag{5.2.57}$$

  onde m é o momento magnético por íon.

- Suscetibilidade magnética

$$\chi = \frac{\partial m}{\partial H} = \frac{\mu_0^2}{k_B T}\frac{1}{\cosh^2(\beta\mu_0 H)}. \tag{5.2.58}$$

No limite de campo externo nulo, obtemos a "lei de Curie"

$$\chi_0 = \frac{\mu_0^2}{k_B T}. \tag{5.2.59}$$

5.3 Radiação eletromagnética em equilíbrio térmico

5.3.1 Alguns fatos básicos

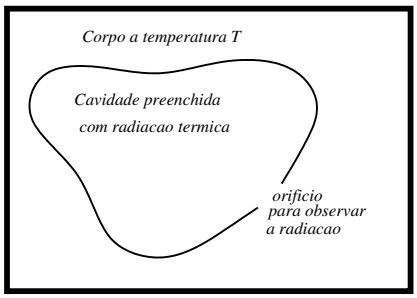
- Contradição entre a teoria estatística do calor e o eletromagnetismo (Planck em 1900).

- Densidade de energia da radiação eletromagnética emitida por um corpo aquecido.

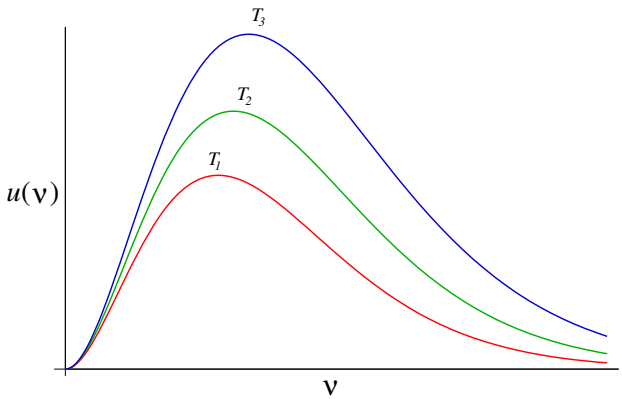
- Densidade de energia, emitida por um *orifício* na parede de uma *cavidade*, no intervalo de frequência entre ν e $\nu + d\nu$:

$$u(\nu)d\nu \equiv \frac{\text{energia da radiação térmica com } \nu \leq \text{frequência} \leq \nu + d\nu}{\text{unidade de volume}} \tag{5.3.1}$$

  $u(\nu)$ é chamada de *densidade espectral*.



- Gráfico experimental de $u(\nu)$ para temperaturas $T_1 < T_2 < T_3$.



KirchHoff em 1860 enunciou a lei segundo a qual a distribuição acima depende apenas da temperatura, sendo independente, entre outras coisas, do material das paredes do forno.

- Densidade de energia total (área sob a curva) :

$$u = \int_0^\infty u(\nu) d\nu = \text{finito}. \tag{5.3.2}$$

- Lei de escala de Wien[6]

$$u(\nu) = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right) \tag{5.3.4}$$

Substituindo (5.3.4) em (5.3.2) e fazendo uma mudança de variável $x = \nu/T$, obtemos a *Lei de Stefan-Boltzmann*

$$u = \int_0^\infty \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu = \left(\int_0^\infty x^3 f\left(x\right) dx\right) T^4 = \sigma T^4. \tag{5.3.5}$$

- Lei de deslocamento de Wien.

O valor de ν para o qual $u(\nu)$ é máximo é obtido de

$$0 = \frac{du(\nu)}{d\nu} = 3\nu^2 f\left(\frac{\nu}{T}\right) + \nu^3 \frac{1}{T} f'\left(\frac{\nu}{T}\right). \tag{5.3.6}$$

Ou seja,

$$3f\left(\frac{\nu}{T}\right) + \frac{\nu}{T} f'\left(\frac{\nu}{T}\right) = 0, \tag{5.3.7}$$

[6]As leis de Stefan-Boltzmann e de Wien podem ser derivadas termodinamicamente. É possível mostrar que a pressão P do campo eletromagnético se relaciona com a densidade de energia $u = E/V$ segundo a relação

$$P = \frac{1}{3} u. \tag{5.3.3}$$

Exercício: Use a relação $dE = TdS - PdV$ para mostrar que $u = \sigma T^4$, com σ uma constante (σ não pode ser determinada pela termodinâmica).

Para derivar a lei de escala de Wien, considere um recipiente (cavidade) que se expande lentamente e sem trocar calor (expansão adiabática). Neste caso o comprimento de onda da radiação cresce como $\lambda^3 \propto V$. Usando $PV = \frac{1}{3}E$ e $dE = -PdV$ (adiabático), segue que $P^{3/4}V =$ constante. Veja por exemplo a página 3 de [http://galileo.phys.virginia.edu/classes/252/BB_Radiation_Details.pdf] para a derivação completa da lei d escala de Wien.

que é uma equação para a razão ν/T, cuja solução é um valor

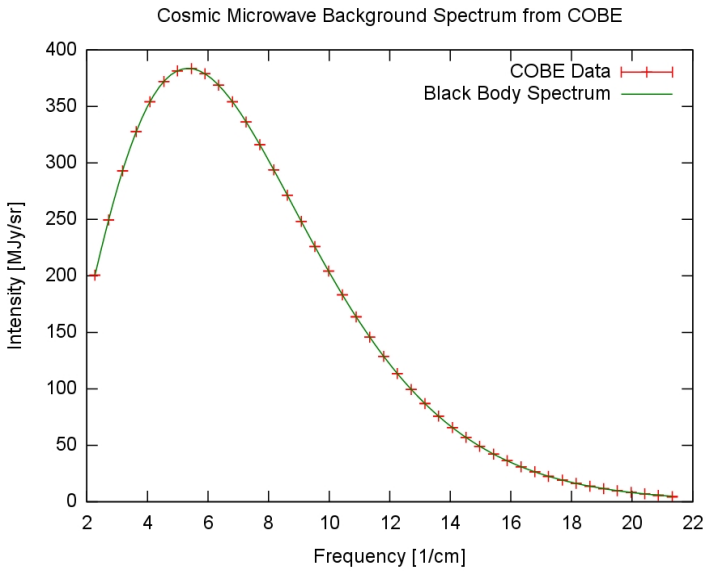
$$\frac{\nu_{max}}{T} = \text{constante.} \tag{5.3.8}$$

Esta relação entre temperatura e frequência é chamada de "lei de deslocamento de Wien". O gráfico na figura acima mostra que, de fato, o pico da distribuição $u(\nu)$, ν_{max}, se desloca para valores maiores de ν a medida que a temperatura aumenta (a temperatura ambiente, $\nu_{max} \approx 10^{13}$ Hz está na região do infravermelho (não visível)).

A lei de deslocamento de Wien permite que a temperatura de um forno seja determinada a partir de medidas da frequência de maior intensidade emitida pelo forno (usando uma *rede de difração* podemos identificar a "cor" mais intensa). Temos assim um termômetro que não precisa de estar em contato direto com o forno.

Note que a lei de Wien (ou simplesmente olhando a figura acima) mostra que *modos vibracionais* de frequências altas, são "congelados" a medida que a temperatura diminui. Isso é análogo ao que já havia sido observado para os calores específicos de um gás de moléculas.

O universo como um todo possui uma distribuição de radiação térmica dada pela curva mostrada na figura abaixo. A temperatura correspondente (média) é de $2,72548 \pm 0.00057$ K.



- **O que está acontecendo dentro da cavidade?**

– Movimento de cargas aceleradas produz ondas eletromagnéticas (luz).

– A cavidade fica preenchida por ondas eletromagnéticas.

– No equilíbrio térmico haverá tantas ondas refletidas quanto absorvidas pelas paredes.

– A radiação entra em equilíbrio térmico ...

- **Radiação em equilíbrio?? O que significa isso?**

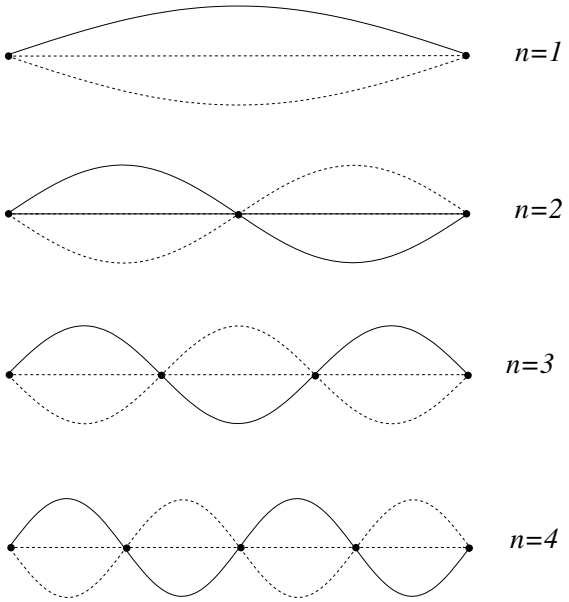
– Sabemos que quando um gás (clássico) está a uma dada temperatura, suas moléculas estão em movimento aleatório, com energia média da ordem de $k_B T$ (equipartição).

– A energia total fica distribuída igualmente entre todos os *graus de liberdade*.

– **Qual é o significado de** *graus de liberdade* **para as ondas eletromagnéticas no interior da cavidade?**

- Contagem de graus de liberdade

  Uma onda pode acomodar um número infinito de graus de liberdade, correspondendo ao número infinito de comprimentos de onda que podem ser acomodados dentro de uma cavidade. Para ilustrar com um exemplo simples, nas figuras abaixo são mostradas as configurações dos quatro primeiros modos de um corda vibrante.



  No exemplo da figura acima, os diferentes modos vibracionais possuem frequência $\nu = \frac{c}{2L}n$, sendo L o comprimento da corda e c a velocidade de propagação da onda. Assim, é possível ter uma infinidade de modos para valores cada vez maiores de ν.

  Classicamente, podemos então dizer que, no equilíbrio térmico, *energia por modo* é k_BT[7] Porém, o número de modos de vibração é infinito! Então, parece não haver limite para o número de graus de liberdade. Isto implicaria que a radiação na cavidade poderia absorver calor indefinidamente, sem nunca atingir o equilíbrio, em completa contradição com o observado.

- Maneira alternativa de ver que há um problema fundamental.

  A lei de Wien (equação (5.3.8)) nos diz que devemos relacionar uma certa temperatura T com uma frequência ν_{max} para a qual a intensidade da radiação é máxima. Sabemos como relacionar temperatura com energia, via constante de Boltzmann. De fato, k_BT é energia.

  Como relacionar energia com frequência?

  Esta pergunta não pode ser respondida no contexto da eletrodinâmica clássica, uma vez que a única constante dimensional da teoria é a velocidade da luz $c = 299.792.458$ m/s (se

[7] Veremos mais adiante que cada modo comporta-se como um oscilador harmônico. Classicamente, sabemos que a energia média de cada oscilador é k_BT.

estivéssemos tratando de uma gás, teríamos outras grandezas dimensionais, tais como a massa das moléculas).

Não é possível relacionar energia (temperatura) com frequência usando apenas uma constante com dimensão de velocidade.

- Planck (1900) [8]

  O passo decisivo na direção de resolver esta contradição foi dado por Planck em 1900. As primeiras tentativas de Planck o levaram a obter uma fórmula empírica para a radiação térmica da cavidade. A fórmula empírica de Planck (mais tarde justificada teoricamente) ajustava perfeitamente os dados usando apenas a constante [9]

$$h = 6,626 \times 10^{-34}\text{J.s.} \tag{5.3.9}$$

  Mais tarde, Planck tentou obter uma explicação para a sua fórmula. Seu argumento era um pouco complicado e envolvia o tratamento dos átomos da cavidade como osciladores ...

- Einstein (1905)

  Einstein começou a trabalhar neste problema em março de 1905 (no mesmo ano ele já havia inventado a teoria da relatividade e a teoria do movimento Browniano), mas somente cerca de 20 anos mais tarde o problema foi adequadamente entendido.

- A ideia nova e crucial de Planck poderia ter sido:

A energia em qualquer um dos modos vibracionais é um múltiplo inteiro de $h\nu$

  Ou seja, a energia não pode ser decomposta em quantidades menores do que o *quantum*

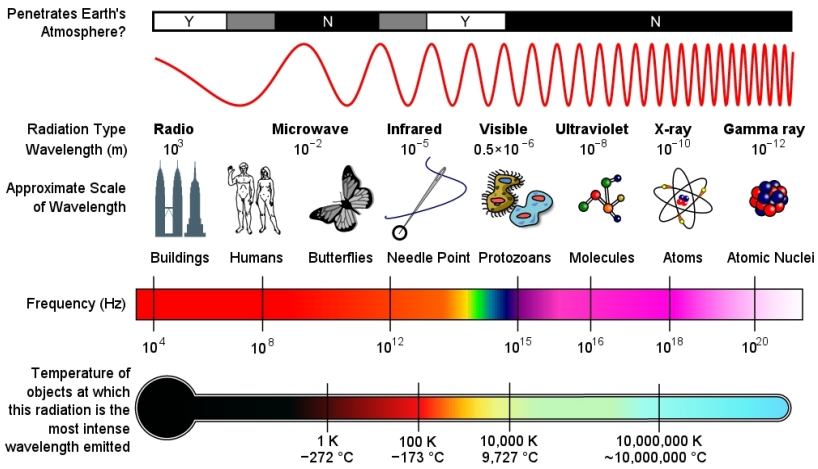
$$\epsilon = h\nu. \tag{5.3.10}$$

  Na época, este pressuposto era completamente inesperado e inexplicável. De qualquer forma, os fatos do dia a dia não estão em contradição com $\epsilon = h\nu$, uma vez que o valor de ϵ é muito pequeno (comparado com a escala de energias de ordem de joules) até mesmo para frequências na faixa de raios gama, como mostra a figura abaixo[10]

[8] Parte do material que se segue foi baseado no livro "The Hidden Unity in Nature's Law", de John C. Taylor, Cambridge University Press, 2001

[9] Planck já havia pensado sobre a necessidade de uma nova constante dimensional no ano anterior; as constantes c, G (gravitacional) e h permitem definir um sistema de unidades absoluto.

[10] Figura tirada do Wikipedia [https://en.wikipedia.org/wiki/Electromagnetic_spectrum].



Ou seja, a "*granularidade*" de quantidades macroscópicas de energia é praticamente invisível. Porém, no contexto da radiação térmica a energia do modo vibracional está sendo comparada com a anergia de uma *única molécula*.

- O pressuposto de Planck supera os dois problemas. Ele introduz uma nova constante com dimensão de (energia) × (tempo), de modo que agora é possível relacionar energia com frequência.

  No que diz respeito ao crescimento ilimitado do número de graus de liberdade de uma onda, note que os modos de altas frequências ficam suprimidos na região de frequências tal que $\nu > k_B T/h$ (peso de Boltzmann). Na região de baixas frequências, onde tal supressão não ocorre, observamos o crescimento de $u(\nu)$ devido ao crescimento do número de modos vibracionais (graus de liberdade) a medida em que ν cresce.

5.3.2 "radiação térmica" = "radiação de corpo negro" ?

Um corpo qualquer pode ser caracterizado por grandezas $\alpha(\nu, T)$ e $e(\nu, T)$, definidas como

$$\text{Absorvidadde} \equiv \alpha(\nu, T) = \frac{\text{energia absorvida}}{\text{energia incidente}} \tag{5.3.11}$$

e

$$\text{Emissividade} \equiv e(\nu, T) = \frac{\text{energia irradiada}}{(\text{unid. tempo})\ (\text{área})\ (\text{unid. freq.})} \tag{5.3.12}$$

definidas quando o corpo possui temperatura T.

Suponha que um objeto qualquer é colocado no interior de uma cavidade preenchida por radiação térmica e que o equilíbrio térmico é atingido.

No equilíbrio, o corpo emite e absorve a mesma quantidade de radiação, em cada frequência. Do contrário a radiação não estaria em equilíbrio. Isso é chamado de "balanço detalhado":

$$\begin{aligned} (\text{energia emitida pelo corpo}) &= (\text{energia absorvida pelo corpo}) \\ e(\nu,T)(\text{área do objeto})\Delta t &= \alpha(\nu,T)\underbrace{(\text{fluxo de energia incidindo no corpo})}_{\frac{1}{4}cu(\nu,T)}(\text{área do objeto})\Delta t. \end{aligned} \tag{5.3.13}$$

Portando,

$$\boxed{\frac{e(\nu,T)}{\alpha(\nu,T)} = \frac{1}{4}cu(\nu,T)}; \quad \text{“Lei de Kirchhoff”} \tag{5.3.14}$$

Por definição, um *absorvedor perfeito* (corpo negro) dever ter $\alpha(\nu,T) = 1$. Então,

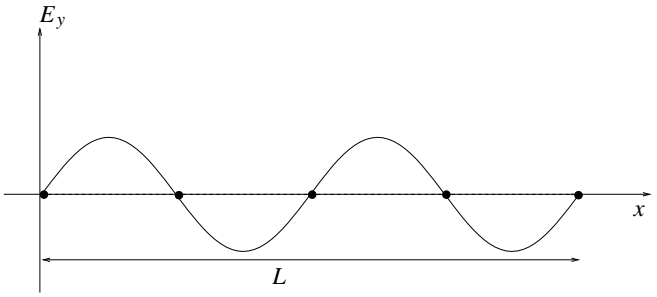
$$\boxed{\underbrace{e(\nu,T)}_{\text{fluxo emitido pelo corpo negro}} = \underbrace{\frac{1}{4}cu(\nu,T)}_{\text{fluxo de radiação}}}. \tag{5.3.15}$$

5.3.3 Tratamento estatístico da radiação térmica

- Cavidade cúbica de aresta L [11].
- Onda estacionária[12] para o campo elétrico[13]

$$\left.\begin{aligned} E_y(x,t) &= E(t)\text{sen}(k_x x), \\ B_z(x,t) &= \tfrac{\mu_0\epsilon_0}{k_x}\dot{E}(t)\cos(k_x x), \end{aligned}\right\}; \quad k_x = \frac{n_x\pi}{L}; \quad n_x = 1,2,3\ldots \tag{5.3.16}$$

A figura abaixo mostra o modo $n_x = 4$



[11] Parte dos argumentos aqui apresentados foram baseados nas notas on-line do Prof. John McGreevy [http://physics.ucsd.edu/∼mcgreevy/s12/index.html].

[12] Considere, por exemplo, a superposição de uma onda para a direita com uma onda para esquerda $\text{sen}(k_x x - \omega t) + \text{sen}(k_x x + \omega t) = 2\text{sen}(k_x x)\cos(\omega t)$. Em geral, a equação de onda admite soluções do tipo $E(x,t) = E(t)\cos(k_x x)$. Verifique isso por substituição direta na equação na equação de onda

$$\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial t^2} = 0.$$

[13] Usando a lei de Ampère-Maxwell na ausência de cargas:

$$\text{rot}\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\dot{\vec{E}}; \quad \mu_0\epsilon_0 = 1/c^2.$$

(notação: $\dot{f}(t) \equiv \frac{\partial f(t)}{\partial t}$).

$$(\text{rot}\vec{B})_y = \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}B_z = \mu_0\epsilon_0\dot{E}_y.$$

$$B_z(x,t) = -\mu_0\epsilon_0\int \dot{E}_y(x,t)dx = -\mu_0\epsilon_0 E(t)\int \text{sen}(k_x x)dx = \frac{\mu_0\epsilon_0}{k_x}\dot{E}(t)\cos(k_x x).$$

(constantes não fazem parte da solução ondulatória).

- Densidade de energia eletromagnética

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\right) \\ &= \frac{\epsilon_0}{2}\left(E(t)^2 \text{sen}^2(k_x x) + \frac{\dot{E}(t)^2}{c^2 k_x}\cos^2(k_x x)\right). \end{aligned} \tag{5.3.17}$$

Integrando em todo o volume da cavidade[14],

$$H_{\text{um modo}} = \int_{volume} u = \frac{V}{2}\frac{\epsilon_0}{2}\left(\frac{\dot{E}(t)^2}{(ck_x)^2} + E(t)^2\right). \tag{5.3.18}$$

A equação acima mostra que cada modo eletromagnético possui uma energia idêntica a de um oscilador harmônico simples. De fato, lembrando que a energia do oscilador é

$$H_{oscilador} = \frac{m}{2}\dot{x}(t)^2 + \frac{k}{2}x(t)^2 = \frac{k}{2}\left(\frac{m}{k}\dot{x}(t)^2 + x(t)^2\right), \tag{5.3.19}$$

podemos tratar *cada modo* como sendo um oscilador de frequência natural $\omega = (k_x c)$ e usar o resultado obtido anteriormente para a estatística do oscilador quântico no ensemble canônico.

Observações importantes:

– Cada oscilador é caracterizado pelo número de onda

$$\vec{k} = (k_x, k_y, k_z) = \frac{\pi}{L}(n_x, n_y, n_z). \tag{5.3.20}$$

Não há uma localização espacial dos osciladores (como no caso de uma rede de osciladores harmônicos).

– Devido a linearidade das equações de Maxwell do eletromagnetismo uma solução geral pode ser obtida somando as soluções para cada modo

$$\vec{E} = \sum_k \vec{E}_k \tag{5.3.21}$$

Então a energia ...

$$H = \sum_k (\text{energia de cada modo}). \tag{5.3.22}$$

Portanto, a função de partição vai poder ser escrita como um produto de fatores, como ocorreu nos exemplos do gás ideal, paramagneto ideal e rede de osciladores desacoplados. Note que no presente caso, a fatorização da função de partição não decorre de uma aproximação, mas sim da linearidade das equações de Maxwell, que é uma propriedade fundamental da teoria do eletromagnetismo.

– As condições de contorno particulares que usamos aqui (campo nulo nas paredes) não afetam o resultado no limite termodinâmico....

Esboço do cálculo de $u(\nu, T)$

[14] Usando $\int_{volume}\cos^2 = \int_{volume}\text{sen}^2 = V/2$.

(1) Contagem dos modos:

$$(\text{número de modos no intervalo } [\omega, \omega + d\omega]) = D(\omega)d\omega. \tag{5.3.23}$$

$D(\omega)$ é a *densidade de estados.*

(2) Cálculo da energia média $\langle \epsilon(\omega) \rangle$ de um modo de frequência ω, no equilíbrio.

(3) Por fim, podemos obter a energia total

$$E = \int \langle \epsilon(\omega) \rangle D(\omega) d\omega \tag{5.3.24}$$

e a densidade de energia no intervalo $[\omega, \omega + d\omega]$

$$u(\omega, T) = \underbrace{\langle \epsilon(\omega) \rangle D(\omega)}_{\text{energia nos modos com frequência } \omega} \frac{1}{V} \tag{5.3.25}$$

($\omega = 2\pi\nu$).

- **Contagem dos modos**

$$\begin{aligned} N(k) &\equiv \text{número de modos com } |\vec{k}| \leq k \\ &= \underbrace{2}_{\text{polarizações}} \times \frac{\text{volume do octante da esfera de raio } k}{\text{volume de uma célula no espaço } \vec{k}} \end{aligned} \tag{5.3.26}$$

O número de polarizações pode ser entendido considerando que devemos levar em conta (para um mesmo modo) as polarizações (k_x, E_y, B_z) e $(k_x, E_z, -B_y)$ ... Então,

$$N(k) = 2\frac{\frac{1}{8}\frac{4}{3}\pi k^3}{\left(\frac{\pi}{L}\right)^3} = \frac{1}{3}\frac{L^3 k^3}{\pi^2} \tag{5.3.27}$$

Usando

$$\omega^2 = c^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = c^2 k^2 \tag{5.3.28}$$

teremos

$$N(\omega) = \frac{1}{3}\frac{L^3\omega^3}{c^3\pi^2}. \tag{5.3.29}$$

Finalmente,

$$D(\omega) = \frac{d}{d\omega}N(\omega) = \frac{L^3}{\pi^2 c^3}\omega^2 \tag{5.3.30}$$

- **Energia em cada modo (cálculo clássico)**

Antes do surgimento da Mecânica Quântica, nós diríamos que

$$\langle \epsilon(\omega) \rangle = 2\frac{1}{2}k_B T = k_B T (\text{equipartição clássica para o oscilador harmônico}) \tag{5.3.31}$$

(o fator 2 vem do número de termos quadráticos na energia de cada oscilador clássico). Então,

$$u(\omega,T)=\frac{D(\omega)\langle\epsilon(\omega)\rangle}{V}=\frac{L^3}{\pi^2c^3}\omega^2k_BT\frac{1}{L^3}=\frac{\omega^2k_BT}{\pi^2c^3} \tag{5.3.32}$$

$$u(T)=\int_0^\infty u(\omega,T)d\omega=\frac{k_BT}{\pi^2c^3}\int_0^\infty\omega^2d\omega=\infty. \tag{5.3.33}$$

Se limitarmos a integral até um valor ω_{max}, teremos

$$u(T)=\frac{k_BT}{\pi^2c^3}\int_0^{\omega_{max}}\omega^2d\omega=\frac{k_BT}{3\pi^2c^3}\omega_{max}^3. \tag{5.3.34}$$

Ou seja, as frequências altas (ultravioleta) contribuem com um resultado infinito para a integral. Isso ficou conhecido como a *catástrofe ultravioleta*.

- **Energia em cada modo (cálculo quântico)**

  A energia de cada oscilador quântico de frequência ω (cada modo), é

$$\epsilon_n(\omega)=\hbar\omega(n+\frac{1}{2}),\ \ n=0,1,2,\ldots \tag{5.3.35}$$

  Já vimos anteriormente como calcular o valor médio da energia. Para um sistema qualquer, possuindo função de partição Z_1, sabemos que

$$\langle\epsilon(\omega)\rangle=-\frac{1}{Z_1}\frac{\partial}{\partial\beta}Z_1. \tag{5.3.36}$$

  No caso do oscilador quântico, Z_1 é dado pela equação (5.2.52).

  Exercício: Use (5.3.36) e (5.2.52) para mostrar que

$$\langle\epsilon(\omega)\rangle=\frac{\hbar\omega}{\mathrm{e}^{\beta\hbar\omega}-1}+\underbrace{\frac{\hbar\omega}{2}}_{\text{energia de ponto zero}} \tag{5.3.37}$$

  A energia de ponto zero (independente da temperatura) pode ser desconsiderada nos casos em que apenas estamos interessados em efeitos estritamente térmicos [15].

  Exercício: Mostre que no limite em que $\beta\hbar\omega\to 0$, teremos $\langle\epsilon(\omega)\rangle\to k_BT+\frac{\hbar\omega}{2}=k_BT\left(1+\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)\approx k_BT$. Ou seja, a energia média coincide com o limite clássico.

  Finalmente,

$$\boxed{u(\omega,T)=\frac{D(\omega)\langle\epsilon(\omega)\rangle}{V}=\frac{\hbar}{\pi^2c^3}\frac{\omega^3}{\mathrm{e}^{\beta\hbar\omega}-1}} \tag{5.3.38}$$

[15] A energia de ponto zero possui consequências físicas muito profundas e interessantes, especialmente no que se refere ao *problema da constante consmológica*, quando as interações gravitacionais são levadas em conta.

Além disso, a energia de ponto zero desempenha um papel no chamado *efeito Casimir*. Esse efeito foi descoberto e estudado pelos físicos holandeses Hendrik B. G. Casimir e Dirk Polder em 1947.

I mentioned my results to Niels Bohr, during a walk. That is nice, he said, that is something new... and he mumbled something about zero-point energy. Hendrik Casimir

O tratamento adequado do efeito Casimir (atração entre placas paralelas no vácuo!) requer mais cuidado com as condições de contorno nas paredes da cavidade. A existência deste efeito, verificado experimentalmente, mostra que a energia de ponto zero é de fato um importante bonus do procedimento de quantização de campos.

que é a famosa distribuição de Planck para a radiação térmica.

Exercício: Mostre que, no limite $\hbar\omega \ll k_B T$ a distribuição de Planck se reduz ao caso clássico dado por (5.3.32).

Exercício: Mostre que, no limite $\hbar\omega \gg k_B T$ (região de altas frequências) a distribuição de Planck se assemelha à distribuição de Maxwell-Boltzmann para um "gás ideal" de fótons de energia $h\nu$.

Exercício: Determine a constante de Wien.

Exercício: Determine a constante de Stefan-Boltzmann.

- Fótons e outros quanta ...

  A interpretação correta deste resultado requer a introdução do conceito físico de *fótons* como os quanta do campo eletromagnético. Temos assim um cenário onde a radiação térmica é composta de um *gás de fótons*. O número inteiro n na equação (5.3.35) representa o número de fótons de frequência ω, cada um possuindo energia $\hbar\omega$. Note que o "vácuo" possui energia não nula dada por $\hbar\omega/2$ (energia de ponto zero) para cada um dos infinitos modos de frequência ω. Esse tipo de infinito é tratado de maneira sistemática em Teoria Quântica de Campos. Note que, no contexto da radiação térmica, a energia infinita de ponto zero não introduz qualquer tipo de inconsistência, uma vez que não depende da temperatura.

  O procedimento acima é um exemplo simples de *quantização de campos*, levando em conta efeitos de temperatura não nula. A teoria geral da Mecânica Quântica, quando aplicada a sistemas dinâmicos descritos por campos, leva naturalmente ao conceito de *partículas elementares* como os quanta associados aos diferentes campos. De maneira geral, quando as equações de campos são lineares, as partículas elementares surgem como níveis de energia de um oscilador quântico (n partículas correspondendo ao n-ésimo nível quântico do oscilador). Quando outros campos são levados em conta, temos a possibilidade de descrever intereções entre diferentes partículas elementares. Por exemplo, na eletrodinâmica, o campo eletromagnético interage com o campo associado aos elétrons. Neste caso, a chamada Eletrodinâmica Quântica, descreve as interações entre fótons e elétrons.

  O exemplo da radiação térmica ilustra a interessantíssima unificação de tres grandes áreas da conhecimento: a Relatividade (Eletromagnetismo e outros sistemas dinâmicos de campos relativísticos), a Mecânica Quântica e a Mecânica Estatística. Isso fica evidente na equação (5.3.38). De fato, as tres constantes características, a saber, c (relatividade), $\hbar$ (teoria quântica) e k_B (mecânica estatística) estão presentes.

- Probabilidade de encontrar n fótons com energia $\hbar\omega$

$$\begin{aligned} p(n) &= \frac{1}{Z_1}\mathrm{e}^{-\beta\epsilon_n} = \frac{1}{Z_1}\mathrm{e}^{-\beta\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega} \\ &= \frac{1-\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega}}{\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega/2}}\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega/2}\mathrm{e}^{-n\beta\hbar\omega} \\ &= \left(1-\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega}\right)\mathrm{e}^{-n\beta\hbar\omega} \\ &= (1-b)\,b^n; \quad b \equiv \mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega} \end{aligned} \tag{5.3.39}$$

  (usamos Z_1 como dado pela equação (5.2.52)). Podemos então calcular o *número médio de*

fótons de frequência ω.

$$\begin{aligned}\langle n\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} np(n)\\ &= (1-b)\sum_{n=0}^{\infty} nb^n\\ &= (1-b)b\frac{d}{db}\sum_{n=0}^{\infty} b^n\\ &= (1-b)b\frac{d}{db}\frac{1}{1-b}\\ &= (1-b)b\frac{1}{(1-b)^2} = \frac{b}{1-b}\\ &= \frac{1}{\frac{1}{b}-1}\end{aligned} \tag{5.3.40}$$

Substituindo o valor de b, obtemos

$$\boxed{\langle n\rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta\hbar\omega}-1}}\,. \tag{5.3.41}$$

Essa é a famosa e importantíssima *distribuição de Bose-Einstein* para o número médio de fótons com energia $h\nu$, em equilíbrio térmico a temperatura T.

Exercício: Obtenha o número médio de fótons nos limites de altas e de baixas frequências. O que determina a escala de frequências?

Exercício: Calcule $\langle n^2\rangle$ e $\sigma_n^2 = \langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2$; mostre que

$$\frac{\sigma_n^2}{\langle n\rangle^2} = 1 + \frac{1}{\langle n\rangle} \tag{5.3.42}$$

- **Termodinâmica da radiação** A função de partição é o produto das infinitas Z_i de cada modo (oscilador quântico). Ou seja,

$$Z = \prod_{\text{todos os modos}} Z_i \tag{5.3.43}$$

$$F = -k_BT\log Z = -k_BT\sum_{\omega}\text{degenerescência}(\omega)\log Z(\omega) \tag{5.3.44}$$

$$\begin{aligned}F &= -k_BT\int_0^{\infty} D(\omega)\log Z(\omega)d\omega\\ &= -\frac{1}{\beta}\int_0^{\infty}\frac{L^3}{\pi^2c^3}\omega^2\log\left[\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}}}{1-\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega}}\right]d\omega\end{aligned} \tag{5.3.45}$$

Desconsiderando o infinito de energia de ponto zero,

$$\begin{aligned} F &= -\frac{1}{\beta}\int_0^\infty \frac{L^3}{\pi^2 c^3}\omega^2 \log\left[\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega}}\right] d\omega \\ &= \frac{k_B T L^3}{\pi^2 c^3}\left(\frac{k_B T}{\hbar}\right)^3 \underbrace{\int_0^\infty x^2 \log(1-\mathrm{e}^{-x})\, dx}_{-\pi^4/45} \end{aligned} \tag{5.3.46}$$

$$F = -\frac{1}{45}\frac{\pi^2 k_B^4}{c^3\hbar^3}T^4 V \tag{5.3.47}$$

$$P = -\frac{\partial F}{\partial V} = \frac{1}{45}\frac{\pi^2 k_B^4}{c^3\hbar^3}T^4 \tag{5.3.48}$$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{4}{45}\frac{\pi^2 k_B^4}{c^3\hbar^3}T^3 V \tag{5.3.49}$$

$$U = F + TS = \frac{1}{15}\frac{\pi^2 k_B^4}{c^3\hbar^3}T^4 V \tag{5.3.50}$$

$$P = \frac{1}{3}\frac{U}{V} \tag{5.3.51}$$

Capítulo 6

Notas de aula de Física 3 e 4

6.1 Primeira aula

6.1.1 Interações fundamentais da natureza

As interações entre os constituintes mais elementares da matéria, conhecidos até o presente, podem ser classificadas em 4 tipos (em ordem crescente da intensidade da interação)

- Gravitacional
- Nuclear fraca
- Eletromagnética
- Nuclear forte

As interações nucleares operam somente na escala microscópica (nuclear e sub-nuclear), decaindo muito rapidamente para grandes distâncias. Fenômenos macroscópicos no domínio da física clássica, podem ser estudados levando-se em conta somente as interações gravitacional e eletromagnética. Embora estas duas interações possuam certas semelhanças qualitativas formais, do ponto de vista quantitativo elas diferem em várias ordens de grandeza. De fato, considerando a interação entre, por exemplo, dois elétrons,

$$\frac{\text{Atração gravitacional}}{\text{Repulsão elétrica}} = \frac{1}{4,17 \times 10^{42}}.$$

Apesar desta gigantesca diferença, os efeitos da interação gravitacional nos parecem mais perceptíveis do que a interação eletromagnética. Isto ocorre porque a força elétrica pode ser tanto *atrativa* como *repulsiva*. Já a gravitação atua em todos os corpos materiais (na verdade, em qualquer forma de energia) sempre de maneira atrativa. Entretanto, este mascaramento da interação eletromagnética, relativamente à gravitacional, desaparece totalmente (na verdade ele se inverte) quando consideramos *efeitos não estáticos*, como a interação da matéria com ondas eletromagnéticas.

6.1.2 Carga elétrica

A existência de atração e repulsão foi descrita pela primeira vez em termos de *cargas elétricas* por Charles François de Cisternay du Fay em 1773. Investigando-se a *eletrização por atrito* concluiu-se que existem dois tipos de carga: *carga positiva* e *carga negativa*, como mostra a figura 6.1.

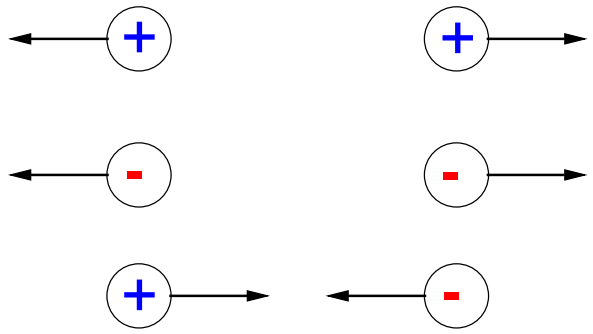


Figura 6.1: Tipos de cargas

Conservação da carga

Normalmente um corpo é neutro por ter quantidades iguais de cargas positivas e negativas. Quando o objeto I transfere carga de um dado sinal para o objeto II, o objeto I fica carregado com carga de mesmo valor absoluto, mas de sinal contrário. Esta hipótese, formulada pela primeira vez por Benjamin Franklin, é considerada a primeira formulação da *lei de conservação de carga elétrica*.

Quantização da carga

Em diversos problemas que serão abordados neste curso, assumiremos a existência de cargas distribuídas *continuamente* no espaço, do mesmo modo como ocorre com a massa de um corpo. Isto pode ser considerado somente uma boa aproximação para diversos problemas macroscópicos. De fato, sabemos que todos os objetos *diretamente observados* na natureza possuem cargas que são múltiplos inteiros da carga do elétron

$$e = 1,602177 \times 10^{-19} C,$$

onde a unidade de carga C, o *coulomb*, será definida mais adiante. Este fato experimental foi observado pela primeira vez por Millikan em 1909.

6.1.3 A Lei de Coulomb

A primeira constatação de que a interação entre cargas elétricas obedece à lei de força

$$F \propto \frac{1}{r^2}, \tag{6.1.1}$$

onde r é a distância entre as cargas e F é o módulo da força, foi feita por Priestley em 1766. Priestley observou que um recipiente metálico carregado, não possui cargas na superfície interna, [1], não exercendo forças sobre uma carga colocada dentro dele. A partir deste fato experimental, pode-se deduzir matematicamente a validade de (6.1.1) O mesmo tipo de dedução pode ser feita na gravitação, para mostrar que dentro de uma cavidade não há força gravitacional.

Medidas diretas da lei (6.1.1) foram realizadas em 1785 por Coulomb, utilizando um aparato denominado balança de torção. Medidas modernas mostram que supondo uma lei dada por

$$F \propto \frac{1}{r^{2+\epsilon}}, \tag{6.1.2}$$

[1] É por esta razão que as pessoas dentro de um avião que atravessa uma tempestade, não morrem eletrocutadas!

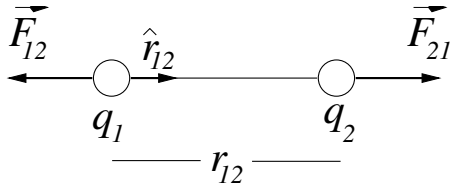


Figura 6.2: Força entre duas cargas

então $|\epsilon| < 3 \times 10^{-16}$ [20].

O resultado completo obtido por Coulomb pode ser expresso como

$$\vec{F}_{2\,1} = k\frac{q_1 q_2}{(r_{12})^2}\hat{r}_{12},$$

onde a notação está explicada na figura 6.2. Um outro fato experimental é a validade da terceira lei de Newton,

$$\vec{F}_{2\,1} = -\vec{F}_{1\,2}.$$

Sistema de unidades

No sistema MKSA a carga elétrica é medida em unidades de coulomb (C) e a *constante de Coulomb* k é dada por

$$k = 8,9875 \times 10^9 N \cdot m^2/C^2$$

É conveniente definir também a *constante de permissividade do vácuo*, ϵ_0 dada por

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} \tag{6.1.3}$$

A unidade de carga C é definida em termos da *unidade de corrente*, o ampère, A; em um *segundo*, a quantidade de carga que atravessa uma seção transversal de um fio, por onde flui uma corrente de $1\,A$ é $1\,C$.

6.1.4 Princípio de superposição

Em situações mais gerais, quanto existem mais de duas cargas no vácuo, a experiência mostra que vale o *princípio de superposição*, ou seja, a força sobre cada carga é a *soma vetorial* das suas interações com cada uma das outras cargas. Portanto,

$$\vec{F}_i = \sum_{j\neq i}\vec{F}_{i\,j} = kq_i\sum_{j\neq i}\frac{q_j}{(r_{ji})^2}\hat{r}_{ji}, \tag{6.1.4}$$

6.1.5 O Campo

Consideremos a equação (6.1.4) aplicada à força sentida por uma carga q_0, devida à N cargas $q_1 \cdots q_N$

$$\vec{F} = q_0 k\sum_{j=1}^{N}\frac{q_j}{(r_j)^2}\hat{r}_j, \tag{6.1.5}$$

onde r_j é a distância desde a carga q_j até o *ponto do espaço* onde se encontra a carga q_0 e $\hat{r}_j$ é o vetor unitário apontando na direção da linha que une as cargas q_j e q_0, no sentido de q_j para q_0. Esta equação pode ser escrita formalmente como

$$\vec{F} = q_0 \sum_{j=1}^{N} \vec{E}_j = q_0 \vec{E}, \tag{6.1.6}$$

onde

$$\vec{E} = \sum_{j=1}^{N} \vec{E}_j = k \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j}{(r_j)^2} \hat{r}_j.$$

A grandeza $\vec{E}$ é denominada *campo elétrico* e está definida em todos os pontos do espaço. Para que possamos *observar*, ou seja, medir, o campo elétrico $\vec{E}$, é preciso posicionar uma carga em um determinado ponto do espaço, medir a força sentida por esta carga e calcular a razão

$$\frac{\vec{F}}{q_0}.$$

Estamos supondo uma situação idealizada, onde a carga q_0 não altera o campo produzido pelas outras cargas.

A idéia de se introduzir campos na física constitui um passo importante para uma descrição onde as interações são entendidas sem a introdução de *ação à distância*. Na presente descrição, a interação entre duas cargas se dá em duas etapas. Primeiro a carga q_1 cria o campo $\vec{E}$, e em seguida, a carga q_2 *interage* com o campo $\vec{E}$. Este detalhamento, que por enquanto parece um luxo desnecessário, é de fundamental importância em problemas dependentes do tempo, tendo em vista que os sinais eletromagnéticos propagam-se, no vácuo, com a velocidade da luz

$$c = 2,99792458 \times 10^8 m/s$$

6.1.6 Campo de um dipolo

Um dos exemplos mais simples do campo elétrico de mais de uma carga é o caso do chamado *dipolo elétrico*, mostrado na figura 6.3.

Um dipolo elétrico nada mais é do que duas cargas de sinais opostos separadas por uma certa distância, que aqui vale $2a$. Supondo que as duas cargas se encontram sobre o eixo x, ambas à uma distância a da origem, vamos calcular o campo elétrico devido à elas em um ponto que se encontra sobre o eixo y. Supondo também que as duas cargas tenham módulos iguais, $|q_1| = |q_2| = q$ então

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = k\frac{q}{r^2}.$$

Note que, devido à geometria do problema e à condição acima, as componentes y de $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$ são iguais em módulo mas com sentidos opostos e portanto a componente y da resultante $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$ é nula. A componente x é dada por

$$E_{1x} + E_{2x} = |\vec{E}_1| \cos\theta + |\vec{E}_2| \cos\theta = 2k\frac{q}{r^2}\frac{a}{r} = \frac{2kaq}{r^3} = \frac{2kaq}{(y^2 + a^2)^{3/2}}$$

Uma situação de especial interesse é quando a separação entre as cargas é muito menor que a distância até o ponto de observação P

$$y \gg a.$$

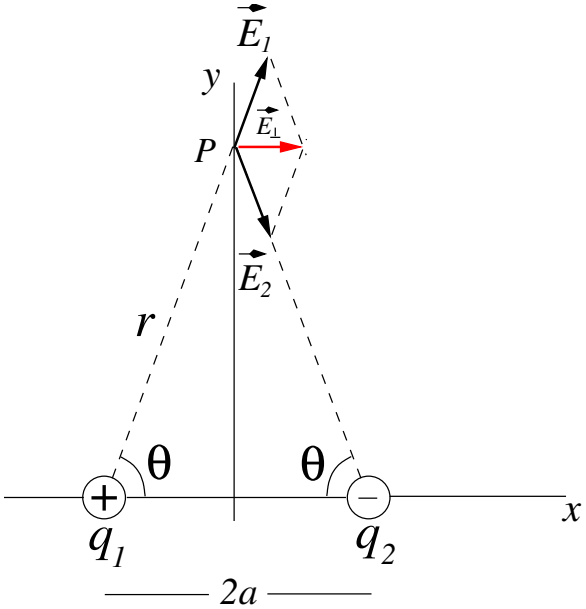


Figura 6.3: Dipolo elétrico

Neste caso, podemos desprezar a no denominador da equação anterior, obtendo

$$E_{1x} + E_{2x} = k\,\frac{p}{y^3},$$

na qual

$$\vec{p} \equiv 2q\vec{a} \tag{6.1.7}$$

é o chamado *momento de dipolo*.

Situações de interesse *físico e tecnológico* onde aparece o momento de dipolo ocorrem tanto em sistemas atômicos como em antenas.

6.2 Segunda aula

6.2.1 Campo de uma distribuição contínua de cargas

Em várias situações de interesse prático, podemos desprezar a granularidade da carga elétrica e calcular o campo elétrico, assumindo a *continuidade* da distribuição. Este procedimento envolve os seguintes passos:

- Dividimos o volume em pedaços ΔV_i, cada um possuindo carga Δq_i, conforme a figura 6.4.
- Calculamos o campo elétrico produzido por Δq_i no ponto P,

$$\Delta\vec{E}_i = k\frac{\Delta q_i}{(r_i)^2}\hat{r}_i$$

- Usamos o princípio de superposição para calcular o campo total em P

$$\vec{E} = \lim_{\Delta q_i \to 0}\sum_i \Delta\vec{E}_i = k\lim_{\Delta q_i \to 0}\sum_i \frac{\Delta q_i}{(r_i)^2}\hat{r}_i$$

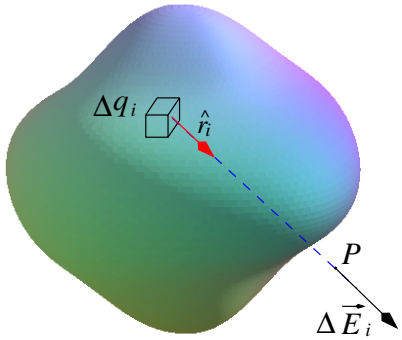


Figura 6.4: Distribuicão continua de carga

Após tomarmos o limite indicado nas expressões acima, obtemos a seguinte expressão para o campo

$$\vec{E} = k \int_{\mathcal{V}} \frac{dq}{r^2} \hat{r},$$

onde $\mathcal{V}$ denota a região onde a distribuição de cargas é não nula.

É conveniente distinguirmos os seguintes tipos de *distribuições de cargas*:

- Carga distribuída em um volume V com densidade $\rho = \frac{dq}{dV}$.
- Carga distribuída em uma superfície A com densidade $\sigma = \frac{dq}{dA}$
- Carga distribuída em ao longo de uma linha l com densidade $\lambda = \frac{dq}{dl}$.

Veremos a seguir alguns exemplos simples de distribuições contínuas.

6.2.2 Campo de um bastão carregado

Consideremos um bastão de comprimento l possuindo carga Q, positiva, *uniformemente distribuída*. Vamos calcular o campo elétrico em um ponto P, localizado a uma distância d da extremidade esquerda do bastão, como mostra a figura 6.5.

O elemento de comprimento dx possui carga

$$dq = \lambda dx; \quad \lambda = \frac{Q}{l}.$$

Cada elemento de carga dq produz um campo elétrico em P, apontando sempre no sentido negativo do eixo x. De acordo com a lei de Coulomb,

$$d\vec{E} = -\hat{i}k\frac{dq}{x^2} = -\hat{i}k\lambda\frac{dx}{x^2},$$

onde $\hat{i}$ é o versor na direção x. O campo elétrico total em P é dado pela *superposição* dos campos infinitesimais

$$\vec{E} = -\hat{i}\int d\vec{E} = \hat{i}k\lambda\int_d^{d+l}\frac{dx}{x^2} = -\hat{i}k\lambda\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+l}\right) = -\hat{i}\frac{kQ}{d\,(d+l)}$$

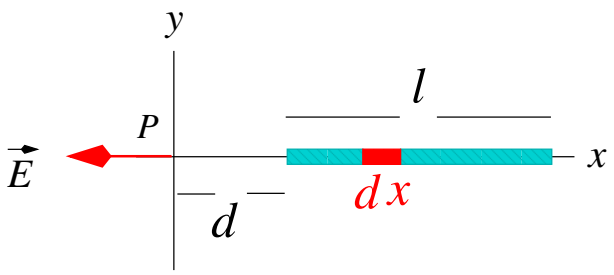


Figura 6.5: Bastão carregado

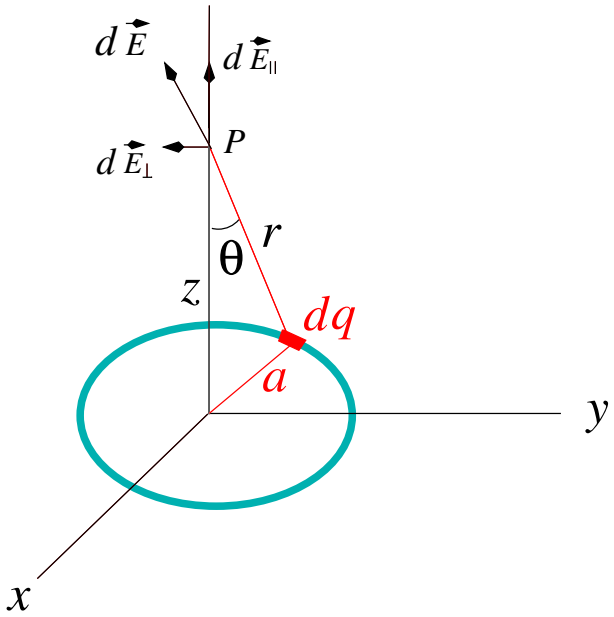


Figura 6.6: Anel carregado

Note que para $d \gg l$

$$|\vec{E}| \approx k\frac{Q}{d^2},$$

que é o campo de uma carga puntiforme.

Para um fio de comprimento infinito, ou seja, $l \gg d$, mas com densidade λ finita,

$$|\vec{E}| \approx k\lambda\frac{1}{d}.$$

6.2.3 Campo de um anel carregado

Consideremos um anel uniformemente carregado, possuindo carga total Q, positiva. Queremos determinar o campo elétrico em um ponto P, que está a uma distância z do plano do anel, situado no eixo do anel, conforme a figura 6.6. Note que a soma vetorial das componentes do campo elétrico ortogonais ao eixo z é nula. De fato, para cada elemento de carga dq, existe outro, diametralmente

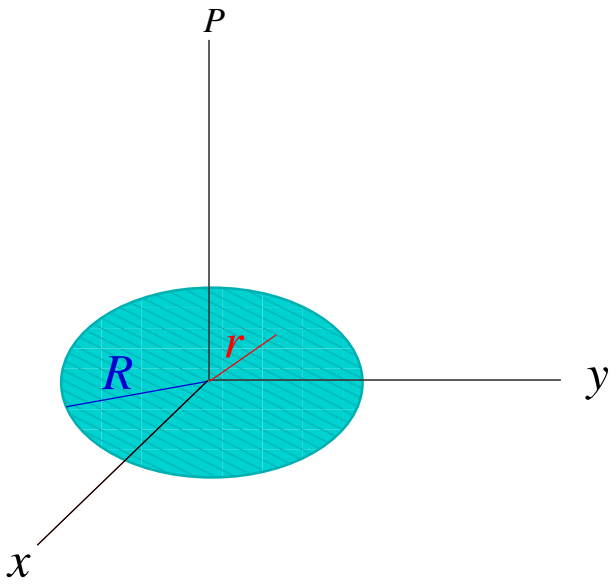


Figura 6.7: Disco carregado

aposto, produzindo uma componente ortogonal com sinal oposto. Esta equivalência entre os elementos de cargas diametralmente opostos é denominada uma *simetria* do sistema; uma simetria nada mais é do que uma equivalência, neste caso geométrica, entre uma parte de um sistema e sua contra-parte reversa, neste caso o ponto oposto em relação ao centro do anel. Simetrias são muito úteis pois costumam facilitar bastante a solução de problemas mais complicados.

As componentes paralelas ao eixo z são dadas por

$$d\vec{E}_{||} = \hat{z}k\frac{dq}{r^2}\cos\theta = \hat{z}kdq\frac{z}{r^3}.$$

Note que a grandeza $\frac{z}{r^3}$ assume sempre o mesmo valor quando percorremos os pontos do anel. Logo,

$$\vec{E}_{||} = \int d\vec{E}_{||} = \hat{z}k\int\frac{z}{r^3}dq = \hat{z}k\frac{z}{r^3}\int dq = k\frac{z}{r^3}Q = \hat{z}kQ\frac{z}{(a^2+z^2)^{3/2}} \tag{6.2.1}$$

Para $z \gg a$ a expressão acima comporta-se como

$$\vec{E}_{||} \approx \hat{z}\frac{kQ}{z^2},$$

que é o campo de uma carga puntiforme.

6.2.4 Campo de um disco carregado

Consideremos agora um disco uniformemente carregado possuindo carga total Q, conforme a figura 6.7. Queremos calcular o campo elétrico em um ponto P situado no eixo do disco, a uma distância z do plano do disco. Utilizando o *princípio de superposição*, o campo produzido em P é a soma (integral) dos campos produzidos por anéis de raio r, com r variando entre 0 e R. De acordo com a equação (6.2.1),

$$d\vec{E}_{||} = \hat{z}k\frac{z}{(r^2+z^2)^{3/2}}dq, \tag{6.2.2}$$

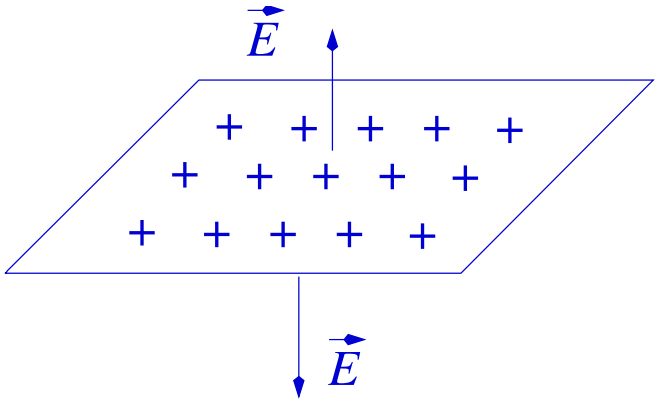


Figura 6.8: Plano infinito carregado

onde dq é a carga contida em um anel infinitesimal de raio r e espessura dr. Ou seja,

$$dq = \sigma dA = \sigma 2\pi\, r\, dr. \tag{6.2.3}$$

Substituindo (6.2.3) em (6.2.2) e integrando, teremos

$$\vec{E}_{||} = \hat{z}2\pi\, k\, \sigma\, z \int_0^R \frac{r dr}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \hat{z}2\pi\, k\, \sigma \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right). \tag{6.2.4}$$

Nas proximidades do disco, $z \ll R$, o segundo termo em (6.2.4) pode ser desprezado. Neste caso, teremos

$$\vec{E}_{||} \approx \hat{z}2\pi\, k\, \sigma\, \frac{z}{|z|} = \hat{z}\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\text{sinal}(z), \tag{6.2.5}$$

aqui usamos a equação (6.1.3). A função sinal(z) é definida como

$$\text{sinal}(z) = \begin{cases} -1 & \text{se } z < 0\,, \\ 1 & \text{se } z > 0\,. \end{cases} \tag{6.2.6}$$

Este limite nos dá o campo elétrico de uma *plano infinito* carregado, como está ilustrado na figura 6.8.

6.3 Terceira aula

6.3.1 Linhas de campo

Nos exemplos vistos anteriormente, o campo elétrico foi calculado em um único ponto P do espaço. Antes de partirmos para o cálculo em pontos arbitrários, é conveniente que tenhamos uma visualização qualitativa do campo elétrico. Esta visualização pode ser feita introduzindo-se as chamadas *linhas de campo*. Na figura 6.9 foram desenhadas algumas destas linhas, possuindo as seguintes propriedades:

- As linhas são *tangentes*, em cada ponto, *à direção do campo elétrico* neste ponto.
- A *intensidade* do campo é proporcional ao *número de linhas* por unidade de área de uma superfície perpendicular às linhas.

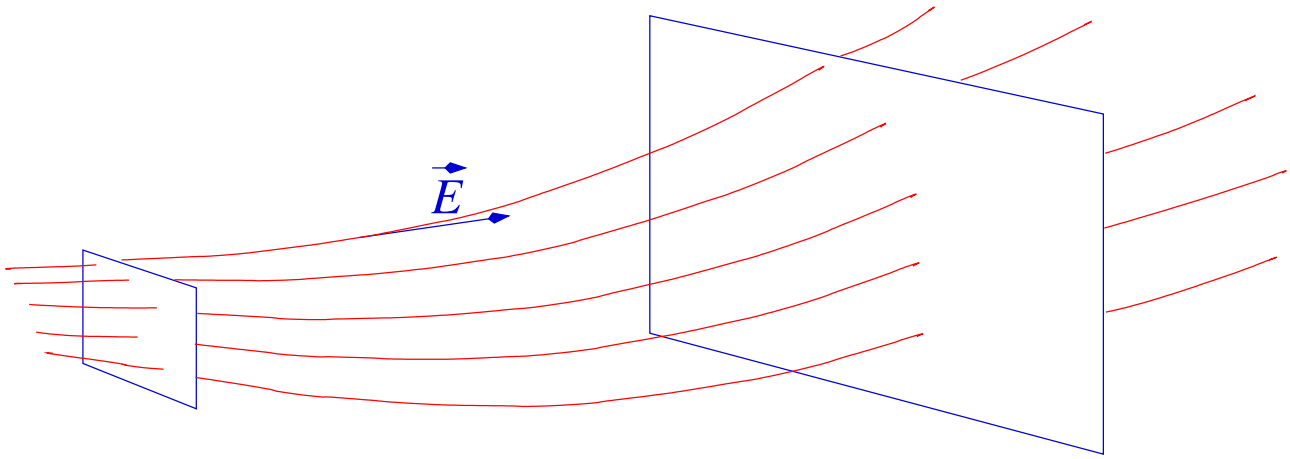


Figura 6.9: Linhas de campo

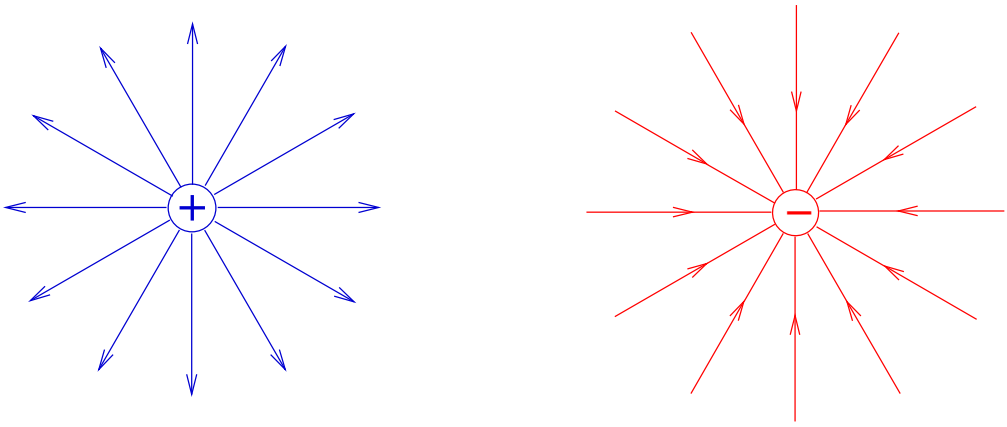


Figura 6.10: Linhas do campo de uma carga puntiforme

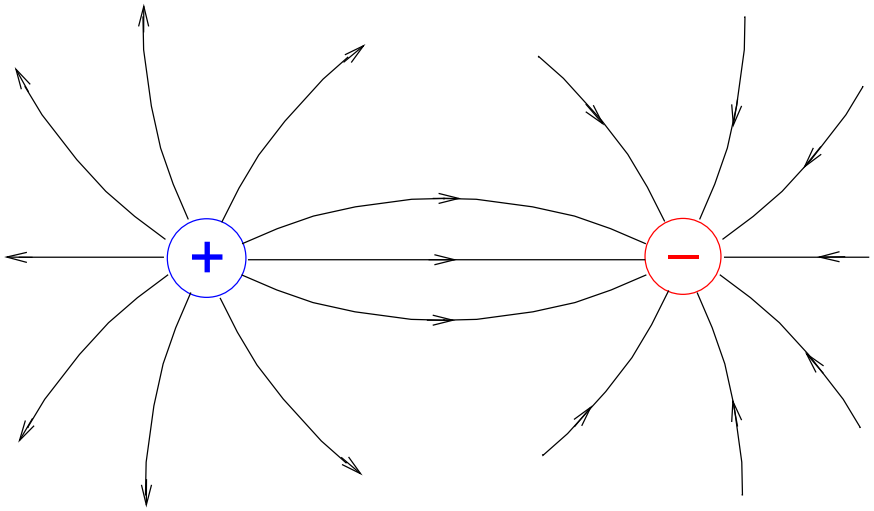


Figura 6.11: Linhas do campo de um dipolo

Na figura 6.10 estão representadas as linhas as linhas de campo de uma carga puntiforme positiva e de uma carga puntiforme negativa negativa. As linhas do campo de um dipolo estão representadas na figura 6.11.

Consistência com a Lei de Coulomb

Podemos verificar que a visualização em termos de linhas de força é consistente com a lei de Coulomb. Para isso, devemos notar que, *por simetria*, a intensidade do campo deve ser a mesma em todos os pontos de uma *superfície esférica* de raio r. Sendo N o número de linhas que originam-se na carga, então o *número de linhas por unidade de área* da superfície esférica é

$$\frac{N}{4\pi\, r^2}.$$

De acordo com a visualização em termos de linhas de força,

$$E \propto \frac{N}{4\pi\, r^2},$$

o que está de acordo com a lei de Coulomb.

6.3.2 Fluxo e Lei de Gauss

Fluxo

De acordo com a noção qualitativa de linhas de campo, vista na seção 6.3.1, a *intensidade do campo elétrico* é proporcional ao *número de linhas* que atravessam uma *superfície ortogonal* às linhas. Para estudarmos, de maneira *quantitativa*, as relações entre a intensidade do campo e superfícies quaisquer, vamos agora introduzir a grandeza Φ, denominada *fluxo do campo elétrico através de uma superfície*. Vejamos inicialmente dois exemplos simples.

- Campo uniforme E atravessando uma superfície ortogonal de área A

$$\Phi = EA$$

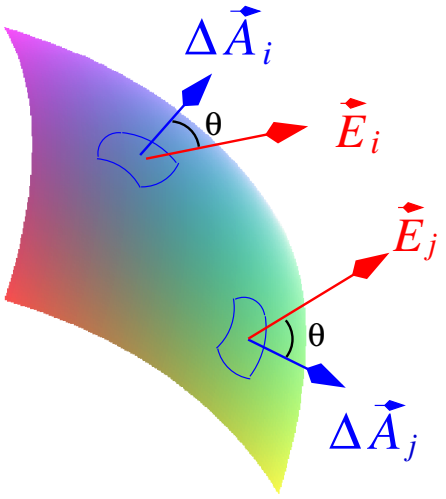


Figura 6.12: Fluxo através de uma superficie genérica

- Campo uniforme E atravessando uma superfície, cuja *normal* forma um ângulo θ com a direção do campo
$$\Phi = EA\cos\theta = \vec{E}\cdot\vec{A}, \tag{6.3.1}$$
onde $\vec{A} \equiv A\vec{n}$; $\hat{n}$ é o vetor unitário normal à superfície.

Em situações mais gerais, o campo é não uniforme, e a superfície pode ter uma forma qualquer, como ilustra a figura 6.12. Em pequenas regiões da superfície, podemos utilizar a expressão (6.3.1). Devemos subdividir a superfície em pequenos elementos de área $\Delta\vec{A}_i$. Para cada um destes elementos, teremos um fluxo elementar dado por

$$\Phi_i = \vec{E}_i\cdot\Delta\vec{A}_i = E_i\Delta A_i\cos\theta_i.$$

Somando todos os elementos de área e tomando o limite $\Delta A_i \to 0$, teremos a seguinte expressão para o *fluxo total através de uma superfície arbitrária*

$$\Phi = \lim_{\Delta A_i\to 0}\sum \vec{E}_i\cdot\Delta\vec{A}_i = \int_{\text{superfície}} \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

Um caso de especial interesse é quando a superfície sobre a qual estamos integrando, é *fechada*. Uma superfície fechada divide o espaço em uma *região interna* e uma *região externa* à superfície. Um exemplo deste tipo de superfície, denominada *superfície gaussiana*, é mostrado na figura 6.13. Neste caso, convenciona-se que o vetor $\hat{n}$ aponta no sentido da região interna para a região externa. O fluxo através de uma superfície fechada é então dado por

$$\Phi_c = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \oint E_{\hat{n}}dA,$$

onde

$$E_{\hat{n}} = \vec{E}\cdot\hat{n}$$

é a componente do campo elétrico na direção da normal à superfície.

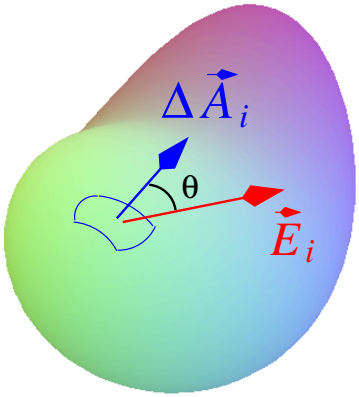


Figura 6.13: Superfície gaussiana

Lei de Gauss

Consideremos o campo elétrico de uma carga puntiforme. De acordo com a lei de Coulomb, em um ponto localizado a uma distância r da origem,

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}.$$

Imaginemos agora uma superfície gaussiana arbitrária, abrangendo uma região qualquer do espaço. O fluxo de $\vec{E}$ através de um elemento de área $d\vec{A} = \hat{n}dA$ desta superfície imaginária é

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{dA\cos\theta}{r^2}, \tag{6.3.2}$$

onde usamos $\hat{n}\cdot\hat{r} = \cos\theta$.

Digressão sobre ângulo sólido

Na figura 6.14 ΔA é o elemento de área de uma superfície qualquer, $\Delta\Sigma$ e $\Delta\Omega$ são elementos de área de esferas de raio r e de raio 1, respectivamente. A grandeza $\Delta\Omega$ é o *elemento de ângulo sólido* subentendido pelo elemento de superfície ΔA. Note que

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta\Sigma}{r^2} = \frac{\Delta A\cos\theta}{r^2}$$

Portanto, somar sobre

$$\frac{\Delta A\cos\theta}{r^2},$$

é o mesmo que somar sobre $\Delta\Omega$. Devemos agora considerar duas possibilidades.

- A origem O está *dentro da superfície gaussiana*. Neste caso,

$$\oint d\Omega = 4\pi \ \text{ (O interno)}, \tag{6.3.3}$$

onde usamos o resultado para a área de uma superfície esférica de raio unitário.

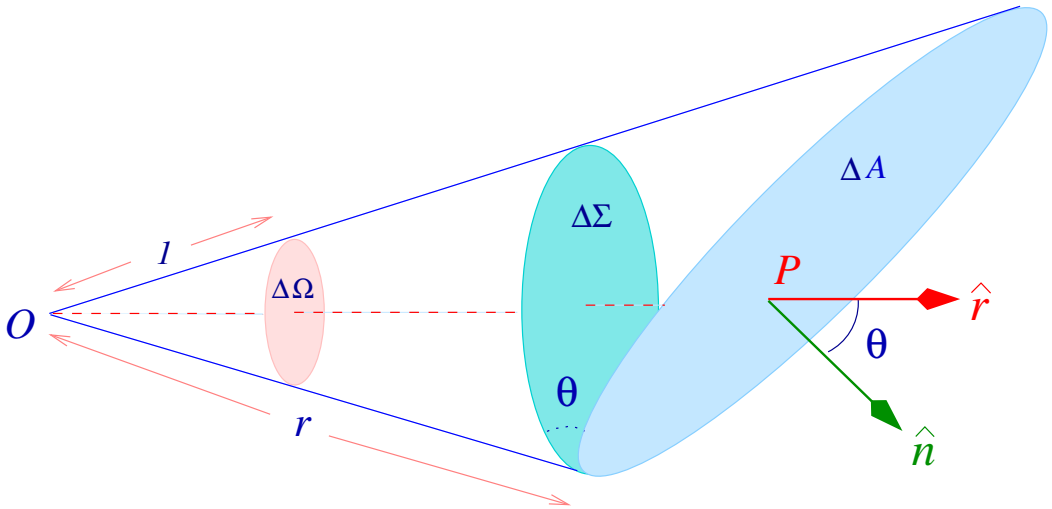


Figura 6.14: Ângulo Sólido

- A origem O está *fora da superfície gaussiana*. Neste caso, os elementos de ângulo sólido cancelam-se mutuamente, resultando em

$$\oint d\Omega = 0 \ \text{(O externo)}. \tag{6.3.4}$$

Fim da Digressão sobre ângulo sólido

A equação (6.3.2) pode agora ser expressa como

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega, \tag{6.3.5}$$

onde $d\Omega$ é o ângulo sólido subentendido por dA, *visto da posição da carga q*. É importante notar que o fluxo do campo proporcional ao ângulo sólido, é uma consequência direta da lei do inverso quadrado da distância. A mesma forma seria obtida se estivéssemos considerando o fluxo do campo gravitacional newtoniano, produzido por uma massa puntiforme.

Utilizando as equações (6.3.3) e (6.3.4), teremos para o fluxo total,

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint d\Omega = \begin{cases} \dfrac{q}{\epsilon_0} \text{ se a carga q estiver } \textit{dentro} \text{ de A} \\ \\ 0 \ \text{ se a carga q estiver } \textit{fora} \text{ de A} \end{cases}$$

Uma distribuição qualquer de cargas pode ser decomposta em elementos de cargas, cada um comportando-se como uma carga puntiforme. O princípio de superposição nos dá o campo resultante como a soma dos campos produzidos por cada elemento de carga. Assim, obtemos a *Lei de Gauss* na forma

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}, \tag{6.3.6}$$

onde q_{in} é a carga contida *dentro* da superfície A.

A *Lei de Gauss* está expressa na equação (6.3.6) na *forma integral*. Esta é uma das quatro *equações de Maxwell* do eletromagnetismo. Veremos que existe uma forma equivalente em termos de uma *equação diferencial*, e que esta lei permanece válida mesmo quando as distribuições de cargas não são estáticas, ou seja, quando as cargas possuem um movimento qualquer.

Há uma interessante analogia entre as linhas de campo elétrico e linhas de velocidade de um fluido. Cargas positivas (negativas) são análogas às fontes (sorvedouros) de um fluido. É por esta razão que as cargas elétricas são consideradas como *fontes do campo eletrostático* [3].

6.4 Quarta aula

6.4.1 Exemplos simples de aplicações da Lei de Gauss

A lei de Gauss não é somente uma forma elegante de expressar os fenômenos eletrostáticos. É também uma ferramenta útil para o cálculo do campo de distribuições de cargas possuindo *elementos de simetria*. De maneira geral, sempre que for possível identificar uma *superfície gaussiana* tal que o *campo elétrico* tenha o *mesmo valor em todos os seus pontos*, então o cálculo do fluxo torna-se elementar

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA, \tag{6.4.1}$$

onde E é a intensidade do campo e A é a área da superfície. Note que E pode ser positivo ou negativo, dependendo se as linhas de campo estão entrando ou saindo da superfície. Vejamos alguns exemplos.

Campo de uma carga puntiforme

Devemos determinar a superfície gaussiana tal que o fluxo do campo de uma carga puntiforme adquira a forma simples dada por (6.4.1). O campo produzido por uma carga puntiforme deve possuir simetria esférica. Ou seja, sua intensidade não varia quando percorremos a superfície de uma esfera imaginária de raio r, a qual possui área

$$A = 4\pi\, r^2$$

Portanto, utilizando a relação (6.4.1), teremos

$$\Phi = E4\pi\, r^2.$$

Finalmente, aplicando a lei de Gauss dada por (6.3.6), teremos

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\, r^2}$$

Campo de uma esfera isolante possuindo densidade de carga uniforme e raio a.

Novamente temos uma configuração possuindo *simetria esférica*. Ou seja, o fluxo do campo elétrico à uma distância r do centro da esfera é

$$\Phi = E4\pi\, r^2.$$

Para $r > a$, *toda a carga da esfera* está contida no interior da superfície gaussiana. Logo, de acordo com a lei de Gauss,

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\, r^2}; \quad r > a,$$

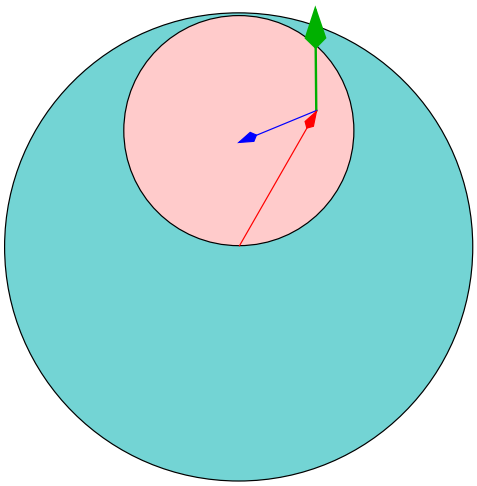


Figura 6.15: Solucão do problema (24.63) do Serway

onde Q é a carga total da esfera.

Para $r < a$, a carga que está contida no interior da superfície gaussiana é

$$q = \rho \frac{4}{3}\pi r^3,$$

onde ρ é a *densidade uniforme* de carga da esfera isolante,

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3}. \tag{6.4.2}$$

Aplicando a lei de Gauss,

$$E = \frac{q}{\epsilon_0}\frac{1}{4\pi r^2} = \frac{Qr^3}{a^3 4\pi\epsilon_0\, r^2} = \frac{Q}{a^3 4\pi\epsilon_0} r; \quad r < a.$$

Note que nos pontos internos à esfera o campo varia *linearmente* com r, tendendo à zero quando $r \to 0$.

Como uma aplicação deste resultado, vamos fazer o problema (24.63) do livro texto (Serway). A solução gráfica deste problema é mostrada na figura 6.15.

Campo de uma casca esférica delgada

Consideremos uma casca esférica *delgada*, possuindo raio a e uma carga Q uniformemente distribuída sobre sua superfície. Novamente temos uma simetria esférica. Para pontos externos à casca esférica, imaginamos uma superfície gaussiana possuindo raio $r > a$. Aplicando a lei de Gauss, teremos

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\, r^2}; \quad r > a. \tag{6.4.3}$$

Note que para pontos externos à distribuição de cargas, os campos dados por (6.4.2) e (6.4.3) comportam-se como se toda a carga estivesse concentrada num único ponto na origem.

Para pontos internos à casca esférica, a carga no interior da superfície gaussiana imaginária é nula. Logo,

$$E = 0; \quad r < a.$$

Distribuição de cargas com simetria cilíndrica

Certas distribuições de carga exibem *simetria cilíndrica*, ou seja, podemos antecipar que o campo produzido por estas distribuições tem a mesma intensidade em todos os pontos pertencentes à uma *superfície cilíndcdrica* imaginária. Podemos decompor o fluxo total através do cilindro como

$$\Phi = \oint E_{\hat{n}} dA = \oint_{topo} E_{\hat{n}_1} dA - \oint_{base} E_{\hat{n}_1} dA + E_{\hat{n}_2}(2\pi r l), \tag{6.4.4}$$

onde r é o raio do cilindro, l é sua altura e os vetores unitários $\hat{n}_1$ e $\hat{n}_2$ são mutuamente ortogonais apontando para cima e para fora da superfície lateral, respectivamente.

Suponhamos a distribuição de cargas seja um fio de comprimento infinito, uniformemente carregado com densidade linear de carga λ. Por simetria, as linhas de campo são direcionadas radialmente, de modo que $E_{\hat{n}_1} = 0$ e $E_{\hat{n}_2} = E$, sendo E a intensidade do campo. Usando a lei de Gauss, e a expressão (6.4.4) teremos

$$E_{\hat{n}_2} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \frac{1}{(2\pi r l)} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, \tag{6.4.5}$$

onde usamos $q_{in} = \lambda l$.

Plano uniformemente carregado

Neste caso, podemos antecipar que o campo elétrico $\vec{E}$ terá o mesmo valor em todos os pontos dos *planos paralelos ao plano da distribuição de cargas*, sendo paralelo à normal exterior de dois planos quaisquer que contenham o plano de cargas entre eles (sanduiche). Construímos então uma superfície gaussiana, adicionando quatro planos de maneira a formar um *paralelepípedo*. O fluxo através das 4 faces laterais do paralelepípedo é nulo, já que o campo é ortogonal à normal destes 4 planos. Como o vetor $\vec{E}$ tem *sentidos opostos acima e abaixo do plano de cargas*, então

$$\Phi = EA + EA = 2EA$$

Usando a lei de Gauss,

$$E = \frac{q_{in}}{2A\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0},$$

onde usamos $q_{in} = \sigma A$. Note que já havíamos obtido este resultado (veja a equação (6.2.5)), a partir do limite de pequenas distâncias do campo do disco uniformemente carregado. Note tambem que este campo *não depende do ponto do espaço*; é um campo *uniforme*.

Equilíbrio no campo eletrostático

A lei de Gauss também permite a demonstração de certas propriedades gerais em eletrostática. Uma destas propriedades diz respeito à não existência de pontos de *equilíbrio estável* em um campo eletrostático. Um ponto P_0 é de equilíbrio estável se, ao deslocarmos uma carga q_0 em qualquer direção, a partir do ponto P_0, as forças eletrostáticas tenderão a puxar a carga q_0 de volta para o ponto P_0. Para que isto ocorra, as linhas de campo elétrico devem todas *convergir para o ponto* P_0. Mas, neste caso, o *fluxo do campo* através de uma pequena superfície gaussiana, contendo o ponto P_0 em seu interior, será *não nulo*. De acordo com a lei de Gauss, isto *não é possível*, uma vez que não existe uma carga q (fonte do campo elétrico) em P_0.

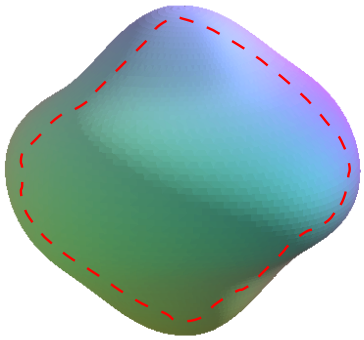


Figura 6.16: Condutor Carregado

6.5 Quinta aula

6.5.1 Condutores

As cargas elétricas (elétrons) podem se mover no interior de um meio condutor, mas não podem escapar *espontaneamente* deste meio. Na eletrostática, estamos descrevendo situações onde as cargas encontram-se em repouso. Admitindo que as cargas ja se deslocaram para uma *configuração de equilíbrio* (em um bom condutor, o equilíbrio é atingido em cerca de $10^{-16}\,s$), não pode haver campo elétrico no interior do condutor, pois, se houvesse, as cargas ainda estariam se movendo sob a ação deste campo. Logo, no *equilíbrio eletrostático*,

o campo elétrico é nulo no interior do condutor.

A figura 6.16 mostra um *condutor carregado*, ou seja, não neutro, onde a linha tracejada em vermelho representa uma superfície gaussiana cujo interior contém o volume interno do condutor. Uma vez que, no equilíbrio, o campo elétrico é nulo no interior do condutor, então o *fluxo do campo* através da superfície gaussiana é nulo. Logo, *de acordo com a lei de Gauss*, não há cargas no interior do condutor. Do ponto de vista macroscópico, a solução de *equilíbrio eletrostático* é tal que

a carga localiza-se na superfície do condutor.

Na parte externa do condutor, existe um campo elétrico produzido pelas cargas superficiais. Como estas cargas não possuem movimento ao longo da superfície do condutor (solução estática), então

a componente do campo tangencial à superfície externa do condutor deve ser nula

Para determinar a *componente normal* à superfície, construímos uma superfície gaussiana em forma de caixa cilíndrica como mostra a figura 6.17

Na face lateral da caixa cilíndrica o fluxo do campo é nulo, pois não existe componente tangencial. Na base do cilindro, que está dentro do condutor, o campo elétrico é nulo. Logo, só há fluxo através do topo do cilindro, e este fluxo é dado por

$$\Phi = EdA,$$

onde dA é a área do topo do cilindro, que é idêntica à área de seção do cilindro com a superfície do condutor. Portanto, usando a Lei de Gauss,

$$E = \frac{dq_{in}}{\epsilon_0 dA} = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

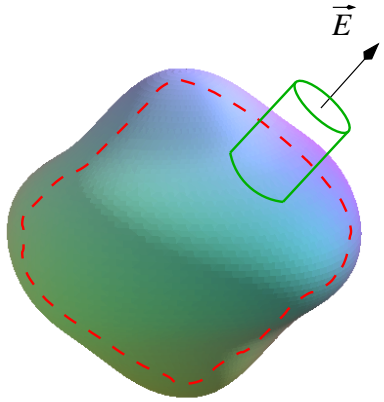


Figura 6.17: Superfície gaussiana para o condutor

onde usamos $\sigma = \frac{dq}{dA}$.

Estude o exemplo (24.7) do livro texto.

6.5.2 Potencial Eletrostático

Sabemos que uma partícula carregada, possuindo carga q_0, sob a ação de um campo eletrostático será acelerada por uma força

$$\vec{F} = q_0\vec{E}.$$

Em consequência, a *energia cinética* será aumentada ou diminuída. De onde vem a energia adquirida ou perdida pela partícula? A resposta à esta questão nos leva a introduzir o conceito de *energia* na descrição dos fenômenos eletromagnéticos.

Campos conservativos

A figura 6.18 [5] ilustra o movimento de uma carga q_0, na presença do campo eletrostático produzido por outra carga q. O *trabalho realizado* sobre a carga q_0, num deslocamento infinitesimal $d\vec{s}$ é

$$dW = q_0\vec{E}\cdot d\vec{s}.$$

Consideremos inicialmente o trecho $1 \to 2$. A variação da *energia cinética* da carga q_0 neste trecho é

$$T_2 - T_1 = \int_1^2 q_0\vec{E}\cdot d\vec{s} = kq_0q\int_1^2 \frac{\hat{r}\cdot d\vec{s}}{r^2} = kq_0q\int_1^2 \frac{dr}{r^2} = -kq_0q\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Suponhamos agora que a carga q_0 percorra todo o trajeto mostrado na figura 6.18, retornando ao ponto 1 de partida. Caso sua energia cinética fosse, por exemplo, maior que a inicial, teríamos uma forma de produzir energia do nada! Sabemos que isto não é possível, pois não existe um moto perpétuo. Portanto, devemos ser capazes de demonstrar que

o trabalho realizado ao longo de qualquer trajetória fechada é nulo

(Caso uma determinada trajetória resultasse em um trabalho negativo (diminuindo a energia cinética da carga q_0), poderíamos inverter o sentido da trajetória obtendo assim um ganho de energia cinética.)

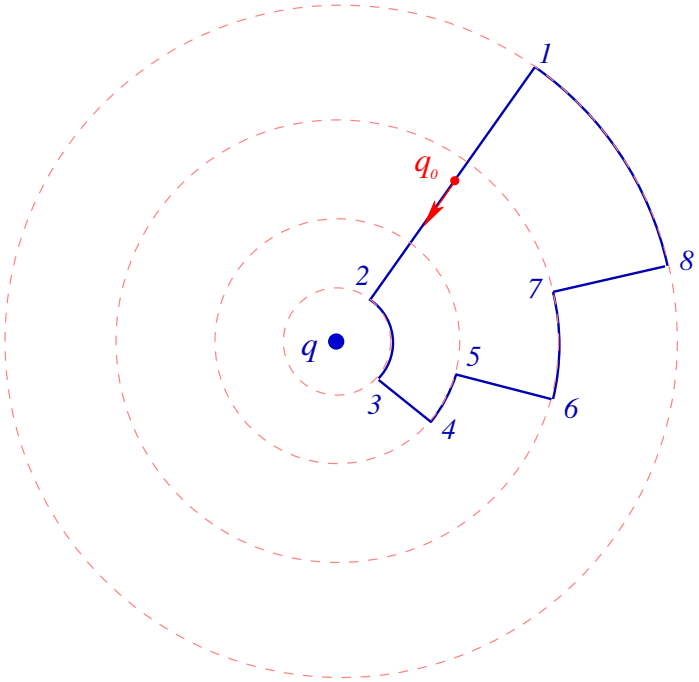


Figura 6.18: Trajetória num campo conservativo

Vamos primeiro mostrar que o trabalho é de fato nulo para a trajetória simples mostrada na figura 6.18.

Note que, nos trechos $2 \to 3$, $4 \to 5$, $6 \to 7$ e $8 \to 1$, a carga q_0 desloca-se *perpendicularmente* à direção do *campo radial* $\vec{E}$. Portanto, o trabalho é nulo nestes trechos ($dW = \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$). Nos trechos onde o trabalho é não nulo temos

$$W_{12} = kq_0q \int_1^2 \frac{dr}{r^2} = -kq_0q \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right),$$

$$W_{34} = kq_0q \int_3^4 \frac{dr}{r^2} = -kq_0q \left(\frac{1}{r_4} - \frac{1}{r_3} \right),$$

$$W_{56} = kq_0q \int_5^6 \frac{dr}{r^2} = -kq_0q \left(\frac{1}{r_6} - \frac{1}{r_5} \right),$$

$$W_{78} = kq_0q \int_7^8 \frac{dr}{r^2} = -kq_0q \left(\frac{1}{r_8} - \frac{1}{r_7} \right).$$

O trabalho total é a soma dos trabalhos em cada trecho;

$$W = -kq_0q \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_4} - \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_6} - \frac{1}{r_5} + \frac{1}{r_8} - \frac{1}{r_7} \right).$$

Concluímos facilmente que $W = 0$, notando que $r_2 = r_3$, $r_4 = r_5$, $r_6 = r_7$ e $r_1 = r_8$.

A curva utilizada na figura 6.18 pode parecer muito especial. Vamos agora verificar o que acontece em uma situação mais geral, como a mostrada na figura 6.19 (escolhemos uma força repulsiva, mas o mesmo poderia ser deduzido com uma força atrativa). A ampliação de um dos

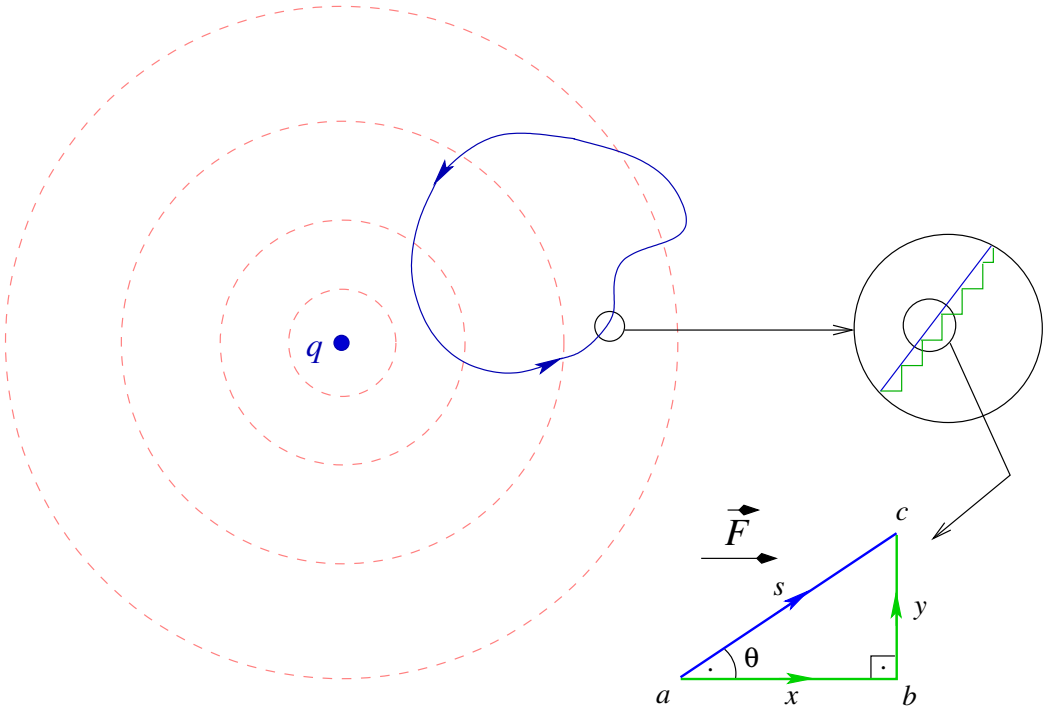


Figura 6.19: Trajetória geral num campo conservativo

trechos da trajetória, mostra uma aproximação em termos de *dente de serra*. Estamos portanto reduzindo uma trajetória qualquer ao caso considerado na figura 6.18, onde já demonstramos que o trabalho é nulo quando percorremos o circuito fechado. Tomando *dentes suficientemente pequenos*, como é mostrado na ampliação seguinte, tudo o que precisamos mostrar é que, para um dente qualquer, o trabalho W_{ac} é o mesmo que a soma dos trabalhos W_{ab} e W_{bc}. No trecho $a \to c$ o trabalho é

$$W_{ca} = \int_a^c \vec{F} \cdot d\vec{s} = F\, s \cos\theta,$$

pois a força é constante ao longo do trecho infinitesimal. No trecho horizontal,

$$W_{ab} = \int_a^c \vec{F} \cdot d\vec{s} = F\, x.$$

No trecho vertical $W_{bc} = 0$, visto que a força é perpendicular ao deslocamento. Como $s \cos\theta = x$, concluímos que $W_{ac} = W_{ab} + W_{bc}$. Portanto, o trabalho ao longo de uma trajetória qualquer é o mesmo que o trabalho ao logo de uma trajetória em forma de dente de serra, que por sua vez é nula para um circuito fechado.

Forças possuindo a propriedade demonstrada acima, são chamadas de *forças conservativas*. Note que esta propriedade é comum à qualquer força que dependa somente da distância radial, ou seja, *forças centrais*.

Uma consequência imediata do anulamento do trabalho em um circuito fechado é que o trabalho realizado entre dois pontos A e B quaisquer, *não depende do caminho entre A e B*. Para mostrar isto, considere as duas trajetória exibidas na figura 6.20. Partindo do ponto A e percorrendo as duas trajetórias no sentido horário, teremos

$$W^{AB}_{vermelho} + W^{BA}_{azul} = 0.$$

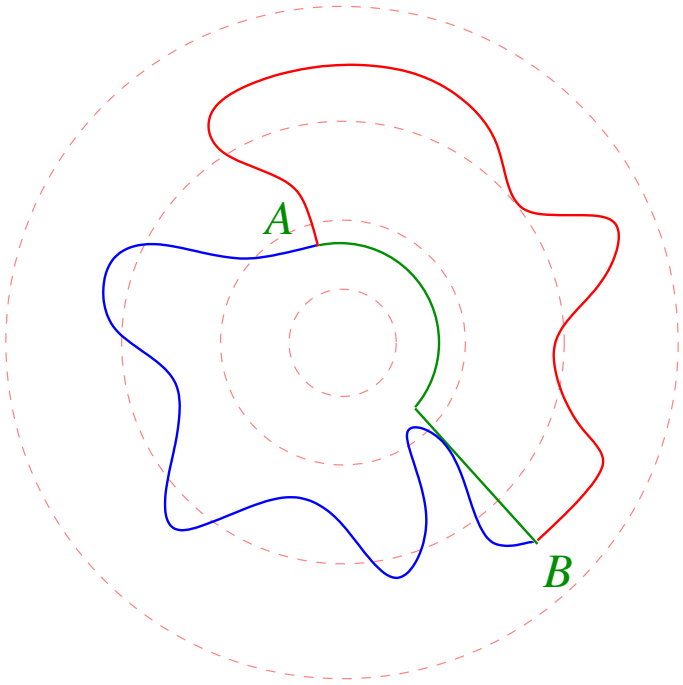


Figura 6.20: Diferentes caminhos entre A e B

Como $W^{BA}_{azul} = -W^{AB}_{azul}$, obtemos

$$W^{AB}_{vermelho} = W^{AB}_{azul}.$$

Portanto, para calcular W^{AB}, podemos escolher *qualquer trajetória*. Uma trajetória conveniente é aquela mostrada em verde, na figura 6.20. No trecho semi-circular desta trajetória, sabemos que não há trabalho realizado. No trecho que vai de r_A até r_B, o trabalho é

$$W^{AB} = kq_0q \int_A^B \frac{dr}{r^2} = -kq_0q \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right), \tag{6.5.1}$$

Esta propriedade pode ser equivalentemente expressa dizendo que

o trabalho realizado por uma força conservativa
só depende da posição dos pontos inicial e final

No caso de um campo eletrostático produzido por uma distribuição qualquer de cargas, podemos invocar o *princípio de superposição*, subdividindo a distribuição de cargas em elementos de carga puntiforme, cada um dos quais produzindo um campo coulombiano, portanto conservativo. Naturalmente, a soma de campos conservativos é um campo conservativo.

Diferença de potencial eletrostático

Consideremos dois pontos A e B de uma região do espaço onde existe um campo elétrico $\vec{E}$ e uma carga q_0 que pode ocupar qualquer destes pontos. Definimos a *diferença de energia potencial eletrostática* deste sistema como

$$\Delta U = U_B - U_A = -q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}. \tag{6.5.2}$$

Note que ΔU é o trabalho realizado sobre q_0 entre A e B, *com sinal trocado*. Se imaginarmos um *agente externo* deslocando a carga q_0 entre A e B, *sem alterar sua energia cinética*, então a equação (6.5.2) é idêntica ao *trabalho realizado pelo agente externo*. Sabemos da seção anterior que ΔU é de fato uma grandeza que depende somente da posição dos pontos A e B. Podemos portanto utilizar *qualquer caminho* ligando os ponto A e B, para calcular a *integral de linha* na equação (6.5.2).

Podemos também definir a grandeza, denominada *diferença de potencial* entre os pontos A e B, como

$$\Delta V = \frac{U_B - U_A}{q_0} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Note que esta grandeza depende somente das propriedades do campo elétrico. Escolhendo arbitrariamente um ponto de referência, P_0, onde $V(P_0) = 0$, teremos o potencial em qualquer ponto do espaço

$$V(P) = -\int_{P_0}^P \vec{E} \cdot d\vec{s}. \tag{6.5.3}$$

Frequentemente, o ponto P_0 é tomado à uma distância infinita das distribuições de carga.

Cargas puntiformes

Vimos que o trabalho realizado pela força eletrostática de uma carga q sobre outra carga q_0 é dado pela equação (6.5.1). Utilizando a definição geral de diferença potencial eletrostático, dada por (6.5.2), teremos

$$V_B - V_A = -kq \int_A^B \frac{dr}{r^2} = kq \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right), \tag{6.5.4}$$

Convencionando-se que o valor do potencial é zero em $r_A = \infty$, podemos falar em *potencial em cada ponto* produzido por uma carga puntiforme, como sendo dado por

$$V = k\frac{q}{r}.$$

Note que este potencial não muda de valor nos pontos de superfícies esféricas de raio r. Em geral, superfícies onde o potencial tem sempre o mesmo valor são denominadas

Superfícies Equipotenciais

Utilizando o princípio de superposição, o potencial produzido por N cargas puntiformes, $q_1, \cdots q_N$, é dado por

$$V = k \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i},$$

onde o potencial, de cada carga, no infinito, foi posto igual à zero.

Energia potencial de partículas carregadas

Uma carga q_1 está produzindo um potencial

$$V_1 = k\frac{q_1}{r_{12}}$$

em um ponto que está a uma distância r_{12} de q_1. Da definição de potencial, sabemos que o trabalho realizado por um *agente externo* para deslocar, *sem aceleração*, uma segunda carga q_2, *desde o infinito* até a distância r_{12} é

$$q_2\, V_1.$$

Este trabalho é definido como a *energia potencial* U do sistema de cargas. Ou seja,

$$U = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}}.$$

Para um sistema constituído de N cargas, devemos somar as energias potenciais associadas a *cada par* de cargas. Ou seja,

$$U = k\sum_{i>j}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}.$$

Distribuições contínuas de cargas

Utilizando o *princípio de superposição*, o potencial de uma distribuição contínua é dado pela soma dos potenciais

$$dV = k\frac{dq}{r}$$

produzidos por elementos de carga dq. Ou seja,

$$V = k\int\frac{dq}{r}.$$

Estamos convencionando que o potencial é nulo em pontos situados a uma distância infinita da distribuição de cargas.

6.6 Sexta aula

6.6.1 Potencial de uma esfera uniformemente carregada

A figura 6.21 mostra uma esfera possuindo carga total Q, *uniformemente distribuída* em todo o seu volume.

Um elemento de carga $dq = \rho dv$ (o volume dv está mostrado na figura), produz um potencial

$$dV = k\frac{dq}{r''} = k\rho\frac{dv}{r''}$$

num ponto P situado a uma distância r'' do centro da esfera. Também esta indicada na figura, a distância r', que vai do centro da esfera até o volume dv. Podemos expressar r'' em termos de r e r', observando que

$$r'' = \sqrt{(r'\mathrm{sen}\theta)^2 + (r - r'\cos\theta)^2} = \sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr'\cos\theta}$$

As dimensões do elemento de volume dv são $r'\mathrm{sen}\theta d\phi$, $r'd\theta$ e dr'. Portanto,

$$dv = (r'\mathrm{sen}\theta d\phi)(r'd\theta)(dr').$$

O potencial total em P é obtido integrando em r', θ e ϕ

$$V = k\int_0^{2\pi} d\phi\int_0^{\pi} d\theta\int_0^{R} dr'\frac{\rho\,\mathrm{sen}\theta\, r'^2}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr'\cos\theta}}.$$

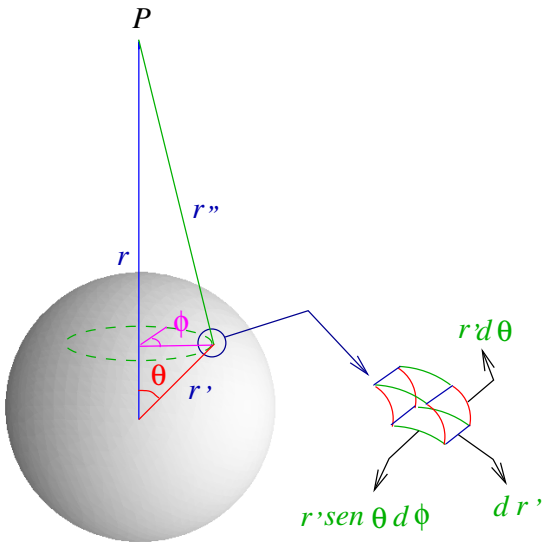


Figura 6.21: Esfera uniformemente carregada

Como a densidade de carga ρ é constante e o resto do integrando não depende de ϕ, podemos imediatamente integrar em ϕ, resultando em

$$V = k\rho(2\pi)\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{R} dr' \frac{\rho\,\mathrm{sen}\theta\, r'^2}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr'\cos\theta}}.$$

Fazendo a mudança de variável

$$\mathrm{sen}\theta d\theta = -d(\cos\theta) = -du,$$

teremos

$$V = k\rho(2\pi)\int_0^{R} dr' \int_{-1}^{1} du \frac{r'^2}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr'\,u}}.$$

Fazendo uma segunda mudança de variável

$$x = r'^2 + r^2 - 2rr'\,u; \quad dx = -2rr'\,du,$$

teremos

$$\begin{aligned} V &= k\rho(2\pi)\int_0^{R} dr' \int_{(r+r')^2}^{(r-r')^2} \frac{dx}{(-2rr')}\frac{r'^2}{\sqrt{x}} \\ &= -\frac{k\rho(2\pi)}{r}\int_0^{R} r'\left(|r-r'| - |r+r'|\right) dr' \end{aligned}$$

Devemos agora distinguir duas situações:

ponto P fora da distribuição de cargas

Neste caso, $|r - r'| - |r + r'| = -2r'$. Logo,

$$V = \frac{k\rho(4\pi)}{r}\frac{R^3}{3} = \frac{k\,Q}{r} \tag{6.6.1}$$

ponto P dentro da distribuição de cargas

Devemos, neste caso, separar a região de integração em duas partes. Uma, de 0 até r, onde $|r - r'| - |r + r'| = -2r'$. Outra, de r até R, onde $|r - r'| - |r + r'| = -2r$. Logo

$$V = \frac{k\rho(4\pi)}{r}\left[\frac{r^3}{3} + r\left(\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right)\right] = \frac{kQ}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) \tag{6.6.2}$$

6.6.2 Cálculo do campo elétrico a partir do potencial

Consideremos uma carga teste q_0 movendo-se ao longo da direção s, mostrada na figura 6.22. As linhas tracejadas representam superfícies equipotenciais. Ao atravessar uma diferença de potencial dV, é realizado um trabalho

$$dW = -q_0\,dV = q_0\,\vec{E}\cdot d\vec{s} = q_0\,E\,ds\,\cos\theta.$$

Portanto,

$$E\cos\theta = -\frac{dV}{ds}.$$

Ou seja,

$$(\textit{Componente de } \vec{E} \textit{ ao longo de } s) = -\frac{\partial V}{\partial s}$$

O eixo s poderia ter sido escolhido ao longo de qualquer um dos 3 eixos x, y ou z. Neste caso, teríamos as *componentes cartesianas* do vetor campo elétrico dadas por

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x},\;\; E_y = -\frac{\partial V}{\partial y},\;\; E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{6.6.3}$$

6.6.3 Potencial de um condutor carregado

Já sabemos que o campo elétrico é nulo no interior de um condutor. Usando-se as equações (6.6.3), chega-se à conclusão de que

o potencial no interior do condutor é constante.

Como o campo *elétrico é sempre normal à superfície do condutor*, podemos facilmente deduzir que em dois pontos A e B quaisquer, na superfície do condutor, o potencial é o mesmo. De fato,

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0.$$

Portanto, *o condutor é uma região equipotencial*

A figura 6.23 mostra os gráficos do potencial e do campo elétrico de uma esfera condutora carregada.

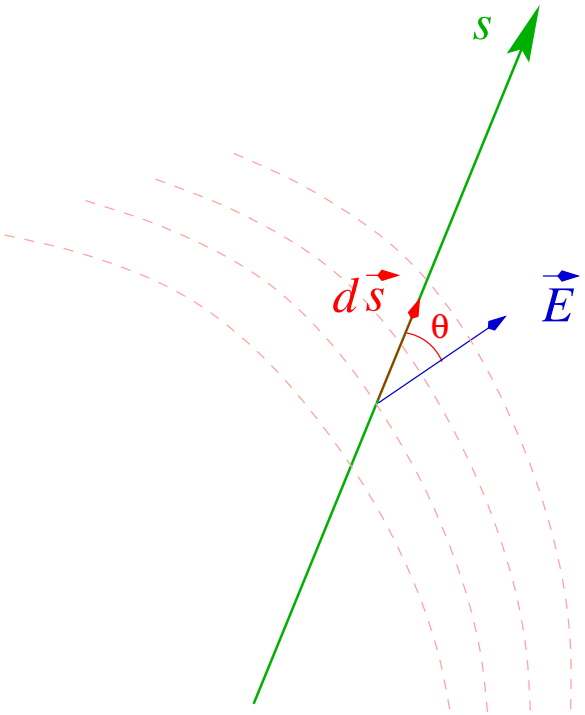


Figura 6.22: Campo elétrico de uma carga teste

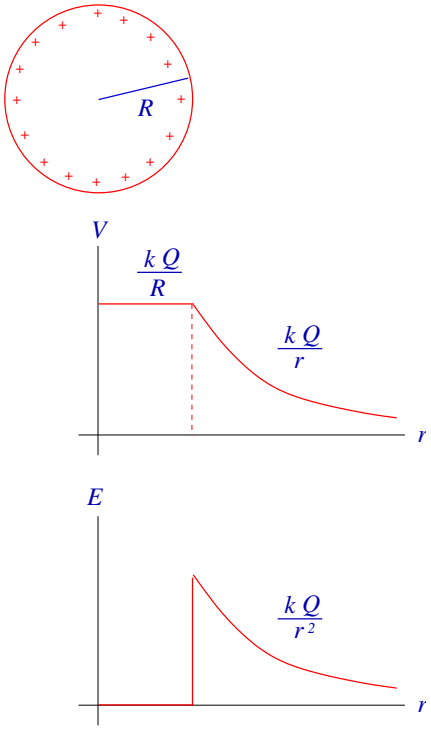


Figura 6.23: Potencial e campo elétrico de uma esfera carregada

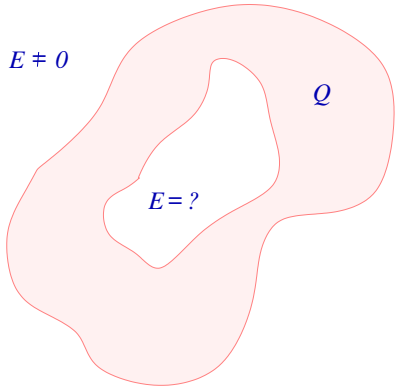


Figura 6.24: Condutor possuindo uma cavidade

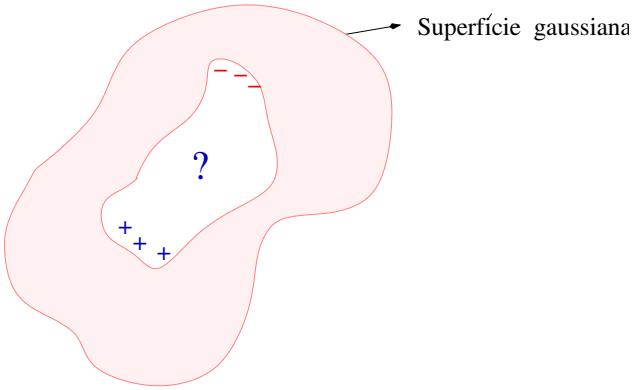


Figura 6.25: Superfície gaussiana envolvendo a cavidade

6.6.4 Condutor possuindo uma cavidade - Blindagem

A figura 6.24 mostra o corte de um condutor carregado possuindo uma cavidade, no interior da qual não há carga líquida. Queremos determinar o campo elétrico no interior da cavidade e a distribuição de cargas na superfície interna. Na figura 6.25 construímos uma superfície (linha tracejada), passando pelo interior do meio condutor, e envolvendo toda a cavidade. Como $\vec{E} = 0$ no condutor, a lei de Gauss nos dá

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = 0 = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}.$$

Portanto, toda a informação que a lei de Gauss nos dá, é que a *carga líquida* na superfície da cavidade é nula.

Admitindo que as cargas teriam se distribuído na superfície da cavidade, como na figura 6.26 (sabemos que num condutor tal configuração não seria *estável*), teríamos um campo elétrico não nulo no interior da cavidade. Mas esta suposição nos leva à uma contradição, uma vez que a integral de linha do campo elétrico, ao longo da curva *fechada* Γ, indicada na figura, seria não nula;

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} \neq 0,$$

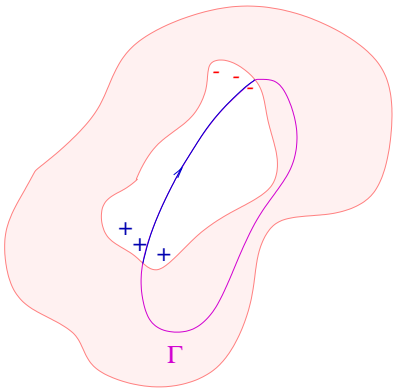


Figura 6.26: Distribuicão de cargas na cavidade

o que é um absurdo. Logo,

não há campo elétrico no interior de uma cavidade de um condutor

É por esta razão que circuitos elétricos sensíveis (como a placa mãe de um computador) são *blindados* por um gabinete metálico. Note que se a lei de Gauss não fosse verdadeira, a blindagem não ocorreria, mesmo que o campo fosse conservativo.

6.7 Sétima aula

6.7.1 Capacitores

Capacitores são utilizados em diversos dispositivos tais como:

- "Flash" de máquina fotográfica.
- Sintonizador de radio.
- Filtros.
- Capacitores microscópicos em memória RAM de computadores.

Basicamente, um capacitor é um armazenador de energia potencial elétrica. Um capacitor típico é formado por dois condutores possuindo cargas iguais e opostas (estas cargas podem ser fornecidas por uma bateria), separados por um isolante.

De acordo com o *princípio de superposição*, a **superposição** de duas configurações idênticas à mostrada na figura 6.27 (mesma disposição geométrica e mesmo isolante), será uma nova configuração possuindo o dobro da carga; o campo elétrico será dobrado em cada ponto do espaço, o que por sua vez fará com que o trabalho para transportar uma carga teste seja também dobrado. Portanto, concluímos que o *módulo da carga elétrica* Q deve ser proporcional ao módulo da *diferença de potencial* V, ou seja,

$$Q = CV.$$

Note que a relação acima *não depende da validade da lei de Coulomb*. Ela é uma consequência somente do princípio de superposição e do fato de ser o campo elétrico um campo conservativo (derivável de um potencial). A constante C é chamada de *capacitância* e V é denominado *voltagem*.

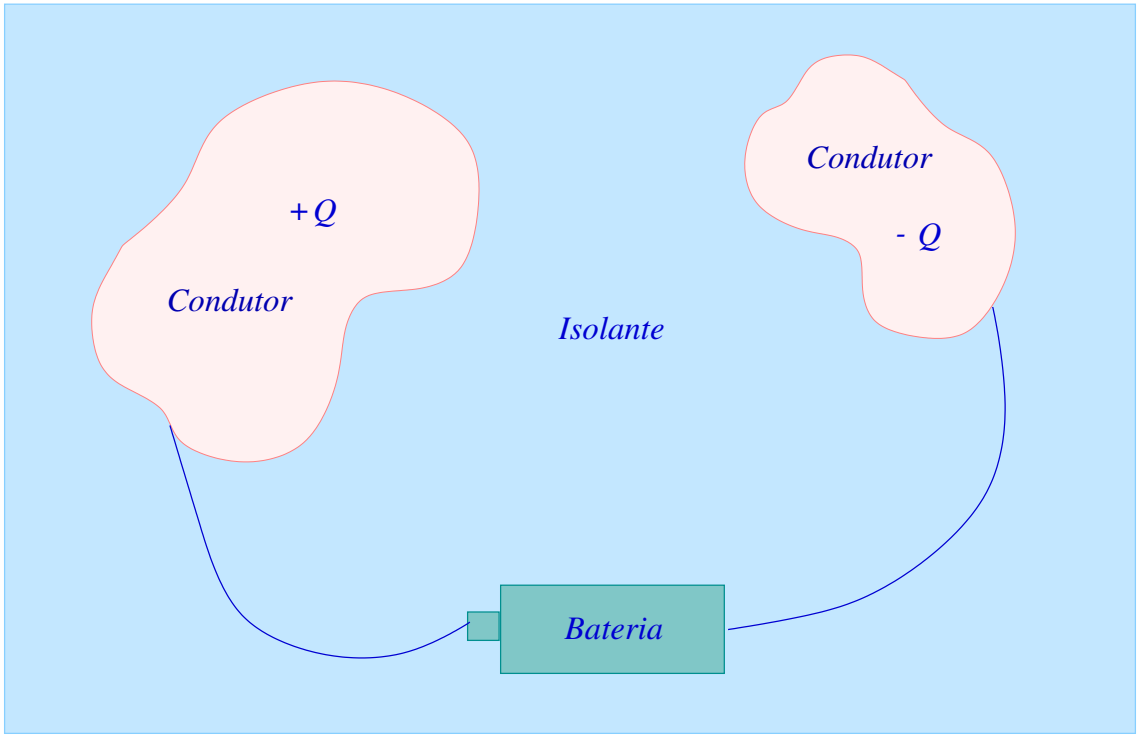


Figura 6.27: Capacitor

A *unidade de capacitância* é o farad.

$$[C] = \frac{C}{V} = F.$$

Um capacitor típico possui capacitância variando entre $1\mu\, F = 10^{-6}F$ até $1pF = 10^{-12}F$.

Como um exemplo, vamos calcular a capacitância de uma esfera condutora. Sabemos que a voltagem é $V = kQ/R$, onde R é o raio da esfera (o outro condutor é uma casa esférica metálica à uma distância praticamente infinita da esfera). Portanto,

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{kQ}{R}} = \frac{R}{k} = 4\pi\epsilon_0 R. \tag{6.7.1}$$

Para uma esfera de $10\,cm$ de raio,

$$C = 4\pi\epsilon_0(0,1) = 4\pi\left(8,85 \times 10^{-12} \times 0,1\right) = 11,1\,pF$$

Capacitor de placas paralelas

O potencial entre as placas é

$$V = \int_{+}^{-} \vec{E} \cdot d\vec{s}. \tag{6.7.2}$$

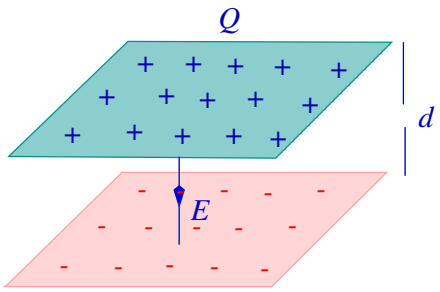


Figura 6.28: Capacitor de placas paralelas

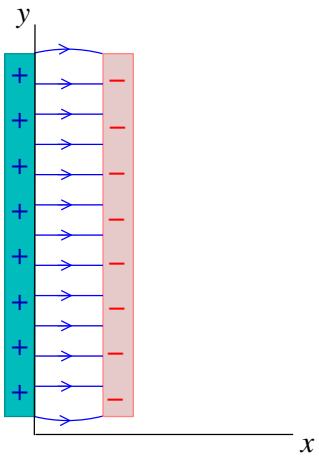


Figura 6.29: Distorcão das linhas de campo nas bordas

Desconsiderando a pequena distorção das linhas de campo nas proximidades das *bordas* (veja a figura 6.29), teremos

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\,\hat{i} & \textit{entre as placas.} \\ \\ 0 & \textit{em qualquer outro ponto.} \end{cases} \tag{6.7.3}$$

Substituindo (6.7.3) em (6.7.2), teremos

$$V = \int_{+}^{-} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\int_0^d dx = \frac{\sigma\, d}{\epsilon_0}. \tag{6.7.4}$$

Portanto,

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0\, Q}{\sigma\, d} = \frac{\epsilon_0\, A}{d},$$

onde utilizamos

$$\sigma = \frac{Q}{A}.$$

Exercício: Calcule a área das placas paralelas de um capacitor possuindo capacitância $C = 1\,F$ e distância entre as placas de um milímetro.

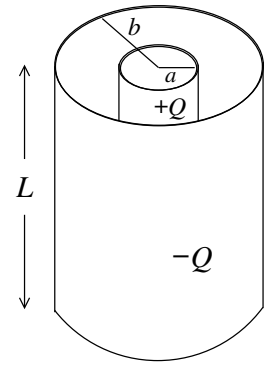


Figura 6.30: Capacitor Cilíndrico

Capacitor cilíndrico

A figura 6.30 mostra um condutor cilíndrico de raio a, comprimento $L \gg b$, e carga $+Q$, *coaxial* com uma casca cilíndrica de raio $b > a$, também condutora, e possuindo carga $-Q$. Tomando superfícies gaussianas cilíndricas de comprimento $l \ll L$, a lei de Gauss nos dá

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{q_{in}}{\epsilon_0}\dfrac{1}{(2\pi r l)}\hat{r} = \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\, r}\hat{r} & \textit{para } a < r < b \\ \\ 0 & \textit{em qualquer outro ponto.} \end{cases}, \tag{6.7.5}$$

onde λ é a carga por unidade de comprimento do cilindro. O potencial é

$$V = \int_+^- \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{b}{a}.$$

Portanto, a capacitância é

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\lambda\, L}{V} = \frac{2\pi\epsilon_0\, L}{\ln\frac{b}{a}}.$$

Capacitor esférico

O capacitor esférico é constituído por uma esfera metálica de raio a e carga $+Q$, concêntrica com uma *casca esférica* metálica de raio $b > a$ e carga $-Q$. Utilizando superfícies gaussianas esféricas e concêntricas com a esfera condutora, a lei de Gauss nos dá

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\,\epsilon_0\, r^2}\hat{r} & \textit{para } a < r < b \\ \\ 0 & \textit{em qualquer outro ponto.} \end{cases}$$

O potencial é

$$V = \int_+^- \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r^2} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{b-a}{a\,b}.$$

Portanto, a capacitância é

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0\frac{a\,b}{b-a}. \tag{6.7.6}$$

Note que a equação (6.7.1) é obtida da equação (6.7.6) tomando-se limite $b \to \infty$. Ou seja, quando o segundo condutor está a uma *distância infinita* do primeiro.

Energia eletrostática de um capacitor

Consideremos o processo de *transferência de carga* para um capacitor. Vamos imaginar que este processo seja subdividido em *diversas etapas*, tais que, em cada uma delas, uma quantidade de carga infinitesimal dq seja *lentamente transferida* desde o infinito, até o capacitor ($+dq$ para uma placa e $-dq$ para outra placa). Quando a carga do capacitor for q, o potencial será

$$V(q) = \frac{q}{C}. \tag{6.7.7}$$

Nesta situação, um agente externo (uma bateria, por exemplo) terá que realizar um trabalho

$$V(q)\, dq$$

para adicionar uma carga dq ao capacitor. Este trabalho é armazenado no capacitor sob a forma de energia

$$dU = V(q)\, dq = \frac{1}{C} q\, dq.$$

Deste modo, após ter sido carregado com uma carga Q, o capacitor possuirá uma energia total dada por

$$U = \int dU = \frac{1}{C} \int_0^Q q\, dq = \frac{Q^2}{2\, C}.$$

Usando $Q = C\, V$, podemos também expressar a energia do capacitor em termos do potencial V como

$$U = \frac{1}{2}\, C\, V^2. \tag{6.7.8}$$

Podemos também relacionar a energia diretamente com o *campo elétrico*. Para um capacitor de placas paralelas possuindo espaçamento d e área A, sabemos que $V^2 = E^2\, d^2$ e $C = \epsilon_0\, A/d$. Levando estas grandezas na equação (6.7.8), obtemos

$$U = \frac{\epsilon_0}{2}\, E^2\, (A\, d) = \frac{\epsilon_0}{2}\, E^2\, (volume). \tag{6.7.9}$$

É importante notar que a grandeza *volume* na expressão acima, é o volume da região do espaço onde *o campo elétrico é não nulo*. Podemos portanto introduzir uma *densidade de energia* u, do campo elétrico, dada por

$$u = \frac{dU}{dv} = \frac{\epsilon_0}{2}\, E^2. \tag{6.7.10}$$

Como um exemplo, vamos calcular a energia do campo eletrostático de uma esfera metálica de raio a, a partir da equação (6.7.10). Sabemos que para $r < a$, o campo elétrico é nulo. Logo, de acordo com a equação (6.7.10), não há densidade de energia dentro da esfera metálica. Em pontos do espaço situados a uma distância $r > a$ do centro da esfera, a densidade de energia é

$$u(r) = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{Q^2}{16\pi^2\, \epsilon_0^2} \frac{1}{r^4};\ \ r > a. \tag{6.7.11}$$

A quantidade de energia contida em uma casca esférica de espessura dr é

$$dU = u(r)\, 4\pi r^2\, dr = \frac{Q^2}{8\pi\, \epsilon_0} \frac{dr}{r^2};\ \ r > a.$$

Portanto, a energia contida em todo o espaço é

$$U = \frac{Q^2}{8\pi\,\epsilon_0}\int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\,\epsilon_0\,a}.$$

6.8 Oitava aula

6.8.1 Capacitores com dielétricos

Sabe-se empiricamente que *a capacitância aumenta* quando o capacitor é preenchido com um material *dielétrico*. Os primeiros a constatarem isto foram (independentemente) Faraday (1837) e Cavendish (1773). Todo dielétrico pode ser caracterizado por uma grandeza denominada *constante dielétrica*, denotada pela letra grega κ, definida por

$$\kappa = \frac{C}{C_0},$$

onde C e C_0 são as capacitâncias *de um mesmo capacitor* respectivamente com e sem dielétrico. Note que o valor mínimo $\kappa = 1$ ocorre no caso em que o capacitor está vazio, ou seja, $C = C_0$. O valor de κ a temperatura de $25\,C$ é $1,00059$ para o ar, $2,25$ para a parafina, $78,2$ para água destilada.

Quando um capacitor é carregado com carga Q e mantido isolado, de tal forma que sua carga não pode variar, a mudança da capacitância deve ser acompanhada de uma mudança do potencial entre as placas. De fato, como $Q = C\,V$ não muda, então

$$C_0\,V_0 = C\,V,$$

onde V_0 e V são os potenciais respectivamente antes e depois da introdução do dielétrico. Portanto, o novo potencial

$$V = \frac{C_0}{C}\,V_0 = \frac{1}{\kappa}\,V_0$$

diminui por um fator $\frac{1}{\kappa}$ em relação ao potencial V_0, na ausência do dielétrico.

6.8.2 Capacitores com dois dielétricos

A figura 6.31 mostra um capacitor carregado com carga Q e preenchido com dois dielétricos de constantes dielétricas κ_1 e κ_2 em regiões de larguras $(1-r)d$ e rd respectivamente. Qual é a capacitância resultante?

Este capacitor é *equivalente* ao mostrado na figura 6.32, onde foram introduzidas duas placas de cargas $\pm Q$ entre os dielétricos. Como nas regiões 1 e 2 os potencias são V_1 e V_2, então o potencial total é

$$V = V_1 + V_2.$$

Denotando por C_1 e C_2 as capacitâncias nas duas regiões, teremos

$$\frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}.$$

Logo,

$$C = \frac{C_1\,C_2}{C_1 + C_2}. \tag{6.8.1}$$

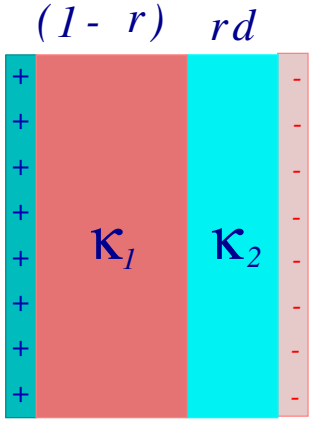


Figura 6.31: Capacitor com dois dielétricos

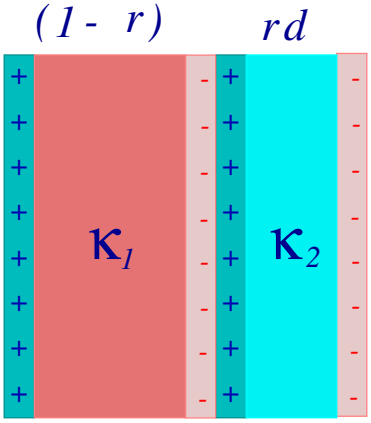


Figura 6.32: Configuracão equivalente

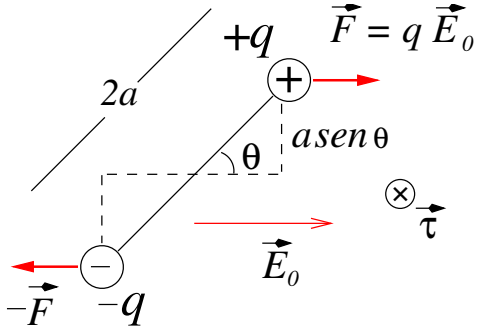


Figura 6.33: Interacão de um dipolo com o campo externo

Substituindo

$$C_1 = \kappa_1 \frac{\epsilon_0 A}{(1-r)\,d}$$

e

$$C_2 = \kappa_2 \frac{\epsilon_0 A}{r\,d}$$

em (6.8.1), teremos

$$C = C_0 \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_2 - r\,(\kappa_2 - \kappa_1)}$$

6.9 Nona aula

6.9.1 Descrição atômica do dielétrico

O campo elétrico $\vec{E}$, no interior de um meio dielétrico é diferente do campo $\vec{E}_0$ originalmente produzido pelas cargas das placas. Isto pode ser facilmente entendido, lembrando que

$$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{V_0}{\kappa} = -\frac{1}{\kappa} \int \vec{E}_0 \cdot d\vec{l}.$$

Ou seja,

$$\vec{E} = \frac{1}{\kappa}\vec{E}_0. \tag{6.9.1}$$

De acordo com o princípio de superposição, o campo $\vec{E}$ deve ser a soma de $\vec{E}_0$, com *outro campo*. Qual é a fonte deste outro campo?

Sendo o dielétrico completamente neutro, a única possibilidade (ou a possibilidade mais simples) é que suas *moléculas* constituem *dipolos* permanentes, ou *induzidos* pela ação do campo elétrico. Este efeito de *polarização* ocorre porque, sob a ação do campo elétrico, as cargas negativas (elétrons) deslocam-se em relação às cargas positivas (prótons). A somatória dos campos de todos estes dipolos moleculares, dá origem à um *campo médio induzido* $\vec{E}_i$, que somado à $\vec{E}_0$, resulta no campo total $\vec{E}$.

Para que possamos obter uma descrição mais *quantitativa* da natureza do campo induzido $\vec{E}_i$, precisamos entender de que maneira os dipolos se configuram dentro do dielétrico. A interação de um único dipolo com o campo $\vec{E}_0$ está esboçada na figura 6.33 O dipolo está sujeito à um *torque* $\vec{\tau}$, cujo módulo é

$$\tau = 2a\,\mathrm{sen}\theta\, F = 2aq\, E_0 \mathrm{sen}\theta = p\, E_0 \mathrm{sen}\theta = \left|\vec{p} \times \vec{E}_0\right|,$$

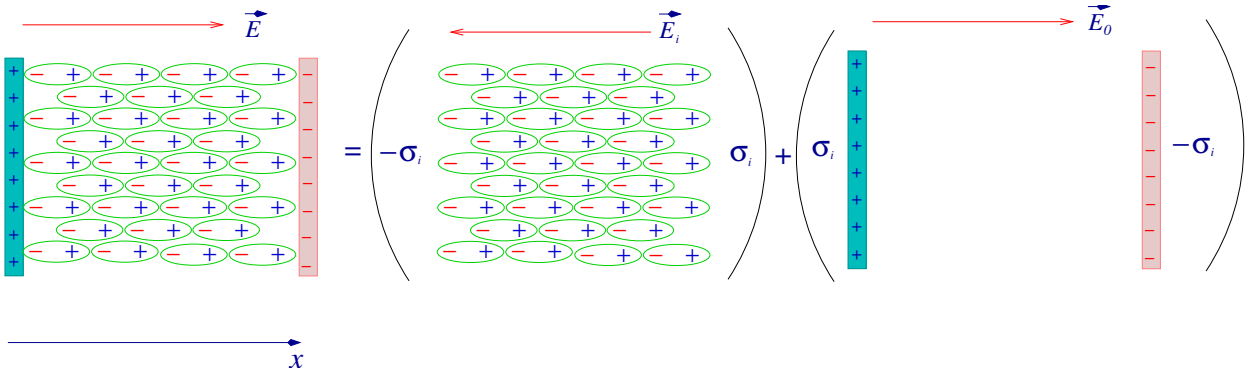


Figura 6.34: Dipolos no interior de um dielétrico

onde usamos a expressão para o *momento de dipolo* dada por (6.1.7).

Quando um agente externo gira um dipolo um ângulo $d\theta$, ele realiza um trabalho

$$dW = \tau\, d\theta.$$

Este trabalho acarreta uma variação da energia potencial do sistema campo-dipolo, dada por

$$U - U_0 = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau\, d\theta = p\, E \int_{\theta_0}^{\theta} \text{sen}\theta\, d\theta = -pE\,(\cos\theta - \cos\theta_0)\,. \tag{6.9.2}$$

Portanto, a energia potencial do dipolo é

$$U = -\vec{p}\cdot\vec{E} + constante.$$

Na situação de *equilíbrio*, a energia potencial é *mínima*. Ou seja,

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{d\theta} &= 0 \\[2ex] \dfrac{d^2U}{d\theta^2} &> 0. \end{cases}$$

Usando a equação (6.9.2), obtém-se facilmente que a solução para estas duas condições é $\theta = 0$, ou seja, o dipolo $\vec{p}$ de cada molécula fica *alinhado* na mesma direção e sentido do campo aplicado $\vec{E}_0$.

A figura 6.34 ilustra o efeito do alinhamento dos dipolos no interior de um dielétrico que está dentro de uma capacitor de placas paralelas. Observe que o *efeito líquido* do alinhamento dos dipolos é a produção de um campo *elétrico induzido* $\vec{E}_i$. Este campo superpõe-se ao campo $\vec{E}_0$, resultando em um campo total

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i = (E_0 - E_i)\,\hat{i}. \tag{6.9.3}$$

Ao campo induzido $\vec{E}_i$, está associada uma *densidade de carga induzida*, na superfície do dielétrico. Esta relação pode ser facilmente obtida aplicando-se a lei de Gauss como mostra a figura 6.35. Utilizando-se uma superfície gaussiana de área A, teremos

$$E_i\, A = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_i\, A}{\epsilon_0}.$$

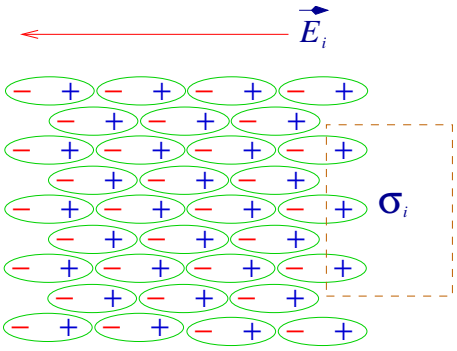


Figura 6.35: Superfície gaussiana para o dielétrico anterior

Portanto,

$$E_i = \frac{\sigma_i}{\epsilon_0}. \tag{6.9.4}$$

Substituindo (6.9.4) em (6.9.3) e utilizando ainda

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \tag{6.9.5}$$

bem como a relação (6.9.1), obtém-se facilmente a relação

$$\sigma_i = \sigma \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right). \tag{6.9.6}$$

Observe que quanto maior for a constante dielétrica κ, maior será a carga induzida σ_i.

As densidades de cargas σ_i e σ na equação (6.9.6) recebem o nome de *cargas de polarização* e *cargas livres*, respectivamente.

6.10 Décima aula

O vetor $\vec{P}$ (polarização dielétrica)

Se existirem N moléculas por unidade de volume do dielétrico, e cada uma possui um momento de dipolo $q\,\vec{\delta}$ (δ é a separação entre a carga positiva e negativa), então o *momento de dipolo por unidade de volume* é

$$\vec{P} = N\,q\,\vec{\delta}. \tag{6.10.1}$$

Consideremos o caso mais simples em que $\vec{P}$ tem o mesmo valor em todos os pontos do material dielétrico. Neste caso, a média espacial da quantidade de carga em qualquer volume é sempre nula. No entanto, na *superfície* do dielétrico sabemos que existe uma densidade superficial de cargas de polarização σ_i. Vejamos agora como relacionar $\vec{P}$ com a densidade σ_i. O número de cargas negativas que atravessam uma superfície de área A é igual ao produto de N pelo volume $\delta\,A$ (estamos assumindo que o deslocamento das cargas se dá na direção normal à superfície). A carga é obtida multiplicando-se o número de cargas por q. Finalmente, a densidade superficial é obtida dividindo-se pela área A. Deste modo, obtemos

$$\sigma_i = N\,q\,\delta.$$

Comparando a equação acima com (6.10.1), vemos que a densidade superficial de cargas é igual à polarização P no interior do material dielétrico. Ou seja,

$$\sigma_i = P. \tag{6.10.2}$$

Podemos agora expressar o campo total $\vec{E}$ no interior do material dielétrico, em termos da densidade de cargas livres σ e da polarização $\vec{P}$. Substituindo as equações (6.9.4) e (6.9.5) na equação (6.9.3) e usando a equação (6.10.2), podemos escrever

$$\epsilon_0 E = \sigma - \sigma_i = \sigma - P \tag{6.10.3}$$

A relação (6.10.3) é um caso especial de

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P},$$

onde $\vec{D}$ é denominado *deslocamento elétrico*. No caso do capacitor plano, $D = \sigma$. Para uma apresentação um pouco mais detalhada, veja as notas em *os três vetores elétricos*.

Para determinarmos o campo total $\vec{E}$ no interior do dielétrico, resta saber quanto vale $\vec{P}$. Em situações em que $\vec{P}$ depende *linearmente* do *campo total* $\vec{E}$, podemos escrever

$$\vec{P} = \chi \, \epsilon_0 \, \vec{E}, \tag{6.10.4}$$

onde a constante χ é denominada *susceptibilidade elétrica*. Substituindo (6.10.4) na equação (6.10.3), teremos

$$\epsilon_0 E = \sigma \frac{1}{1+\chi}.$$

Finalmente, usando a equação (6.9.1) obtemos a seguinte relação entre a constante dielétrica e a susceptibilidade

$$\kappa = 1 + \chi.$$

Para um tratamento bastante completo das propriedades dos dielétricos, recomendamos o capítulo 10 e 11 da referência [6].

6.11 Décima Primeira Aula

6.11.1 Corrente elétrica

Iniciaremos o estudo dos fenômenos envolvendo *cargas em movimento*, definindo a grandeza denominada *corrente elétrica*, como sendo a quantidade de carga que atravessa uma dada superfície por unidade de tempo. A corrente elétrica *instantânea* é

$$I = \frac{dQ}{dt}. \tag{6.11.1}$$

A unidade de corrente no sistema internacional (SI) é o ampère (A). Um ampère corresponde à uma taxa de um coulomb por segundo. Quantos elétrons passam durante um segundo em uma corrente de um ampère? Sendo N o número de elétrons, teremos

$$\frac{1C}{1s} = N \times 1,6 \times 10^{-19} \frac{C}{s}. \tag{6.11.2}$$

Portanto, $N = 6,2 \times 10^{18}$.

Embora em condutores metálicos a corrente seja devida ao movimento dos elétrons, convenciona-se que o *sentido da corrente* é oposto ao movimento das cargas negativas.

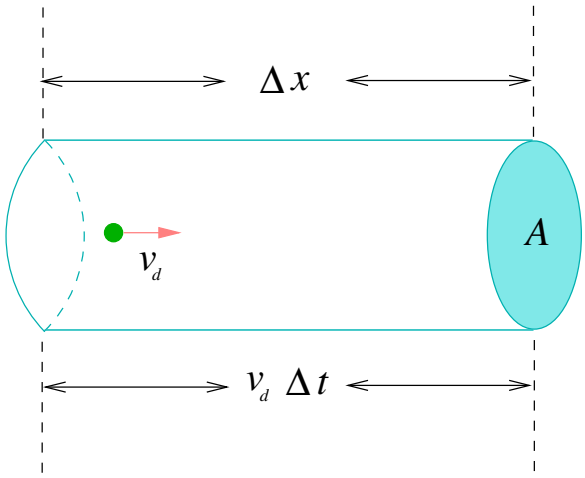


Figura 6.36: Velocidade de migração

Velocidade de migração

A figura 6.36 mostra um instantâneo de um volume cilíndrico contento cargas elétricas que se deslocam todas com *velocidade de migração* $\vec{v}_d$. A corrente elétrica é o resultado deste *movimento coletivo* das cargas elétricas. A quantidade de carga contida neste volume é

$$\Delta Q = n\,q\,A\,\Delta x, \tag{6.11.3}$$

onde n é o número de *portadores de carga* por unidade de volume e q é a carga de cada portador. Após um intervalo de tempo $\Delta t = \Delta x/v_d$, toda a carga contida no volume cilíndrico terá atravessado a área A. Este movimento dá origem à uma corrente

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{n\,q\,A\,\Delta x}{\Delta x/v_d} = n\,q\,A\,v_d. \tag{6.11.4}$$

É interessante compararmos a velocidade de migração em um material típico, como o cobre, com a velocidade térmica dos elétrons à temperatura ambiente, que é de cerca de $v_T \approx 10^6\,m/s$. Em uma corrente de $1\,A$ num fio de cobre ($n = 8,5 \times 10^{28}\,m^{-3}$) de $2\,mm$ de raio, teremos da equação (6.11.4)

$$v_d = \frac{1}{n\,A\,q} = \frac{1}{(8,5 \times 10^{28})(4 \times \pi \times 10^{-6})(1,6 \times 10^{-19}} \approx 5,9 \times 10^{-6} \tag{6.11.5}$$

Vemos que a velocidade de migração constitui uma ínfima fração da velocidade térmica dos elétrons; $v_d/v_T \approx 10^{-12}$.

6.11.2 Densidade de corrente

A corrente atravessando um elemento de superfície de área da com normal $\hat{n}$ pode ser obtida a partir do *vetor densidade de corrente* $\vec{J}$ como

$$dI = \vec{J} \cdot \hat{n} da. \tag{6.11.6}$$

Vemos que a corrente é obtida calculando-se o fluxo do vetor densidade de corrente.

Podemos agora relacionar a densidade de corrente com a velocidade de migração obtida na seção anterior. Usando a equação (6.11.4) para a área infinitesimal da, teremos

$$\begin{array}{rcl} dI & = & n\,q\,da\,v_d \\ \vec{J}\cdot\hat{n}\,da & = & n\,q\,da\,v_d. \end{array} \tag{6.11.7}$$

Portanto,

$$\vec{J}\cdot\hat{n} = n\,q\,v_d. \tag{6.11.8}$$

Note que a velocidade de migração foi tomada no mesmo sentido e direção do vetor $\hat{n}$. Portanto, em geral, podemos escrever

$$\vec{J} = n\,q\vec{v}_d. \tag{6.11.9}$$

6.11.3 Relação entre $\vec{J}$ e $\vec{E}$ (Lei de Ohm)

O movimento coletivo das cargas, com velocidade $\vec{v}_d$, deve-se à um campo elétrico, aplicado por algum agente externo (uma bateria, por exemplo). A resposta do meio material constitui uma relação em $\vec{J}$ e $\vec{E}$, que vai depender da natureza do meio material condutor. (Temos aqui uma situação análoga à que encontramos no caso de um dielétrico que responde com uma polarização $\vec{P}$ ao campo elétrico existente no meio material).

Para diversos meios isotrópicos, líquidos e sólidos (mas não para gases), vale a *Lei de Ohm*, (formulada em 1826 em analogia com a lei de condução de calor).

$$\vec{J} = \sigma\vec{E}, \tag{6.11.10}$$

onde σ é a *condutividade elétrica do material*

6.11.4 Resistência

Consideremos um fio condutor com área de seção A, como mostra a figura 6.36. Admitindo que exista um campo elétrico aplicado, o qual atuará sobre as cargas deste condutor, gostaríamos de determinar a relação entre a *corrente elétrica* produzida e a *diferença de potencial* entre dois pontos quaisquer do fio, separados por uma distância l. Sabemos que a diferença de potencial é

$$V = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = E\int_0^l \mathrm{d}x = E\,l. \tag{6.11.11}$$

Em se tratando de um material para o qual seja válida a lei de Ohm então o campo elétrico na equação acima pode ser obtido da equação (6.11.10), resultando em

$$V = \frac{l\,J}{\sigma}, \tag{6.11.12}$$

sendo σ a condutividade do material e J a intensidade do vetor densidade de corrente que atravessa a seção de área A. Logo, usando a equação (6.11.6), teremos

$$V = \frac{l}{\sigma\,A}I. \tag{6.11.13}$$

Temos então uma relação linear entre a diferença de potencial e a corrente que está fluindo no fio condutor. As características intrínsecas ao material (sua geometria e condutividade σ) definem, neste caso, a resistência do fio

$$R_{fio} \equiv \frac{l}{\sigma\,A}. \tag{6.11.14}$$

É claro que a relação

$$V = R\,I \tag{6.11.15}$$

permanece sendo válida para um objeto de forma qualquer, que obedeça a lei de Ohm.

6.11.5 Modelo para condução elétrica

A condutividade σ pode ser calculada a partir das propriedades microscópicas dos materiais, ou seja, levando-se em conta a dinâmica dos portadores de carga. No entanto, para obter o valor correto de σ deveríamos utilizar a *Mecânica Quântica*. Mesmo assim, vale a pena insistir em um tratamento não quântico, com o intuito de esclarecer o conceito físico de condutividade e também para exemplificar como um modelo é construido e suas conseqüências são julgadas.

A idéia central do modelo para condução elétrica é que o sólido contem *elétrons livres* como portadores de carga. Uma característica intrínseca de cada material é a *densidade de elétrons livres*, n. Este número é responsável pelas diferentes propriedades de *condutores, isolantes ou semicondutores*. O modelo pressupõe que os elétrons livres formem um gás de partículas independentes em equilíbrio térmico a temperatura T. Uma corrente é produzida quando um campo elétrico aplicado força os elétrons a se movimentarem. Mas as *colisões* com os átomos ou íons que formam a rede cristalina do sólido fazem com que a velocidade dos elétrons seja diminuída. Neste modelo, um dado portador de carga q move-se entre duas colisões com velocidade

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\,t = \vec{v}_0 + \frac{q\vec{E}}{m}\,t \tag{6.11.16}$$

Tomando a média sobre todos os possíveis valores de v_0 e t e levando em conta que os valores médios de v_0, $\vec{v}$ e t são respectivamente 0 (distribuição aleatória), $\vec{v}_d$ (velocidade de migração) e τ (tempo médio entre colisões), podemos escrever

$$\vec{v}_d = \frac{q\vec{E}}{m}\,\tau. \tag{6.11.17}$$

Utilizando a relação entre a velocidade de migração e a densidade de corrente, dada pela equação (6.11.8), teremos

$$\begin{array}{rcccl} J & = & nqv_d & = & \sigma E \\ & = & n\frac{q^2E}{m}\tau & = & \end{array}, \tag{6.11.18}$$

ou seja,

$$\sigma = \frac{nq^2}{m}\tau. \tag{6.11.19}$$

É conveniente definir a grandeza *resistividade*, como

$$\rho \equiv \frac{1}{\sigma} = \frac{m}{nq^2}\frac{1}{\tau}. \tag{6.11.20}$$

Expressando o inverso do tempo médio como a razão entre a velocidade térmica média $\bar{v}$ e o livre caminho médio d, teremos

$$\rho = \frac{m}{nq^2}\frac{\bar{v}}{d}. \tag{6.11.21}$$

Medidas da velocidade térmica v_d para o cobre a temperatura ambiente dão resultados mais de 10 vezes maiores do que o valor previsto pelo modelo. Um estimativa clássica para dependência de $\bar{v}$ com a temperatura resultaria em (usando $1/2mv_d^2 = 3/2kT$, onde k é a constante de

Boltzmann) $\rho v \sim \sqrt{T}$. No entanto, sabe-se que nos metais puros a resistividade varia linearmente com a temperatura. Na verdade, sabe-se experimentalmente que $\bar{v}$ é praticamente independente da temperatura e que $1/d$ depende linearmente da temperatura.

Na teoria quântica os elétrons se comportam como ondas que se espalham na estrutura de rede cristalina do material e não como um gás clássico de partículas não interagentes. Utilizando o formalismo da Mecânica Quântica, podemos mostrar que em uma rede cristalina sem vibrações ou impurezas os elétrons se deslocariam sem qualquer resistência. A resistividade aparece como conseqüência de efeitos térmicos (fazendo a rede vibrar) ou de interações com as impurezas. Em altas temperaturas a resistividade é dominada pelas vibrações térmicas, enquanto em baixas temperaturas são as impurezas que produzem o efeito de resistividade.

6.11.6 Energia e potência elétrica

Correntes elétricas são produzidas em condutores pela ação de um campo elétrico aplicado, por exemplo, por uma bateria. Neste caso, a energia química da bateria está sendo transformada em energia cinética dos portadores de carga. A resistência do condutor, por sua vez, transforma a energia mecânica em *energia térmica*. Ou seja, como em qualquer processo onde há atrito, a energia é dissipada na forma de calor. A dissipação de energia no resistor é denominada *efeito Joule*

Vamos idealizar uma situação simples, onde há somente uma diferença de potencial V entre as extremidades do condutor (uma bateria, por exemplo) e um resistor dissipando a energia. Consideremos uma quantidade de carga

$$\mathrm{d}q = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = I\,\mathrm{d}t$$

atravessando uma diferença de potencial V. Neste processo há um trabalho realizado

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}qV = I\,\mathrm{d}tV.$$

Portanto, a *potência* é

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = I\,V. \tag{6.11.22}$$

Não havendo variação da corrente (a velocidade das cargas não varia), a potência P é totalmente dissipada no resistor.

A equação (6.11.22) é válida em geral, mesmo para resistores que não obedecem a lei linear de Ohm, sendo uma conseqüência direta da lei de conservação de energia (primeira lei da termodinâmica). Para os casos especiais de materiais que obedecem à lei de Ohm, podemos utilizar a relação $V = R\,I$ em (6.11.22), resultando em

$$P = R\,I^2 \tag{6.11.23}$$

ou ainda

$$P = \frac{V^2}{R}. \tag{6.11.24}$$

A aplicação de uma ou outra das duas equações acima depende do problema específico em consideração.

6.12 Décima Segunda Aula

6.12.1 Força eletromotriz

Por razões históricas a *fonte de energia* que faz os elétrons se moverem em um *circuito* elétrico é denominada *fonte de força eletromotriz* (*fem*). Exemplos de fontes fem:

- Energia química (bateria).
- Energia luminosa (bateria solar).
- Diferença de temperatura (termo-par).
- Energia mecânica (queda d'agua).
- Energia Térmica:
  - Queima de carvão.
  - Queima de óleo combustível.
  - Reações nucleares.

Utilizaremos o termo "bateria" de maneira genérica, para designar qualquer fonte de fem. Inicialmente vamos considerar somente situações para as quais a fem não varia como uma função do tempo. Neste caso, veremos que a corrente produzida no circuito pode ou não variar com o tempo. Se a corrente for também constante, temos uma situação de estado estacionário com uma *corrente contínua* fluindo no circuito.

Circuitos

Um *circuito* é um conjunto de dispositivos, tais como resistores e capacitores conectados por fios condutores idealmente sem resistência (ou qualquer outra propriedade que seja característica dos elementos do próprio circuito). Na figura 6.37, é mostrado o esquema básico de um circuito simples possuindo somente uma fonte de fem e um resistor. Este esquema pode estar representando, por exemplo, uma bateria (fem) ligada à uma lâmpada (R).

A função da "Bateria"

Uma bateria (no sentido genérico mencionado anteriormente) nada mais é que um dispositivo que utiliza energia para "bombear" cargas, analogamente a uma bomba d'água que impulsiona a água de um poço, vencendo a força gravitacional. Quando é ligada a um circuito, como na figura 6.37, uma corrente flui do terminal positivo (maior potencial elétrico) para o negativo (menor potencial elétrico). A diferença de potencial entre os terminais é denominada *voltagem de terminal*. A quantidade de corrente que flui, depende dos outros componentes do circuito da mesma forma que a quantidade de água que flui em uma rede hidráulica depende da espessura dos encanamentos, etc. No presente caso, a resistência R vai determinar a corrente I. A corrente é formada pelo movimento dos elétrons que estão sendo atraidos para o terminal positivo da bateria (lembre-se que a corrente é definida pelo movimento oposto ao dos elétrons).

Suponha que o mecanismo interno da bateria realize um trabalho $\mathrm{d}W$ para mover uma quantidade $\mathrm{d}q$ de carga positiva do terminal negativo para o positivo. Então a fem da bateria é definida como

$$\mathcal{E} \equiv \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}q} \tag{6.12.1}$$

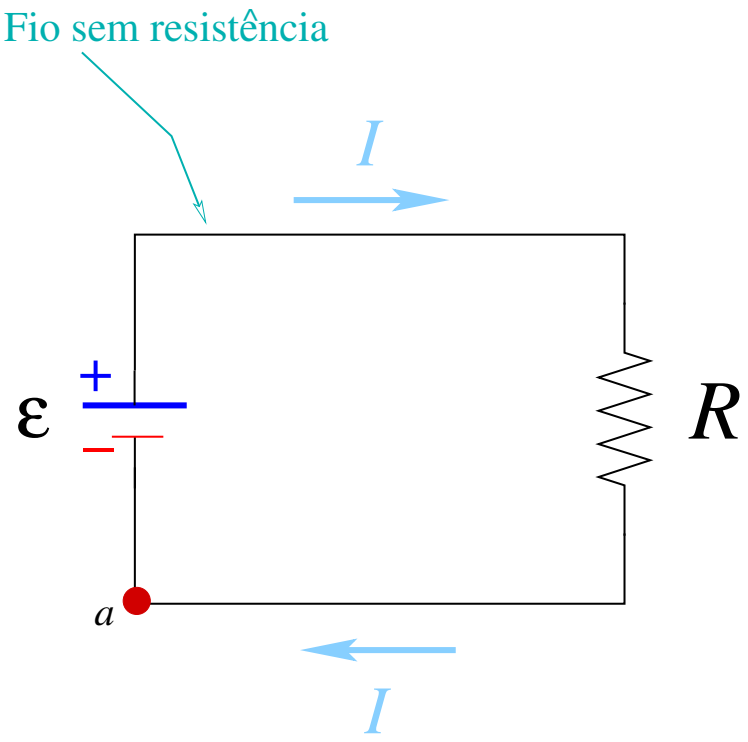


Figura 6.37: Circuito com uma resistência

ou seja, a fem é a energia por unidade de carga que é fornecida pela fonte de energia. No sistema de unidades MKS, $\mathcal{E}$ tem unidade de volt. Algumas vezes utiliza-se de maneira imprecisa o termo *voltagem* referindo-se à fem. No entanto, esta denominação é mais apropriada para se referir à diferença de potencial entre os terminais da bateria, a qual pode ser diferente de $\mathcal{E}$.

Para determinar quantitativamente a corrente que flui no circuito, consideremos o esquema esboçado na figura 6.37. Iniciando no ponto a e seguindo o sentido da corrente I, teremos um *aumento* de uma quantidade $\mathcal{E}$ do potencial ao passar do terminal negativo para o terminal positivo da bateria (não há variação de potencial ao atravessarmos os fios de resistência nula). Ao atravessar a resistência R (que estamos supondo ômica), o potencial *diminui* de uma quantidade $I\,R$. À esta queda de potencial está associada uma diminuição da energia potencial das cargas (a energia potencial está sendo convertida em energia térmica no resistor). Lembrando que o potencial elétrico é derivável de uma *força conservativa*, o trabalho realizado para transportar uma carga em um circuito fechado, é zero. Logo, a variação total de potencial correspondente deve ser também igual a zero. Portanto, devemos ter

$$\mathcal{E} - I\,R = 0. \tag{6.12.2}$$

Ou seja,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \tag{6.12.3}$$

Resistência interna da "Bateria"

Sabemos que uma pilha comum ou uma bateria de automóvel produz algum aquecimento quando está em operação. Na verdade, qualquer mecanismo de "bombeamento de cargas" possui uma

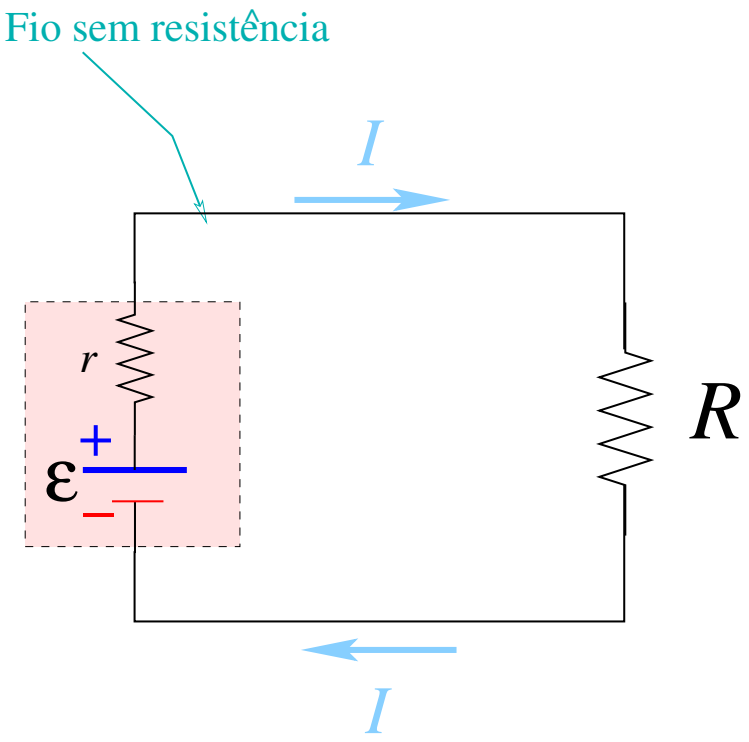


Figura 6.38: Resistência interna de uma bateria

resistência interna r como está esquematizado na figura 6.38. Calculando a diferença de potencial total em um circuito fechado, como fizemos acima, teremos

$$\mathcal{E} - I\,r - I\,R = 0 \tag{6.12.4}$$

Note que agora utilizamos

$$V = \mathcal{E} - I\,r \tag{6.12.5}$$

para a diferença de potencial V entre os terminais da bateria. Assim, a corrente depende também da resistência interna da bateria, sendo dada por

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R} \tag{6.12.6}$$

Observe que podemos medir $\mathcal{E}$ diretamente, fazendo com que a corrente no circuito seja igual a zero. Neste caso, a equação (6.12.5) nos dá $V = \mathcal{E}$, onde V é a diferença de potencial que é medida entre os terminais da bateria. Para que a corrente I seja igual a zero, podemos tomar uma resistência R muito grande (o medidor da voltagem V deve ter resistência idealmente igual a infinito).

6.12.2 Circuitos RC

A figura 6.39 mostra dois circuitos possuindo uma bateria produzindo uma diferença de potencial $\mathcal{E}$ (com resistência interna nula), um resistor R, uma chave S e um *capacitor* C. Este circuito é denominado *circuito RC*. Na primeira figura a chave está aberta e o capacitor descarregado. A

segunda figura representa a configuração do circuito após a chave S ter sido ligada. Vamos supor que a chave foi ligada no instante de tempo $t = 0$. Considerando as variações parciais da energia potencial de uma quantidade de carga $\mathrm{d}q$, em seu percurso no circuito fechado $a \to b \to c \to d \to a$, e igualando a soma destas variações a zero, teremos,

$$\mathrm{d}q\,(V_b - V_a) + \mathrm{d}q\,(V_d - V_c) + \mathrm{d}q\,(V_a - V_d) = 0. \tag{6.12.7}$$

Usando $(V_b - V_a) = \mathcal{E}$, $(V_d - V_c) = -R\,I(t)$ e $(V_a - V_d) = -\frac{q(t)}{C}$, obtemos a equação básica do circuito RC

$$\mathcal{E} - R\,I(t) - \frac{q(t)}{C} = 0 \tag{6.12.8}$$

A equação acima determina a carga q no capacitor e a corrente I para qualquer instante de tempo. De acordo com as *condições iniciais* descritas acima, no instante $t = 0$, temos $q = 0$ (capacitor descarregado). Portanto, a equação (6.12.8) nos dá para a corrente em $t = 0$,

$$I(t = 0) \equiv I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}. \tag{6.12.9}$$

Quando o capacitor estiver *completamente carregado*, não haverá mais corrente no circuito (caso contrário o capacitor *ainda* estaria sendo carregado). Portanto, a *carga máxima* no capacitor é, de acordo com a equação (6.12.8) com $I(t) = 0$,

$$q_max \equiv Q = C\mathcal{E}. \tag{6.12.10}$$

A taxa de aumento de carga no capacitor deve ser igual à corrente (conservação de carga) no circuito, ou seja,

$$I = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{6.12.11}$$

Substituindo a equação acima em (6.12.8), teremos

$$\mathcal{E} - R\,\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} - \frac{q(t)}{C} = 0. \tag{6.12.12}$$

Vamos resolver a *equação diferencial* acima. Primeiramente, observe que esta equação pode ser equivalentemente escrita como

$$-\,RC\frac{\mathrm{d}\,(q(t) - \mathcal{E}C)}{\mathrm{d}t} - (q(t) - \mathcal{E}C) = 0. \tag{6.12.13}$$

Temos portanto uma equação mais simples

$$\frac{\mathrm{d}\bar{q}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{RC}\bar{q} \tag{6.12.14}$$

para a nova variável

$$\bar{q} \equiv q - \mathcal{E}C. \tag{6.12.15}$$

Reescrevendo a equação (6.12.14) como

$$\frac{\mathrm{d}\bar{q}}{\bar{q}} = -\frac{1}{RC}\mathrm{d}t \tag{6.12.16}$$

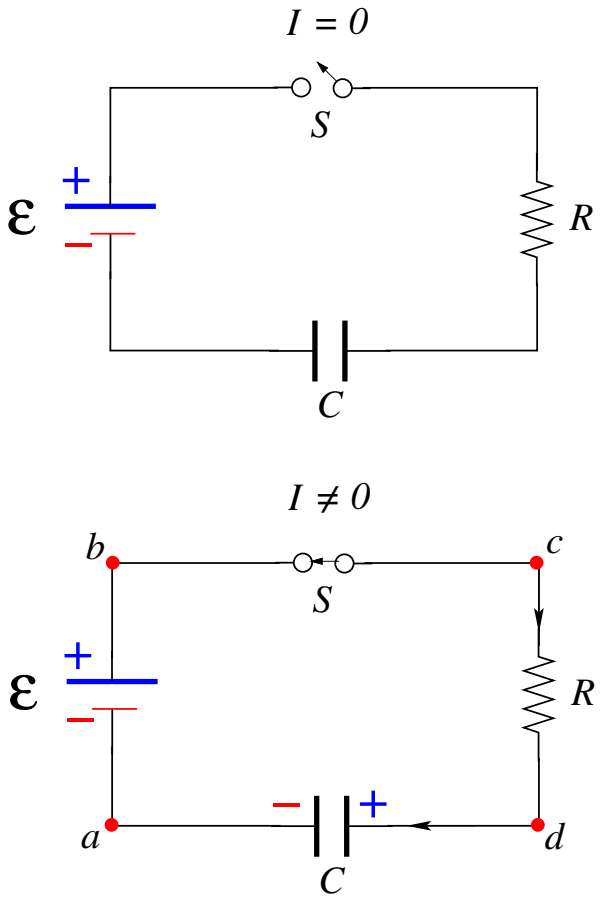


Figura 6.39: Circuito RC

e integrando desde $t = 0$ até um instante qualquer t,

$$\begin{aligned} \int_{\bar{q}_0}^{\bar{q}} \frac{\mathrm{d}\bar{q}}{\bar{q}} &= -\frac{1}{RC}\int_0^t \mathrm{d}t' \\ \ln\left(\frac{\bar{q}}{\bar{q}_0}\right) &= -\frac{t}{RC}. \end{aligned} \tag{6.12.17}$$

Portanto,

$$\bar{q}(t) = \bar{q}_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \tag{6.12.18}$$

Finalmente, usando a equação (6.12.15), obtemos o seguinte resultado para a carga no capacitor em função do tempo

$$q(t) = \mathcal{E}C\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right). \tag{6.12.19}$$

Derivando a equação acima em relação ao tempo, teremos a corrente no circuito dada por

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}. \tag{6.12.20}$$

A figura 6.40 mostra os gráficos da carga no capacitor e da corrente no circuito. A unidade de tempo utilizada é a *constante de tempo* do circuito RC, definida como

$$\tau \equiv RC. \tag{6.12.21}$$

A carga no capacitor está em unidades de $\mathcal{E}C$ e a corrente em unidades de I_0.

6.13 Décima Terceira Aula

6.13.1 O campo magnético

A força magnética manifesta-se de maneira bastante evidente em diversas situações. Assim como a gravitação e a eletrostática, a força magnética produzida por imãs naturais ou artificiais, é também observada comummente na escala macroscópica. Na Grécia antiga, já haviam descoberto que pequenos pedaços de ferro podiam ser atraidos por uma material chamado *magnetita* ($Fe_3\,O_4$). Em 1100 A.C. os chineses já haviam utilizado a magnetita para construir uma bússola. William Gilbert, em 1600, sugeriu que tanto a magnetita como a Terra comportam-se como um *imã permanente*.

O estudo dos fenômenos magnéticos (magnetismo) passou a estar associado à eletricidade a partir de 1820, quando Ampère combinou seus experimentos com os realizados por Örsted para mostrar o aparecimento de efeitos magnéticos toda vez que *cargas elétricas* estão em movimento. Por volta de 1820, Faraday desvendou a relação entre eletricidade e magnetismo. Finalmente, em 1860 Maxwell realizou a síntese definitiva da eletricidade e do magnetismo, possibilitando o entendimento da luz e de outras *ondas eletromagnéticas*.

Imãs e campos magnéticos

Quando dois imãs são aproximados, pode ocorrer uma força de atração, de repulsão ou um torque. Por convenção, a extremidade do imã que é atraida para o sul geográfico da terra é rotulada de sul (S) e a outra de norte (N). Se realizarmos experimentos com dois imãs rotulados desta maneira, observaremos que o pólos iguais se repelem e pólos distintos se atraem. Note que, de acordo com a convenção adotada, o sul geográfico da Terra é na verdade o pólo norte de um imã.

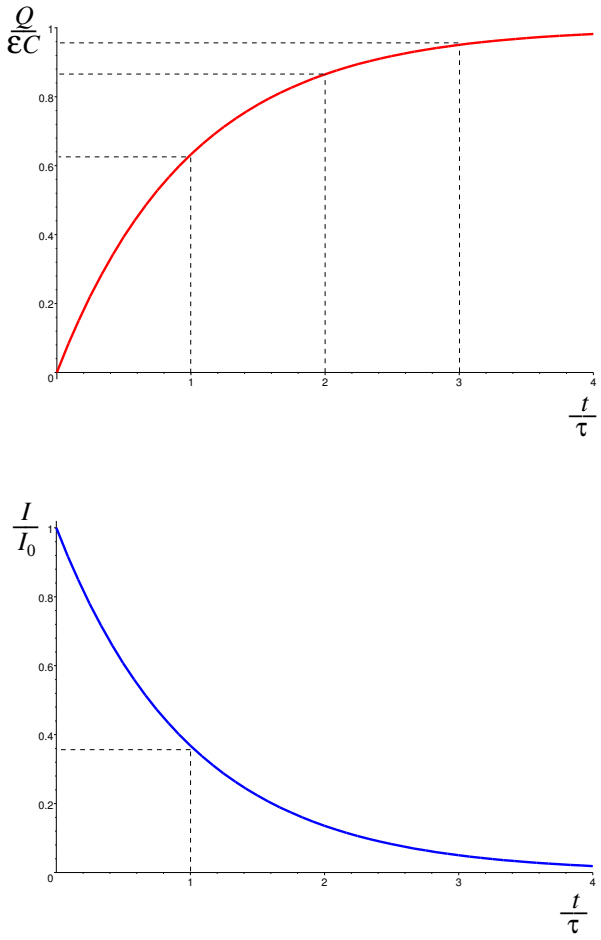

$\frac{Q}{\varepsilon C}$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
1
2
3
4
$\frac{t}{\tau}$
$\frac{I}{I_0}$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
1
2
3
4
$\frac{t}{\tau}$

Figura 6.40:

A interação entre pólos N e S parece semelhante à interação eletrostática entre cargas positivas e negativas. Entretanto, enquanto um dipolo elétrico pode ser quebrado em uma carga positiva e negativa, o mesmo não ocorre para um imã. O dipolo magnético não pode ser separado em dois pedaços, um possuindo somente N e outro somente S. Quando um imã é quebrado em dois, cada um dos pedaços constitui um dipolo N-S. Até o presente, não se descobriu nenhum constituinte da matéria possuindo as propriedades de um *monopolo magnético*. A inexistência de monopolos magnéticos é um *fato experimental* de fundamental importância no eletromagnetismo.

Da mesma maneira que a interação entre cargas elétricas é descrita em termos de um campo elétrico, também a interação entre os dipolos magnéticos é mediada por um *campo magnético* que propaga-se por todo o espaço. Este campo é denotado pelo símbolo $\vec{B}$. Em geral, semelhantemente ao campo elétrico, em cada ponto do espaço $\vec{B}$ aponta em uma direção diferente.

O vetor $\vec{B}$ associado à um dipolo magnético pode ser mapeado utilizando-se um *dipolo de prova*, semelhantemente à carga de prova utilizada para mapear o campo elétrico. Quando colocamos o dipolo de prova em uma região onde há campo magnético, ele gira orientando seu eixo N-S na direção do campo magnético. Assim por exemplo, se quisermos mapear o campo magnético da Terra, devemos percorrer o espaço a sua volta, munidos de uma bússola, e observar a orientação N-S da bússola em cada ponto (estamos considerando uma bússola que possa girar em torno de um único ponto, e apontar em todas as direções do espaço). Um outro experimento simples que permite visualizar as linhas de campo magnético consiste em espalhar pequenos limalhas de ferro (por exemplo, fragmentos de um esponja de aço) sobre uma folha de papel colocada encima de um imã. Cada pedacinho de ferro comporta-se como um pequeno imã (uma "bússola") que será girado pelo campo magnético. A orientação dos diversos pedaços de ferro nos dá uma idéia da projeção das linhas do campo $\vec{B}$ ao longo da superfície plana do papel. Em regiões onde a densidade de limalhas é maior, o campo $\vec{B}$ é mais intenso (maior densidade de linhas de campo). A convenção utilizada para o sentido de $\vec{B}$ é tal que as linhas de $\vec{B}$ saem de N e entram em S. A figura abaixo mostra um esboço das linhas do campo $\vec{B}$ produzido por um imã em forma de barra.

6.13.2 Força magnética

Além de agir sobre outro imã, o campo $\vec{B}$ também exerce forças sobre *cargas elétricas*. Podemos nos convencer facilmente disto, aproximando um imã de um tubo de imagem de um aparelho de televisão e observando a distorção que é produzida na imagem (**este experimento pode danificar seu aparelho de televisão; é mais aconselhável utilizar um osciloscópio de laboratório**). Neste caso, o feixe de elétrons que está se movendo em relação à tela é desviado pela ação de $\vec{B}$.

A fim de descrever detalhadamente a força magnética, consideremos uma região do espaço onde existe um campo $\vec{B}$ orientado na direção do eixo $+y$, e uma *carga positiva* q, suficientemente pequena. Os seguintes fenômenos são observados:

- Se a carga estiver em repouso em relação as linhas de campo, não haverá força sobre ela.
- Se a carga se mover na direção $+z$ com velocidade v, a força $\vec{F}$ sobre ela será na direção $-x$ com módulo proporcional à velocidade v.
- Se a carga se mover na direção $+x$, $\vec{F}$ estará na direção $+z$, sendo novamente proporcional à v.
- Se a carga se mover na direção y (mesma direção de $\vec{B}$), $\vec{F}$ será nula.

- Se a carga se mover em uma direção qualquer, a força $\vec{F}$ será proporcional à componente de $\vec{v}$ *perpendicular* à $\vec{B}$ e terá a direção perpendicular ao plano formado por $\vec{v}$ e $\vec{B}$. Esta propriedade engloba as quatro anteriores.
- $\vec{F}$ é proporcional ao módulo de $\vec{B}$.
- $\vec{F}$ é proporcional ao sinal e ao módulo de q.

Todas as propriedades acima estão sumarizadas na seguinte expressão

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}. \tag{6.13.1}$$

A grandeza $\vec{v} \times \vec{B}$ na expressão acima, representa o *produto vetorial* do vetor velocidade pelo vetor campo magnético. (Clique aqui para ver algumas animações mostrando a *regra da mão direita* para o produto vetorial). Se o ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{B}$ for θ o módulo de $\vec{F}_B$ será

$$F_B = q\, v\, B \,\mathrm{sen}\theta. \tag{6.13.2}$$

No sistema de unidades MKS a unidade de campo magnético é o *tesla* (T), em homenagem à Nikola Tesla por suas contribuições à tecnologia de geração de energia elétrica. Em termos das unidades anteriormente definidas, temos

$$1\,T = 1\frac{kg}{C\,s}. \tag{6.13.3}$$

Uma outra unidade frequentemente utilizada é o *gauss* (G); $1\,T = 10^4\,G$. Na tabela abaixo são mostrados alguns valores de campos magnéticos.

Localização ou Fonte	**Valor (T)**
Espaço interestelar	10^{-10}
Proximidades da superfície da terra	5×10^{-5}
Imã de geladeria	10^{-2}
Proximidades da superfície do sol	10^{-2}
Magnetos científicos	$2 - 4$
Proximidades de um pulsar	10^{8}
Proximidades do núcleo atômico	10^{12}

Notação para vetores perpendiculares à página

A representação geométrica dos vetores $\vec{F}$, $\vec{v}$ e $\vec{B}$ não pode ser feita utilizando somente o plano. Ela envolve necessariamente as três dimensões do espaço. Por isso, é conveniente definirmos uma notação para vetores que estão entrando ou saindo da página. A figura 6.41 mostra a convenção utilizada.

A força de Lorentz

Um outro fato experimental básico no eletromagnetismo é que as cargas reagem independentemente aos campos elétricos e magnéticos. Ou seja, a força elétrica $\vec{F}_E = q\,\vec{E}$ superpõe se linearmente à força magnética, resultando numa força líquida dada por

$$\vec{F} = q\left[\vec{E} + \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)\right]. \tag{6.13.4}$$

A equação acima é conhecida como Lei de Força de Lorentz em homenagem ao físico Hendrik A. Lorentz, por suas diversas contribuições à física clássica.

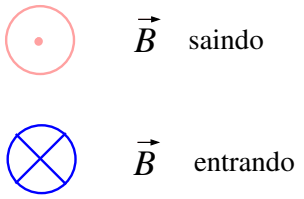


Figura 6.41: Convenção gráfica para B

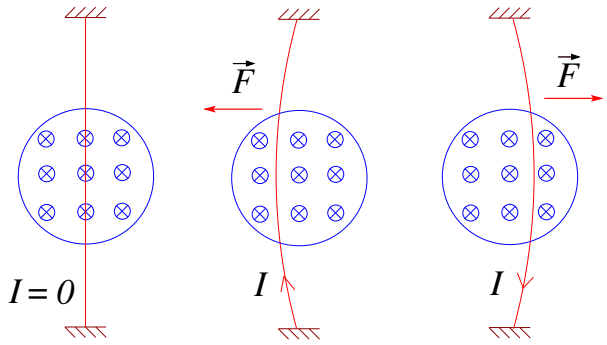


Figura 6.42: Força magnética sobre um fio

6.14 Décima Quarta Aula

6.14.1 Força magnética sobre correntes

Vimos que uma carga movendo-se em um campo magnético pode estar sujeita a uma força. Sabemos também que a corrente elétrica em um fio condutor é devida ao movimento dos elétrons. Logo, um fio conduzindo corrente deve estar sujeito à uma força elétrica. A figura 6.42 ilustra este fato, mostrando três fios condutores colocados em uma região onde há em campo magnético entrando na página.

Na primeira figura, da esquerda para a direita, a corrente é nula, não havendo portanto qualquer força sobre o fio. A aplicação da regra da mão direita mostra que a força nos dois casos seguintes deve ter o sentido indicado na figura (lembre-se que o sentido da corrente é determinado pelo movimento das cargas positivas).

Força magnética sobre fios de comprimento infinitesimal

Como um primeiro passo para uma análise quantitativa mais detalhada, em situações mais gerais, vamos considerar a força magnética sobre um fio de comprimento infinitesimal ds. Consideremos o *vetor* d$\vec{s}$ possuindo módulo ds e orientação dada pela corrente I que está fluindo ao longo do fio, como indicado na figura 6.43. A carga dq que passa através do segmento ds durante um intervalo do tempo dt é

$$\mathrm{d}q = I\,\mathrm{d}t, \tag{6.14.1}$$

onde I é a corrente no fio. O vetor velocidade da carga dq é

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}t}. \tag{6.14.2}$$

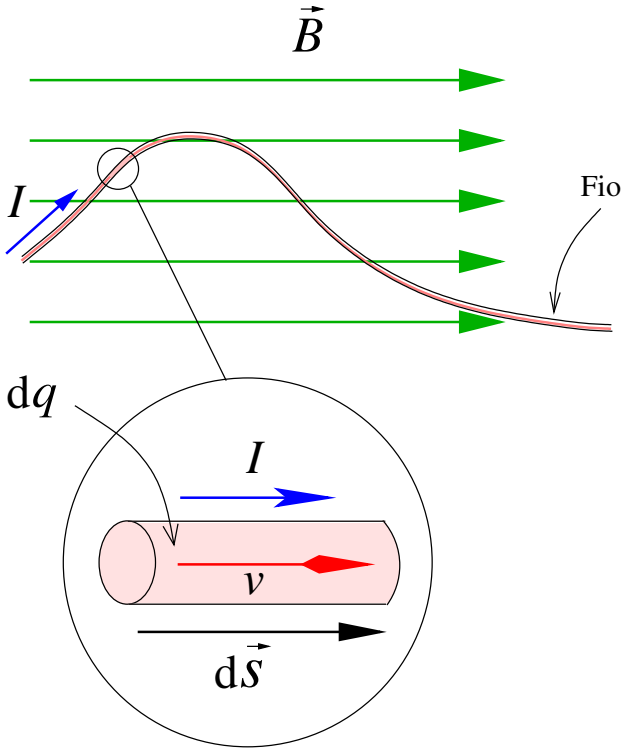


Figura 6.43: Força magnética sobre um segmento

Utilizando a equação (6.13.1) e as duas equações acima, obtemos para a força magnética que atua sobre o segmento infinitesimal

$$d\vec{F} = dq\vec{v} \times \vec{B} = (Idt)\left(\frac{d\vec{s}}{dt} \times \vec{B}\right). \tag{6.14.3}$$

Cancelando os fatores dt, teremos finalmente,

$$d\vec{F} = Id\vec{s} \times \vec{B}. \tag{6.14.4}$$

Sabemos que, em geral, o campo magnético $\vec{B}$ assume diferentes valores em cada ponto do espaço e a forma do fio é representada por uma curva qualquer. A corrente I tem o mesmo valor em todos os pontos do espaço, já que a carga é conservada.

Força magnética sobre fios possuindo correntes

A força resultante sobre o fio é obtida fazendo-se a soma vetorial de todas as forças infinitesimais, ou seja, integrando (6.14.4) sobre todos os pontos do fio. Como a corrente I tem o mesmo valor ao longo do fio, podemos tira-la para fora da integral, obtendo

$$\vec{F}_B = I\int_{fio}(d\vec{s} \times B). \tag{6.14.5}$$

Dependendo da forma do fio e da configuração de campo magnético, a integral acima pode ser calculada de maneira bastante simples.

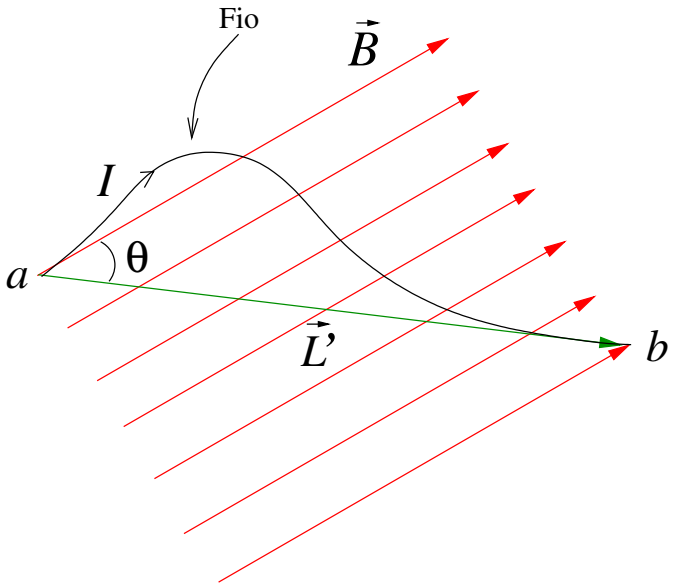


Figura 6.44: Força sobre um fio com qualquer curvatura

A situação mais simples possível, consiste de um fio reto imerso em um campo magnético uniforme. Neste caso, $\vec{B}$ pode ser tirado para fora da integral em (6.14.5), resultando em

$$\vec{F} = I\left(\int_{fio} \mathrm{d}\vec{s}\right) \times B. = I\vec{L} \times \vec{B}, \tag{6.14.6}$$

Na expressão acima, usamos $\int_{fio} \mathrm{d}\vec{s} = \vec{L}$, onde $\vec{L}$ é um vetor orientado no sentido da corrente e possuindo o comprimento L do fio.

Consideremos agora um fio possuindo uma curvatura qualquer, imerso em um campo magnético uniforme, como está ilustrado na figura 6.44. Novamente, o campo magnético em (6.14.5) pode ser tirado para fora da integral, resultando em

$$\vec{F}_{B_{unif.}} = I\left(\int_{fio} \mathrm{d}\vec{s}\right) \times B. \tag{6.14.7}$$

A integral na equação acima é simplesmente uma soma vetorial dos infinitos vetores infinitesimais $\mathrm{d}\vec{s}$. Geometricamente, o vetor resultante é o que está indicado na figura 6.44 orientado de a para b e formando um ângulo θ com a direção do campo magnético. Vemos que a resolução do problema de um fio qualquer imerso num campo magnético uniforme é equivalente ao problema de um fio reto, orientado de uma extremidade à outra do fio original. Denotando a integral na equação (6.14.7) por $\vec{L}'$ (veja a figura 6.44), teremos

$$\vec{F}_{B_{unif.}} = I\vec{L}' \times B. \tag{6.14.8}$$

Usando a mesma abordagem acima, podemos concluir facilmente que a força total sobre um fio formando uma *curva fechada* (*espira*), imerso em um campo uniforme, é nula, uma vez que, neste caso, a resultante dos infinitos vetores $\mathrm{d}\vec{s}$ é igual a zero.

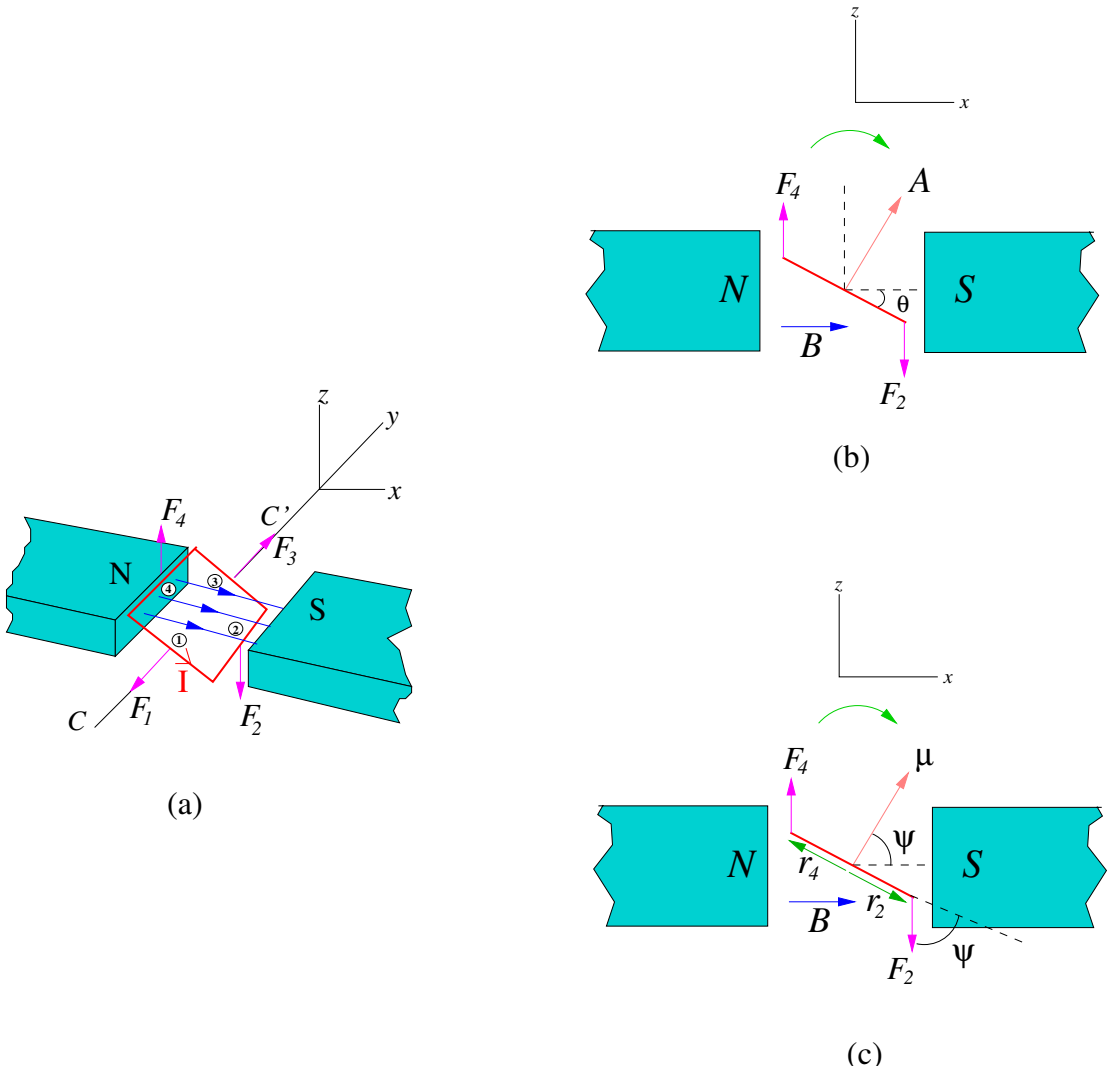


Figura 6.45: Torque sobre uma espira

6.14.2 Torque sobre uma espira de corrente

Uma *espira de corrente* consiste de um fio rígido formando uma curva fechada, por onde flui uma corrente I. Vimos que a força resultante sobre uma tal configuração de corrente é nula. Veremos agora que, dependendo da posição relativa da espira e das linhas de campo magnético, pode existir um *torque* sobre a espira. Este efeito é fundamental para o funcionamento de dispositivos tais como motores elétricos e de instrumentos de medida.

Consideremos uma espira rígida, em forma retangular, de lado menor a e lado maior b, por onde flui uma corrente I. Quando aplicamos um campo magnético uniforme, $\vec{B}$, cada um dos quatro lados da espira estará sujeito à uma força que pode ser calculada utilizando-se a equação (6.14.6). A figura 6.45 mostra uma configuração da espira colocada em um campo aproximadamente uniforme. A espira está fixa a um eixo passando pelos pontos $C - C'$, não mostrado na figura. Utilizando a

equação (6.14.6) para cada um dos quatro lados da espira, teremos

$$\begin{array}{lcll} F_1 & = & IaB\,\mathrm{sen}\theta, & \text{no sentido } -y \\ F_2 & = & IbB & \text{no sentido } -z \\ F_3 & = & IaB\,\mathrm{sen}\theta, & \text{no sentido } +y \\ F_4 & = & IbB. & \text{no sentido } +z \end{array} \tag{6.14.9}$$

As forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_3$ possuem o mesmo módulo, mas sentidos opostos. O mesmo é verdade para o par formado por $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_4$. Isto está de acordo com o resultado geral, segundo o qual $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\vec{F}_4 = 0$ para uma espira qualquer num campo uniforme. No entanto, enquanto o par $\vec{F}_1$-$\vec{F}_3$ atua ao longo do *mesmo eixo* $C-C'$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_4$ atuam sobre eixos diferentes, produzindo um *torque* que faz a espira girar no sentido horário, como mostra a figura 6.44 (b). Quando o plano da espira coincidir com o plano $z-y$, o par $\vec{F}_2$-$\vec{F}_4$ também estará atuando ao longo do mesmo eixo e não haverá mais torque.

O vetor torque, $\vec{\tau}$, pode ser facilmente calculado, utilizando-se o resultado conhecido da mecânica, como

$$\tau = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_4 \times \vec{F}_4, \tag{6.14.10}$$

sendo que $\vec{r}_2$ e $\vec{r}_4$, indicados na parte (c) da figura 6.44, são vetores perpendiculares ao eixo $C-C'$, ambos possuindo comprimentos $a/2$ e formando um ângulo ψ com $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_4$, respectivamente. Assim, os dois termos do lado direito da equação acima possuem o mesmo sentido $+y$ (entrando na folha na parte (c) da figura 6.44). Logo,

$$\begin{array}{rcl} \vec{\tau} & = & r_2F_2\mathrm{sen}\psi\,\hat{\text{æ}} + r_4F_4\mathrm{sen}\psi\,\hat{\text{æ}} \\ & = & \dfrac{a}{2}(IbB)\,\mathrm{sen}\psi\,\hat{\text{æ}} + \dfrac{a}{2}(IbB)\,\mathrm{sen}\psi\,\hat{\text{æ}} \\ & = & I\,ab\,\mathrm{sen}\psi\,B\,\hat{\text{æ}}. \end{array} \tag{6.14.11}$$

Na segunda linha da equação acima, utilizamos (6.14.9) para F_2 e F_4.

Na parte (b) da figura 6.44, está indicado o vetor $\vec{A}$. Este é o *vetor área* da espira. Em geral, dada uma curva plana fechada, o vetor área é definido como um vetor perpendicular à superfície delimitada pela curva, possuindo módulo igual a área da superfície. Como existem duas possibilidades para vetores ortogonais à uma dada superfície, a escolha é feita orientando-se a curva no sentido dos dedos da mão direita e convencionando-se que o sentido de $\vec{A}$ é o mesmo do polegar. Utilizando esta definição, podemos escrever a equação (6.14.11) como

$$\vec{\tau} = I\,\vec{A} \times \vec{B}. \tag{6.14.12}$$

Aqui utilizamos que o ângulo entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$ é ψ, como está indicado na parte (b) da figura 6.44.

A grandeza $I\,\vec{A}$ é denominada *momento de dipolo magnético* da espira e possui um papel muito importante na física e na engenharia. Esta grandeza está denotada pela letra grega μ na parte (c) da figura 6.44. Embora a relação (6.14.12) tenha sido obtida para uma configuração especial de espira e campo magnético, ela é valida em geral. Qualquer espira de corrente possuindo momento de dipolo magnético $\vec{\mu} = I\vec{A}$ ficará sujeita a um torque

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \tag{6.14.13}$$

quando imersa em um campo magnético $\vec{B}$.

6.15 Tópicos a serem incluidos nestas notas

- Lei de Biot-Savart, lei de Ampère, campos magnéticos em diversas configurações.
- Fluxo magnético. Corrente de deslocamento e lei de Ampère generalizada. Magnetismo na matéria. Histerese. Momento magnético. Vetor B e H.
- Lei de Faraday. FEM. Campo elétrico produzido por fluxos magnéticos variáveis no tempo. Geradores e motores. Equações de Maxwell na forma integral.
- Auto-indutância. Circuitos RL. Energia no campo magnético. Mútua-indutância. Oscilações num circuito LC (similaridade com oscilador mecânico). Circuitos RLC.
- Circuitos de corrente alternada. Fasores. Resistores, indutores e capacitores em circuitos de corrente alternada. Circuitos RLC. Potência. Ressonância em circuitos RLC, filtros
- "Recordação"dos teoremas básicos de cálculo vetorial: teoremas de Gauss e Stokes. Redução das Equações de Maxwell à forma diferencial. Densidade de corrente de deslocamento. Obtenção da equação de onda em uma dimensão.

6.16 Corrente alternada

Considere uma corrente que varia com o tempo segundo

$$i(t) = I_m \operatorname{sen}(\omega t); \quad I_m > 0. \tag{6.16.1}$$

Ou seja, a corrente oscila com frequência angular $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ (f é a frequência e T é o período); a amplitude de oscilação é I_m. Essa é a forma geral de uma *corrente alternada*. Por exemplo, a corrente da rede elétrica em nossas casas possui $f = 60s^{-1} = 60Hz$ (Hz é o "Hertz" em homenagem ao físico alemão que, entre outras descobertas, foi o primeiro a realizar experimentos detalhados com ondas eletromagnéticas). Sabemos uma uma tal corrente pode ser produzida por uma *gerador de corrente alternada*, quando uma espira realiza rotações na presença de uma campo magnético.

6.16.1 Valores quadráticos médios

Amperímetros de corrente alternada são calibrados para medir o "valor quadrático médio da corrente", definido como

$$I_{qm} \equiv \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [i(t)]^2 dt}. \tag{6.16.2}$$

Usando (6.16.1), teremos

$$I_{qm} = I_m \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \operatorname{sen}^2(\omega t) dt}. \tag{6.16.3}$$

Usando a identidade trigonométrica $\operatorname{sen}^2(x) = [1 - \cos(2x)]/2$

$$I_{qm} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [1 - \cos(2\omega t)]\, dt}. \tag{6.16.4}$$

Notando que a integral de $\cos(2\omega t)$, no intervalo $0 \geq t \geq T$, é igual a zero, teremos

$$I_{qm} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \tag{6.16.5}$$

O mesmo é obtido no caso em que $i(t) = I_m \cos(\omega t)$. Para ver isso basta usar a relação $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$, juntamente com o resultado (6.16.5).

Da mesma forma, quando a voltagem no circuito varia segundo

$$v(t) = V_m \text{sen}(\omega t); \quad V_m > 0, \tag{6.16.6}$$

o voltímetro é calibrado para medir a grandeza

$$V_{qm} \equiv \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [v(t)]^2 dt} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}. \tag{6.16.7}$$

Na rede elétrica doméstica brasileira temos, por exemplo, uma tensão quadrática média $V_{qm} = 120\,V$. Portanto a amplitude, ou *valor de pico* é

$$V_m = \sqrt{2}\,120V = 169,7V. \tag{6.16.8}$$

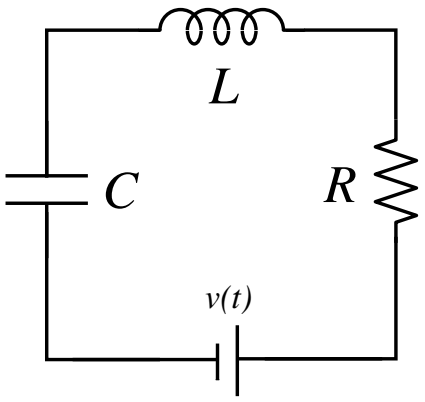
Veremos a seguir qual é a relação entre tensão e corrente em circuitos possuindo resistência R, indutância L e capacitância C.

6.16.2 Circuito RLC em série com fonte de corrente alternada

Vamos considerar a seguir um circuito constituído por uma resistência R, uma indutância L e uma capacitor C, ligados em série à uma fonte de tensão $v(t)$. Sistemas desse tipo são encontrados em dispositivos tão diversos como motores elétricos, rádios, sistemas de som, filtros de frequência, etc. Além disso, na engenharia há muitos sistemas cujo comportamento mecânico é completamente análogo a um circuito RLC com fonte. Por exemplo, as oscilações de edificações tais como prédios, pontes, torres, etc. Usando um circuito RLC, podemos até mesmo modelar de maneira *analógica* certas características de sistemas que são projetados em diversas áreas da engenharia.

Solução do problema estacionário

Considere o circuito RLC mostrado na figura abaixo.



Suponha que a fonte $v(t)$ esteja operando por um longo tempo, e que possua uma dependência temporal oscilatória com frequência ω. Em geral, podemos ter

$$v(t) = V_m \text{sen}(\omega t + \Phi); \quad V_m > 0, \tag{6.16.9}$$

em que Φ é uma fase. Veremos a seguir que, nessas condições, a corrente elétrica no circuito também oscila com a mesma frequência ω, uma vez que os efeitos transitórios (oscilações com a frequência natural do circuito sem fonte) são exponencialmente amortecidos. Queremos saber então qual é a amplitude da corrente e qual é a defasagem entre a oscilação da fonte e da corrente. Veremos a seguir como podemos expressar essas grandezas em termos de R, L, C e da frequência ω da fonte.

A equação que descreve o circuito RLC é

$$v(t) - v_R - v_L - v_C = 0; \;\; v_R = Ri(t); \;\; v_L = L\frac{di(t)}{dt}; \;\; v_C = \frac{q(t)}{C}. \tag{6.16.10}$$

Portanto, podemos escrever a seguinte equação para o circuito [2]

$$\frac{q(t)}{C} + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + Ri(t) = v(t). \tag{6.16.11}$$

A equação para a corrente pode ser obtida derivando a equação (6.16.11) e usando a conservação de carga $i(t) = dq(t)/dt$. Fazendo isso, obtemos

$$\frac{i(t)}{C} + L\frac{\mathrm{d}^2 i(t)}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{6.16.12}$$

Ao estudarmos anteriormente o circuito RLC, na ausência da tensão $v(t)$, vimos que a solução é uma oscilação amortecida. Portanto, levando em conta a linearidade da equação, a solução geral terá a forma $i(t) = i_{osc}(t) + i_{est}(t)$. Dizemos que o circuito está no *regime estacionário* quando já se passou um tempo suficientemente longo, de tal forma que a parte $i_{osc}(t)$ é praticamente nula. Daqui por diante vamos supor que estamos no regime estacionário, ou seja, $i(t) = i_{est}(t)$.

Consideremos a solução oscilatória estacionária

$$i(t) = I_m \mathrm{e}^{j\omega t}; \quad j = \sqrt{-1}, \tag{6.16.13}$$

em que I_m é uma amplitude real. A parte imaginária de $i(t)$ oscila como $I_m \text{sen}(\omega t)$ que é exatamente a *forma geral* da solução estacionária que procuramos. Levando em conta a *linearidade* da equação (6.16.12), podemos tratar o problema utilizando a forma complexa dada em (6.16.13) e tomar a parte imaginária no fim. Para o potencial oscilatório utilizamos a forma

$$v(t) = V_m \mathrm{e}^{j(\omega t + \Phi)}, \tag{6.16.14}$$

em que V_m e Φ são grandezas reais. Note que a parte imaginária deste potencial é igual à Eq. (6.16.9). Temos assim suficiente generalidade para poder descrever uma *defasagem* entre a corrente e o potencial.

[2] A Eq. (6.16.11) também pode ser obtida levando em conta a conservação de energia (desprezando efeitos de radiação)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{q(t)^2}{2C} + \frac{LI(t)^2}{2}\right] = -RI(t)^2 + I(t)V(t)$$

e a conservação de carga $\mathrm{d}q(t)/\mathrm{d}t = i(t)$ (exercício: verifique isso). O lado esquerdo dessa equação é a taxa de variação de energia elétrica (no capacitor) e magnética (no indutor). No lado direito temos a taxa de energia dissipada por efeito Joule no resistor e a taxa de energia fornecida pela fonte.

Vamos agora combinar as equações (6.16.12), (6.16.13) e (6.16.14) a fim de obter a relação entre I_m, V_m e as constantes características do circuito (R, L e C). Substituindo (6.16.13) e (6.16.14) em (6.16.12), obtemos

$$\frac{\mathrm{e}^{j\omega t}}{C} - L\omega^2 \mathrm{e}^{j\omega t} + Rj\omega \mathrm{e}^{j\omega t} = \frac{V_m}{I_m} j\omega \mathrm{e}^{j(\omega t+\Phi)}. \tag{6.16.15}$$

O fator comum $\exp(j\omega t)$ pode ser cancelado, levando ao resultado

$$R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \frac{V_m}{I_m}\mathrm{e}^{j\Phi}. \tag{6.16.16}$$

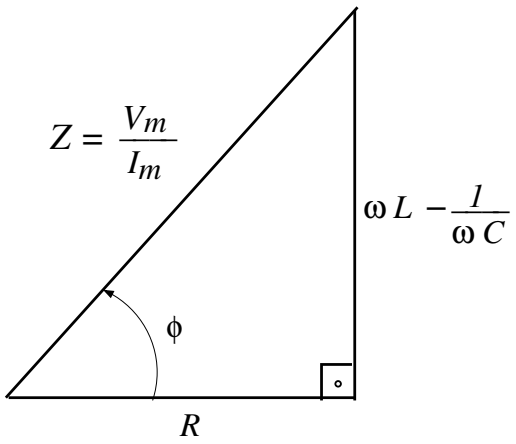
Usando a fórmula de Euler, $\exp(j\Phi) = \cos(\Phi) + j\mathrm{sen}(\Phi)$, teremos

$$\frac{V_m}{I_m}\cos(\Phi) = R; \quad \frac{V_m}{I_m}\mathrm{sen}(\Phi) = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right). \tag{6.16.17}$$

Os valores de Φ e da *impedância*

$$Z \equiv \frac{V_m}{I_m} \tag{6.16.18}$$

podem agora ser obtidos a partir da figura abaixo (ou simplesmente resolvendo diretamente as equações (6.16.17)).



Ou seja,

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \tag{6.16.19}$$

e

$$\Phi = \arctan\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \tag{6.16.20}$$

A equação (6.16.17) generaliza a "lei" de Ohm, $R = V/I$ para situações mais gerais onde há capacitores e indutores. Cada elemento do circuito possui uma *reatância* característica. Assim, é conveniente definir a *reatância indutiva*

$$X_L \equiv \omega L \tag{6.16.21}$$

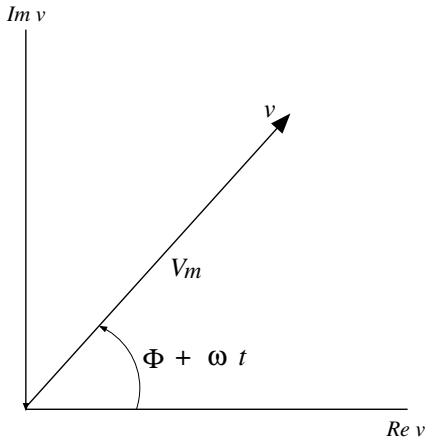
e a *reatância capacitiva*

$$X_C \equiv \frac{1}{\omega C} \tag{6.16.22}$$

os quais desempenham um papel análogo ao da resistência R. Note que para $\omega = 0$ X_C tende para infinito. Isso ocorre porque no caso estacionário teríamos uma corrente contínua tentando fluir em um circuito aberto. Já para $\omega \to \infty$ X_L domina, porque o indutor tende a se opor a variações rápidas.

Fasores

Funções oscilatórias, tais como as tensões em cada elemento do circuito, ou a tensão total podem ser representadas graficamente em termos dos chamados diagramas de fasores. Por exemplo a tensão total pode ser representada como na figura abaixo.



O *fasor de tensão* é mostrado na figura como uma seta de comprimento V_m formando um ângulo $\omega t + \Phi$ com o eixo horizontal. Ou seja, temos uma representação gráfica da Eq. (6.16.14). O tensão real que está aplicada ao circuito é representada pela projeção vertical do fasor de tensão. Note que poderíamos igualmente considerar a projeção horizontal; teríamos assim um potencial defasado de $-\pi/2$ em relação ao que estamos considerando.

As tensões v_R, v_L e v_C também podem ser representadas por fasores, usando as equações

$$v_R = Ri, \quad v_L = L\frac{di}{dt} \text{ e } v_C = \frac{q}{C} = \frac{\int i(t)dt}{C}. \tag{6.16.23}$$

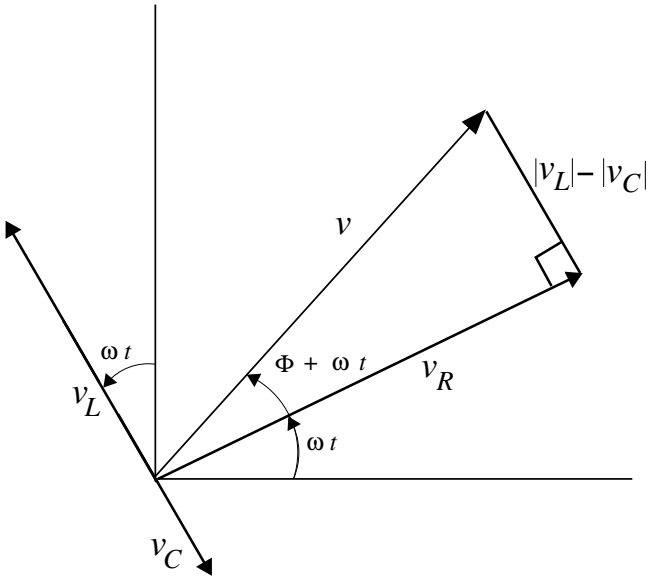
Substituindo o valor de $i(t)$ dado pela Eq. (6.16.13) teremos,

$$v_R = RI_m e^{j\omega t}, \quad v_L = jX_L I_m e^{j\omega t} \text{ e } v_C = -j\frac{I_m}{\omega C}e^{j\omega t}. \tag{6.16.24}$$

Usando $\pm j = \exp(\pm j\pi/2)$, podemos escrever as relações anteriores como

$$v_R = RI_m e^{j\omega t}, \quad v_L = X_L I_m e^{j(\omega t+\pi/2)} \text{ e } v_C = \frac{I_m}{\omega C}e^{j(\omega t-\pi/2)}. \tag{6.16.25}$$

Na figura abaixo é mostrada a representação das equações acima, e também de $v(t)$, em termos de fasores. A figura leva em conta a relação $v = v_L + v_C + v_R$, como uma relação vetorial, ou seja, considerando a igualdade das duas componentes (horizontal e vertical) de cada fasor.



Note que o fasor v_R está alinhado (em fase) com o fasor de corrente $i(t) = I_m \exp(i\omega t)$. Portanto, o fasor da tensão no indutor está adiantando de $\pi/2$ em relação ao fasor de corrente. O fato de que a tensão $v_L(t)$ está *adiantada* em relação à corrente é esperado de acordo com a lei de indução. De fato, quando a corrente é nula, sua variação é máxima. Logo, v_L é máximo de acordo com a lei de Faraday. Já o fasor de v_C está atrasado de $\pi/2$ em relação à corrente. Isso está de acordo com o fato de que a corrente deve ser nula quando a carga no capacitor é máxima.

Ressonância

De acordo com as relações (6.16.18) e (6.16.19) a amplitude da corrente pode ser escrita como

$$I_m(\omega) = \frac{V_m}{Z} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \tag{6.16.26}$$

Essa equação mostra que $I_m(\omega)$ é positivo e tende a zero tanto para $\omega \to 0$ quanto para $\omega \to \infty$. Logo deve possuir um máximo. De fato, o máximo ocorre quando o denominador for mínimo. Isso se dá quando a frequência ω for tal que

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0, \tag{6.16.27}$$

ou seja,

$$\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{6.16.28}$$

que é precisamente a *frequência de natural* do circuito LC. O circuito entra portanto em ressonância quando a fonte oscila com a frequência natural do sistema. Um rádio utiliza esse fenômeno amplificando sinais de determinadas frequências. O mesmo tipo de fenômeno ocorre em sistemas mecânicos tais como um pêndulo. Um balanço de criança, por exemplo, oscila com amplitudes cada vez maior quando é impulsionado com a frequência certa. Uma ponte pode oscilar com amplitudes cada vez maiores impulsionada pelo vento. Uma flauta amplifica uma das várias frequências que compõe o sopro.

Fator de qualidade

Definindo o *fator de qualidade*

$$Q \equiv \frac{\omega_0 L}{R} \tag{6.16.29}$$

podemos escrever (6.16.26) como (verifique)

$$I_m(\omega) = \frac{V_m/R}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}. \tag{6.16.30}$$

A *largura* $\Delta\omega$ do pico da função $I_m(\omega)$, em torno do máximo ω_0, pode ser definida como os valores de ω para os quais I_m cai a $1/\sqrt{2}$ de seu valor máximo. Ou seja,

$$Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 1. \tag{6.16.31}$$

De onde resulta [3]

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \pm\frac{1}{Q}\left[\frac{1}{1 + \frac{\omega_0}{\omega}}\right]. \tag{6.16.32}$$

No caso especial quando $Q \gg 1$, temos

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1. \tag{6.16.33}$$

Disso segue que $\omega \simeq \omega_0$. Logo,

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \simeq \pm\frac{1}{2Q}. \tag{6.16.34}$$

Da definição de Q, obtemos

$$\Delta\omega = \pm\frac{R}{2L} = \pm\frac{\gamma}{2}. \tag{6.16.35}$$

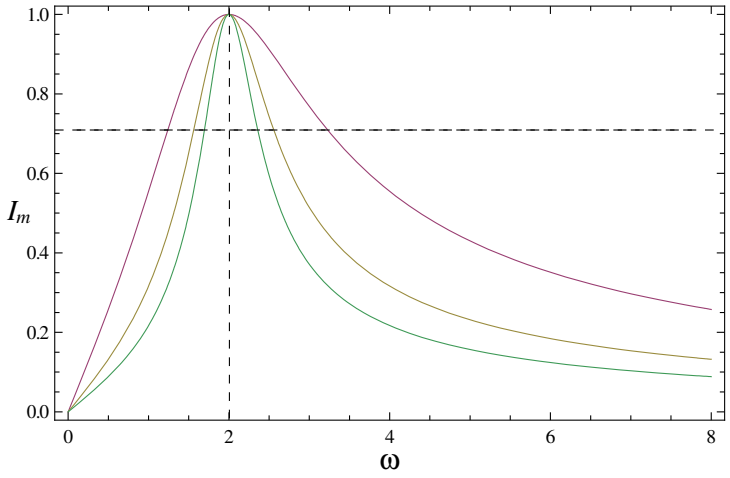
Vemos que γ é o coeficiente de amortecimento do circuito RLC sem fonte externa.

A figura abaixo mostra três curvas de ressonância para $Q = 1$, 2 e 3. Foram utilizados os valores $V_m/R = 1$ e $\omega_0 = 2$ (linha tracejada vertical). A linha horizontal mostra o valor $1/\sqrt{2}$ da corrente máxima. A figura mostra que a curva se torna mais estreita a medida que o fator de qualidade Q aumenta.

---

[3]

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega\omega_0} = \frac{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}{\omega\omega_0} = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\left(1 + \frac{\omega_0}{\omega}\right)$$



Potência média

Usando a parte imaginária da corrente dada em (6.16.13), a potência instantânea dissipada no resistor é

$$P_R(t) = RI_m^2 \text{sen}^2(\omega t) \tag{6.16.36}$$

Para calcular o *valor médio* em um período $T = 2\pi/\omega$ (ou em qualquer número de períodos) do quadrado de uma grandeza que varia harmonicamente com o tempo é útil considerar antes a seguinte relação:

$$\langle \text{sen}^2(\omega t + \Phi)\rangle = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \text{sen}^2(\omega t' + \Phi)\text{d}t' = \frac{\omega}{2\pi}\int_t^{t+T} \text{sen}^2(\omega t' + \Phi)\text{d}t' \tag{6.16.37}$$

Utilizando a variável de integração $u = \omega(t' - t)$

$$\langle \text{sen}^2(\omega t + \Phi)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \text{sen}^2(u + \omega t + \Phi)\text{d}u. \tag{6.16.38}$$

Expandindo o seno

$$\langle \text{sen}^2(\omega t + \Phi)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[\cos^2(u)\cos^2(\omega t + \Phi) + \text{sen}^2(u)\text{sen}^2(\omega t + \Phi) + 2\text{sen}(2u)\text{sen}(\omega t + \Phi)\right] \text{d}u. \tag{6.16.39}$$

Usando

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2(u)\text{d}u = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \int_0^{2\pi} \text{sen}(2u)\text{d}u = 0, \tag{6.16.40}$$

obtemos (verifique)

$$\langle \text{sen}^2(\omega t + \Phi)\rangle = \frac{1}{2}. \tag{6.16.41}$$

Fazendo $\Phi \to \Phi + \pi/2$, obtemos

$$\langle \cos^2(\omega t + \Phi)\rangle = \frac{1}{2}. \tag{6.16.42}$$

Das relações acima segue imediatamente que

$$\langle P_R(t)\rangle = R\frac{I_m^2}{2} = RI_{qm}^2. \tag{6.16.43}$$

A *potência fornecida pela fonte* é, tomando o produto das partes imaginárias de (6.16.13) e (6.16.14)

$$P_V(t) = I_m V_m \text{sen}(\omega t + \Phi)\text{sen}(\omega t) = I_m V_m \left[\text{sen}^2(\omega t)\cos(\Phi) + \cos(\omega t)\text{sen}(\omega t)\text{sen}(\Phi)\right]. \quad (6.16.44)$$

Tomando o valor médio e usando as equações (6.16.41) e (6.16.42) obtemos

$$\langle P_V(t)\rangle = \frac{1}{2} I_m V_m \cos(\Phi) = I_{qm} V_{qm} \cos(\Phi). \quad (6.16.45)$$

O fator $\cos(\Phi)$ é denominado *fator de potência*.

A energia que é fornecida pela fonte $v(t)$ é continuamente dissipada pela resistência R. Podemos ver isso de maneira explícita usando (veja as equações (6.16.16) e (6.16.17))

$$\cos(\Phi) = \frac{R}{Z} \quad (6.16.46)$$

e $V_m = ZI_m$, obtemos de (6.16.45)

$$\langle P_V(t)\rangle = R\frac{I_m^2}{2}. \quad (6.16.47)$$

Tomando a média de

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{q(t)^2}{2C} + \frac{LI(t)^2}{2}\right] = -RI(t)^2 + I(t)V(t)$$

e usando as equações (6.16.43) e (6.16.47), vemos que o valor médio da taxa de variação de energia elétrica e magnética é nulo no regime estacionário.

Note que a taxa de fornecimento de energia é máxima para $\Phi = 0$, ou seja quando

$$\cos(\Phi) = \frac{R}{Z} = 1.$$

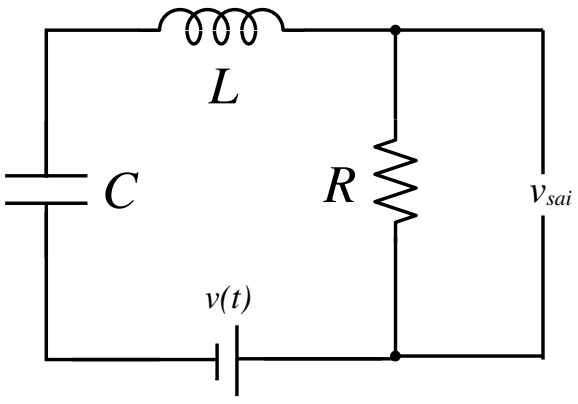
Isso ocorre quando

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = R,$$

ou seja, para ω igual a frequência de ressonância (verifique).

Filtros

A figura abaixo mostra um circuito RLC com os extremos do resistor conectados à uma saída. A amplitude da tensão de saída coincide com a amplitude da tensão nos extremos do resistor, ou seja, $V_{sai} = V_R = RI_m$.



Usando (6.16.26), teremos

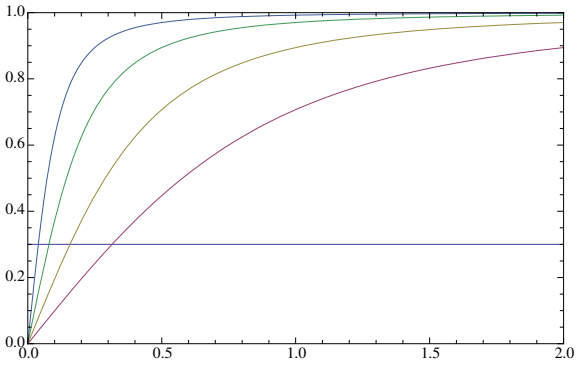
$$\frac{V_{sai}}{V_m} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \tag{6.16.48}$$

A expressão acima mostra que V_{sai}/V_m será máxima quando a frequência da fonte for igual à $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ (frequência de ressonância). Se o fator de qualidade é grande, a tensão v_{sai} terá uma amplitude muito pequena, exceto quando $\omega \simeq \omega_0$. Para uma fonte $v(t)$ cuja dependência temporal seja uma *superposição* de várias frequências (por exemplo, $v(t) = V_1 \cos(\omega_1 t) + V_2 \cos(\omega_2 t) + V_3 \cos(\omega_3 t) + \cdots$), o circuito RLC irá *filtrar* as componentes de $v(t)$ cujas frequências não são próximas de ω_0.

Vejamos agora o que ocorre quando eliminamos o indutor mostrado na figura acima. Neste caso, com L igual a zero, teremos

$$\frac{V_{sai}}{V_m} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \left(\frac{1}{RC}\right)^2}}. \tag{6.16.49}$$

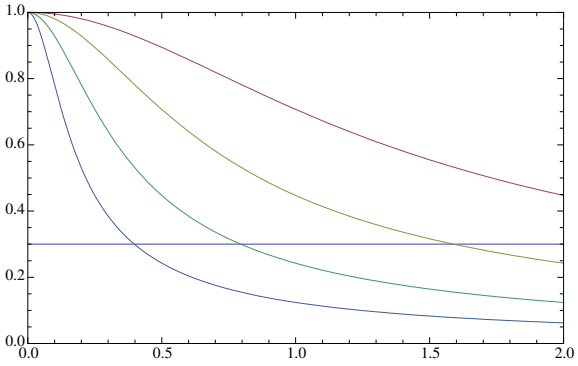
A expressão acima tende a zero quando $\omega \to 0$. Por outro lado, para $\omega \gg 1/RC$ vemos que $V_{sai}/V_m \to 1$ (note que $RC = \tau_{RC}$ é a constante de tempo do circuito RC). Portanto, as frequências relativamente baixas (muito menores do que $1/\tau_{RC}$) são filtradas. Esse tipo de filtro é denominado *filtro passa-altas*. Na figura abaixo são mostradas as curvas para $\tau_{RC} = 1,\ 2,\ 4,$ e 8.



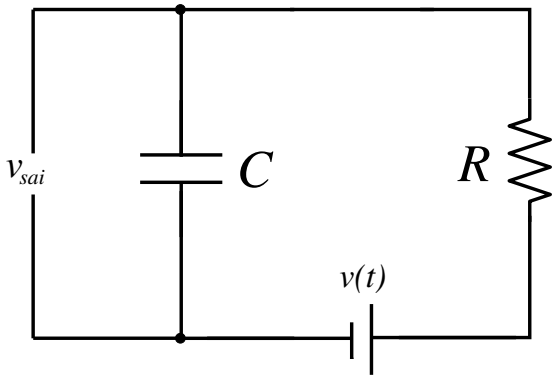
De maneira semelhante, se eliminarmos o capacitor, ou seja, se fizermos $C \to \infty$, teremos

$$\frac{V_{sai}}{V_m} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}}. \tag{6.16.50}$$

Agora, as frequências relativamente altas (muito maiores do que $1/\tau_{RL} = R/L$) são filtradas e as baixas são menos atenuadas. Temos assim um *filtro passa-baixas*. A figura abaixo mostra as curvas para $\tau_{RL} = 1,\ 2,\ 4,$ e 8.



Uma outra maneira de fazer um filtro passa-baixas consiste em colocar os terminais de saída como no circuito esquematizado na figura abaixo.



Nesse caso teremos,

$$\frac{V_{sai}}{V_m} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}. \tag{6.16.51}$$

Novamente, a expressão tende a 1 ou a zero quando $\omega \to 0$ ou $\omega \gg 1/\tau_{RC}$, respectivamente.

Transformadores

Transformadores são dispositivos que permitem aumentar ou diminuir a voltagem. Isso pode ser importante em linhas de transmissão muito longas. É possível minimizar a potência dissipada por efeito Joule, $P_{diss} = Ri^2$, reduzindo a corrente i, mas mantendo a potência transmitida, $P = Vi$, com a utilização de altas voltagens V. Em linhas de transmissão típicas, utiliza-se voltagens em torno de 5×10^5 V.

O princípio básico de funcionamento de um transformador é a lei Faraday. Quando N_1 espiras estão conectadas a um potencial V_1 temos

$$V_1 = -N_1 \frac{d\phi_1}{dt}, \tag{6.16.52}$$

em que ϕ_1 é o fluxo do campo magnético através de cada espira. Se tivermos N_2 espiras nas proximidades haverá um potencial

$$V_2 = -N_2 \frac{d\phi_2}{dt}. \tag{6.16.53}$$

Em geral, o fluxo ϕ_2 é diferente de ϕ_1. Mas é possível fazer com que os fluxos sejam praticamente idênticos, utilizando um núcleo de ferro laminado (para reduzir perdas por correntes de Foucault) simétrico, como mostrado na figura (xxx). Nesse caso, teremos

$$\frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2}. \tag{6.16.54}$$

Portanto, quando $N_2 > N_1$, $V_2 > V_1$ e vice-versa. Temos assim, uma modificação da voltagem entre dois circuitos separados. Os circuitos 1 e 2 são chamados de *primário* e *secundário* respectivamente.

Em um transformador ideal toda a potência do primário é transmitida para o secundário. Ou seja,

$$I_1 V_1 = I_2 V_2. \tag{6.16.55}$$

Supondo que toda a impedância do secundário seja resistiva ("carga" resistiva), de modo que $I_2 = V_2/R$, então

$$V_1 = \left(R\frac{N_1^2}{N_2^2}\right) I_1. \tag{6.16.56}$$

6.17 Equações de Maxwell

6.17.1 Generalização da lei de Ampère

Todos os fenômenos eletromagnéticos que vimos até aqui podem ser compreendidos em termos das *leis de Gauss para* $\vec{E}$ *e* $\vec{B}$, *lei de Faraday* e da lei de Ampère, dadas respectivamente pelas seguintes equações

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho dV \qquad \text{(Lei de Gauss)}, \tag{6.17.1a}$$

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0 \qquad \text{(Lei de Gauss para o campo magnético)}, \tag{6.17.1b}$$

$$\oint_\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int_\Sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{A} \qquad \text{(Lei de Faraday)}, \tag{6.17.1c}$$

$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I = \mu_0 \int_\Sigma \vec{J}\cdot d\vec{A} \qquad \text{(Lei de Ampère)}. \tag{6.17.1d}$$

As integrais do lado esquerdo das equações (6.17.1a) e (6.17.1b) representam respectivamente os fluxos do campo elétrico ou magnético através de uma superfície fechada (gaussiana); a carga q é a carga no interior da gaussiana, expressada em termos da densidade de carga ρ na última igualdade. Γ representa uma curva fechada e $d\vec{s}$ é um vetor infinitesimal, tangente à curva, cujo módulo é o comprimento de um trecho infinitesimal da curva. Σ representa uma área qualquer, delimitada pela curva Γ, e $d\vec{A}$ o elemento infinitesimal de área. Na equação (6.17.1d), lei de Ampère, está implícito que a corrente não depende do tempo.

A lei de Ampère relaciona a corrente elétrica com o campo magnético, que por sua vez esta relacionado com o campo elétrico através da lei de Faraday. Como o campo elétrico está relacionado com a carga elétrica através da lei de Coulomb, vemos que as quatro equações acima implicam em uma relação entre a corrente elétrica e a carga elétrica. Essa relação deve ser consistente com a conservação da carga elétrica.

Em geral, quando a corrente depende do tempo, pode haver variações de densidade de carga em determinadas regiões. Por exemplo, no capacitor mostrado na figura (XXXX) abaixo, tanto a

corrente quanto a densidade de carga estão variando com o tempo. A relação entre densidade de corrente e densidade de carga deve ser tal que a *conservação da carga elétrica* seja satisfeita. Para isso, devemos ter a seguinte relação

$$\frac{dq}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{A}. \tag{6.17.2}$$

Ou seja, a variação da carga no interior de um volume é igual ao fluxo da densidade de corrente para esse volume. Note que $-\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{A}$ é negativo ou positivo respectivamente quando $\vec{J}$ está saindo ou entrando no volume através da superfície S.

6.17.2 Forma diferencial da equações

Segundo os teoremas de Gauss e de Stokes (final do curso de Cálculo III), dado um campo vetorial

$$\vec{v}(x, y, z) = v_x(x, y, z)\hat{x} + v_y(x, y, z)\hat{y} + v_z(x, y, z)\hat{z}, \tag{6.17.3}$$

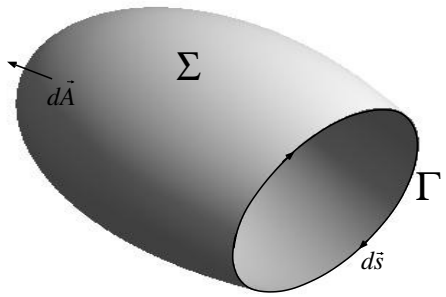
é possível verificar as seguintes identidades matemáticas:

$$\int_V (\text{div } \vec{v}) dV = \oint_S \vec{v} \cdot d\vec{A} \qquad \text{(Teorema de Gauss)} \tag{6.17.4}$$

e

$$\int_\Sigma (\text{rot } \vec{v}) \cdot d\vec{A}, = \oint_\Gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} \qquad \text{(Teorema de Stokes)} \tag{6.17.5}$$

Na equação (6.17.4), a integral do lado direito é uma integral dupla sobre uma superfície fechada que delimita o volume V, indicado indicado na integral do lado esquerdo. Ou seja, no teorema de Gauss temos uma região qualquer do espaço possuindo volume V e delimitada por uma superfície fechada de área S. Já a curva fechada Γ e a superfície aberta Σ, na equação (6.17.5), são to tipo esboçado na figura abaixo.



Em coordenadas cartesianas os operadores diferenciais *divergente* e *rotacional* são dados respectivamente por

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \tag{6.17.6}$$

e

$$\text{rot}\,\vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{z}. \tag{6.17.7}$$

As expressões acima sugerem uma notação mais apropriada, introduzindo o operador *nabla*

$$\vec{\nabla} \equiv \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}, \tag{6.17.8}$$

de modo que

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\vec{v} &= \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}) \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \text{div}\,\vec{v}\end{aligned} \tag{6.17.9}$$

e

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\vec{v} &= \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}) \\ &= \det\begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial_x} & \frac{\partial}{\partial_y} & \frac{\partial}{\partial_z} \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{z} = \text{rot}\,\vec{v}.\end{aligned} \tag{6.17.10}$$

Essa notação também é útil para expressar o operador Laplaciano, dado por

$$\nabla^2 = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{6.17.11}$$

Usando os teoremas de Gauss e de Stokes, podemos mostrar que as equações (6.17.1a), (6.17.1b), (6.17.1c), (6.17.1d) e (6.17.2) são equivalentes a

$$\text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{6.17.12a}$$

$$\text{div}\,\vec{B} = 0, \tag{6.17.12b}$$

$$\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \tag{6.17.12c}$$

$$\text{rot}\,\vec{B} = \mu_0\vec{J} \tag{6.17.12d}$$

e

$$\text{div}\,\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}. \tag{6.17.13}$$

De fato, podemos usar (6.17.4) para substituir as integrais de superfície que aparecem em (6.17.1a), (6.17.1b) e (6.17.2) por integrais de volume, e obter respectivamente (6.17.12a), (6.17.12b) e (6.17.13). De maneira análoga, usamos (6.17.5) para substituir as integrais de linha que aparecem em (6.17.1c) e (6.17.12c) por integrais de superfície e obter (6.17.12c) e (6.17.12d).

Obtivemos assim a *forma diferencial das leis de Gauss, Faraday e Ampère*. A equação (6.17.13) (forma diferencial da conservação de carga) é a chamada de *equação de continuidade*. Veremos a seguir que as cinco equações acima não são consistentes entre si e que é necessário generalizar a lei de Ampère para situações tais que as densidades de carga e corrente variam com o tempo.

O termo de Maxwell

Sabemos que na equação (6.17.12d) (forma diferencial da lei de Ampère) está implícito que a densidade de corrente não depende do tempo. De fato, essa equação não pode estar correta em geral, uma vez que ela esta claramente em contradição com a (6.17.13). Para ver a contradição, basta tomar a divergência dos dois lados da equação (6.17.12d). Do lado esquerdo teremos,

$$\begin{aligned}\text{div}(\text{rot}\,\vec{B}) &= \text{div}\left[\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\vec{x}+\left(\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\vec{y}+\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\vec{z}\right]\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\\ &= \frac{\partial^2 B_z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 B_y}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 B_x}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 B_z}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 B_y}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 B_x}{\partial z\partial y}=0. \qquad (6.17.14)\end{aligned}$$

Portanto, a lei de Ampère implica que

$$\text{div}\,\vec{J}=0. \qquad (6.17.15)$$

Mas isso não é consistente com situações tais que a densidade de carga esteja variando. De fato a equação de continuidade, (6.17.13), implicaria em $\partial\rho/\partial t=0$, o que é incompatível com situações onde ocorrem variações temporais de carga. Logo, concluímos que a lei de Ampère deve ser *modificada*. A modificação mais simples possível consiste em adicionar um termo ao lado direito da lei de Ampère, de modo que

$$\text{rot}\,\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\vec{X}. \qquad (6.17.16)$$

Tomando a divergência da equação acima e usando as equações (6.17.14), (6.17.13) e (6.17.12a) (lei de Gauss) teremos

$$0=-\mu_0\epsilon_0\text{div}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\text{div}\,\vec{X}, \qquad (6.17.17)$$

de onde podemos concluir que $\vec{X}=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ é suficiente para completar a lei de Ampère. Com esse termo adicional recuperamos a consistência das equações. A nova equação assim obtida, dada por

$$\text{rot}\,\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \qquad (6.17.18)$$

denomina-se *lei de Ampère-Maxwell*, por ter sido Maxwell quem introduziu essa modificação. A forma integral dessa equação é (usando novamente o teorema de Stokes)

$$\oint_\Gamma\vec{B}\cdot d\vec{s}=\mu_0\int_\Sigma\vec{J}\cdot d\vec{A}+\mu_0\epsilon_0\frac{d}{dt}\int_\Sigma\vec{E}\cdot d\vec{A}. \qquad (6.17.19)$$

Corrente de deslocamento

Por razões técnicas, e também devido a interpretação mecânica utilizada por Maxwell, o termo adicional, multiplicando μ_0, denomina-se *densidade de corrente de deslocamento*. Portando a corrente de deslocamento é dada por

$$I_d=\epsilon_0\frac{d\phi_E}{dt};\quad \phi_E=\int_\Sigma\vec{E}\cdot d\vec{A}. \qquad (6.17.20)$$

No caso do capacitor plano de área A e densidade superficial de carga σ, que está sendo carregado por uma corrente $I(t)$, a corrente de deslocamento entre as placas do capacitor é

$$I_d=\epsilon_0\frac{dE}{dt}A \qquad (6.17.21)$$

Usando $E = \sigma/\epsilon_0$ teremos

$$I_d = \frac{d(A\sigma)}{dt} = \frac{dq}{dt} = I(t). \tag{6.17.22}$$

Fora da região compreendida entre as placas o campo elétrico é nulo, logo $I_d = 0$; só há a corrente $I(t)$. Por outro lado, entre as placas só há a corrente $I_d = I$. Logo equação (6.17.19) aplica-se para uma superfície Σ qualquer.

A equação (6.17.18) juntamente com (6.17.12a), (6.17.12b) e (6.17.12c), constitui o conjunto denominado *equações de Maxwell*. Note que essas equações são agora completamente interdependentes. Maxwell deduziu, a partir dessa interdependência, a existência de propagação de *ondas eletromagnéticas*. Essa foi uma das descobertas teóricas mais importantes de toda a história da física.

Exemplo – Corrente quase-estacionária

Considere um fio condutor de condutividade σ. Quando uma corrente alternada flui pelo fio, a dependência temporal do campo elétrico no interior do fio é a parte real de $\vec{E} = \vec{E}_m \exp(i\omega t)$. A razão entre o módulo da densidade de corrente de deslocamento e o módulo da densidade de corrente $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ é

$$\frac{\left|\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}\right|}{\left|\sigma\vec{E}\right|} \approx \frac{|\epsilon_0\omega|}{|\sigma|} \tag{6.17.23}$$

Para um condutor típico, $\sigma \approx 10^7\,(\Omega\,m)^{-1}$. No caso de uma corrente alternada com $f = 60\,s^{-1}$, a razão acima é da ordem de 10^{-16}. Portanto, o termo de Maxwell produz efeitos muito pequenos para correntes quase-estacionárias.

6.18 Ondas eletromagnéticas

Vamos agora obter as *equações de onda* para os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$, a partir do sistema de equações diferenciais de Maxwell dado por (6.17.12). Não trataremos aqui do *mecanismo de geração* dessas ondas, o qual deve levar em conta a distribuição de cargas e sua dependência temporal. A previsão teórica da *propagação* de ondas eletromagnéticas no vácuo deve ser válida mesmo quando as cargas e correntes são nulas. Desse modo, tomando $\rho = 0$ e $\vec{J} = 0$ na região de interesse, teremos,

$$\text{div}\ \vec{E} = 0, \tag{6.18.1a}$$

$$\text{div}\ \vec{B} = 0, \tag{6.18.1b}$$

$$\text{rot}\ \vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \tag{6.18.1c}$$

$$\text{rot}\ \vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}. \tag{6.18.1d}$$

Note que $\vec{E}$ e $\vec{B}$ estão dinamicamente interrelacionados (graças ao termo de Maxwell) pelas equações (6.18.1c) e (6.18.1d). Para tornar mais explícita a dinâmica obedecida por $\vec{E}$ e $\vec{B}$, é conveniente tomar o rotacional das equações (6.18.1c) e (6.18.1d). Fazendo isso, teremos

$$\text{rot}(\text{rot}\ \vec{E}) = -\text{rot}\ \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial(\text{rot}\ \vec{B})}{\partial t} = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \tag{6.18.2}$$

e

$$\text{rot}(\text{rot}\ \vec{B}) = \mu_0\epsilon_0\text{rot}\ \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial(\text{rot}\ \vec{E})}{\partial t} = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}. \tag{6.18.3}$$

Fazendo uso da identidade [4]

$$\text{rot}(\text{rot}\vec{v}) = \text{grad}(\text{div } \vec{v}) - \nabla^2\vec{v} \tag{6.18.4}$$

e também as equações (6.18.1a) e (6.18.1b), as equações (6.18.2) e (6.18.3) se reduzem a

$$\nabla^2\vec{E} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{6.18.5}$$

e

$$\nabla^2\vec{B} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0. \tag{6.18.6}$$

Essas são as prometidas *equações de onda* para os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$!

6.18.1 Velocidade da Luz

Imediatamente reconhecemos que a velocidade de propagação das ondas, determinadas pelas equações (6.18.5) e (6.18.6), é uma constante c (do Latim, "celeritas") dada por

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}. \tag{6.18.7}$$

A teoria eletromagnética determina essa velocidade a partir dos valores obtidos em experimentos de eletrostática e magnetostática, para ϵ_0 e μ_0, respectivamente. O valor assim obtido para c, coincide numericamente com a *velocidade da luz* no vácuo. Essa descoberta fornece uma condição muito importante para se identificar os fenômenos ópticos como sendo de natureza eletromagnética.

Em 1983, o Escritório Internacional de Pesos e Medidas redefiniu o metro como sendo o comprimento da trajetória percorrida pela luz no vácuo durante um intervalo de tempo de 1/299792458 s, usando o padrão internacional de tempo. Em consequência dessa definição, o valor da velocidade da luz no vácuo é exatamente

$$c = 299\,792\,458\ m/s. \tag{6.18.8}$$

---

[4] Prova:

$$[(\text{rot}(\text{rot}\,\vec{V}))]_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j\varepsilon_{klm}\partial_l V_m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\partial_j\partial_l V_m = \nabla_i\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}\right) - \nabla^2 V_i.$$

Foi usada a cahmada *convenção de Einstein*, segundo a qual há uma soma implícita sobre índices repetidos. Por exemplo $A_iB_i = \sum_{i=1}^{3} A_iB_i$. Cada um dos *índices* i, j, k, etc, pode assumir os valores 1, 2 e 3, os quais *rotulam* as componentes tridimensionais dos vetores, de modo que, por exemplo $A_iB_i = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = \vec{A}\cdot\vec{B}$. Produtos vetoriais estão expressos na forma $(\vec{A}\times\vec{B})_i = \varepsilon_{ijk}A_jB_k$, onde a grandeza ε_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita definido como

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{se } (i,j,k) \text{ é } (1,2,3),(3,1,2) \text{ ou } (2,3,1), \\ -1 & \text{se } (i,j,k) \text{ é } (1,3,2),(3,2,1) \text{ ou } (2,1,3), \\ 0 & \text{se } i=j \text{ ou } j=k \text{ ou } k=i. \end{cases}$$

Usamos também a propriedade

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \det\begin{bmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{bmatrix} = \delta_{il}\left(\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}\right) - \delta_{im}\left(\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{kl}\right) + \delta_{in}\left(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}\right).$$

O símbolo δ_{ij}, denominado "Delta de Kronecker" é tal que

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } in_{\text{e}}j \end{cases}.$$

Progressos futuros nas técnicas experimentais não afetarão o valor da velocidade da luz, ou, equivalentemente do produto $\mu_0\epsilon_0$, mas resultarão em medidas mais precisas do metro. Essa escolha de padrão é conveniente, tendo em vista que as medidas de tempo são muito precisas[5].

6.18.2 Ondas planas

Consideremos uma situação especial tal que os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$, em um sistema de coordenadas (x, y, z), sejam da forma

$$\vec{E}(x,t) = E_x(x,t)\hat{x} + E_y(x,t)\hat{y} + E_z(x,t)\hat{z} \tag{6.18.9}$$

e

$$\vec{B}(x,t) = B_x(x,t)\hat{x} + B_y(x,t)\hat{y} + B_z(x,t)\hat{z} \tag{6.18.10}$$

Ou seja, os campos possuem o mesmo valor em todos os pontos do *plano* (y, z). Esse tipo particular de solução é denominado *solução de onda plana*, obtida resolvendo as equações (6.18.5) e (6.18.6). Para campos que só dependem de x e t, essas equações se reduzem a

$$c^2\frac{\partial^2\vec{E}(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\vec{E}(x,t)}{\partial t^2} \tag{6.18.11}$$

e

$$c^2\frac{\partial^2\vec{B}(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\vec{B}(x,t)}{\partial t^2}. \tag{6.18.12}$$

Podemos agora obter as soluções explícitas dessas equações. Veremos a seguir que essas equações admitem soluções que se propagam ao longo da direção x, com $\vec{E}$ e $\vec{B}$ ortogonais entre si e à direção $\hat{x}$.

Em geral, uma onda pode ser longitudinal (oscilação ao longo de x) ou transversal (oscilação perpendicular à x). Porém, no caso das ondas eletromagnéticas, usando as equações (6.18.1a) e (6.18.1b) podemos mostrar que a oscilação só pode ser transversal. De fato,

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(x,t)}{\partial y} + \frac{\partial E_z(x,t)}{\partial z} = \frac{\partial E_x(x,t)}{\partial x} + 0 + 0 = 0. \tag{6.18.13}$$

Logo, $E_x(x,t) =$ constante. Essa constante deve ser descartada por não caracterizar um comportamento ondulatório. O mesmo vale para o campo $\vec{B}$. Portanto, os campos de uma onda plana que pode se propagar apenas na direção x, possuem apenas componentes y e z. Ou seja, os campos tem a forma

$$\vec{E}(x,t) = E_y(x,t)\vec{y} + E_z(x,t)\vec{z} \tag{6.18.14}$$

e

$$\vec{B}(x,t) = B_y(x,t)\vec{y} + B_z(x,t)\vec{z}, \tag{6.18.15}$$

que é *ortogonal à direção de propagação.*

[5] O segundo é a duração de 9.192.631.770 períodos da radiação correspondente à transição entre dois níveis da estrutura hiperfina do estado fundamental do átomo de césio 133.

Direção entre $\vec{E}$ e $\vec{B}$

Podemos também determinar qual é a direção entre $\vec{E}$ e $\vec{B}$. De acordo com a lei de Faraday, dada pela equação (6.18.1c), devemos ter a seguinte relação entre as componentes de $\vec{E}$ e $\vec{B}$

$$\begin{aligned} \text{rotE} &= \hat{x}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) \\ &= -\frac{\partial B_x}{\partial t}\hat{x} - \frac{\partial B_y}{\partial t}\hat{y} - \frac{\partial B_z}{\partial t}\hat{z}. \end{aligned} \tag{6.18.16}$$

Substituindo as equações (6.18.14) e (6.18.15) em (6.18.16), teremos

$$\hat{x}\,(0+0) + \hat{y}\left(0 - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - 0\right) = -0\hat{x} - \frac{\partial B_y(x,t)}{\partial t}\hat{y} - \frac{\partial B_z(x,t)}{\partial t}\hat{z}. \tag{6.18.17}$$

Ou seja,

$$\frac{\partial E_z(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial B_y(x,t)}{\partial t} \tag{6.18.18a}$$

$$\frac{\partial E_y(x,t)}{\partial x} = -\frac{\partial B_z(x,t)}{\partial t}. \tag{6.18.18b}$$

Procedendo de maneira análoga, a lei de Ampère-Maxwell (equação (6.18.1d)) implica

$$\frac{\partial B_z(x,t)}{\partial x} = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial E_y(x,t)}{\partial t} \tag{6.18.19a}$$

$$\frac{\partial B_y(x,t)}{\partial x} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial E_z(x,t)}{\partial t}. \tag{6.18.19b}$$

Com uma escolha conveniente do sistemas de coordenadas, podemos fazer, por exemplo, $E_z = 0$. Nesse caso as equações (6.18.18a) e (6.18.19b) implicam que $B_y(x,t)$ não depende de x e t. Como uma constante não pode fazer parte da solução ondulatória, devemos ter $B_y = 0$. Logo, somente as componentes E_y e B_z, satisfazendo as equações (6.18.18b) e (6.18.19a), podem ser não nulas. Ou seja, os campos da onda plana são ortogonais entre si e à direção de propagação.

Tomando a derivada de (6.18.18b) com relação à x e usando (6.18.19a), (re)obtemos a equação de onda para E_y. De maneira análoga, podemos re-obter a equação de onda para B_z.

Ondas planas progressivas

A equação de onda

$$\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{6.18.20}$$

admite soluções da forma

$$E_y(x,t) = f(u); \quad u = x \pm vt, \tag{6.18.21}$$

com $v = c$. De fato, substituindo (6.18.21) em (6.18.20), teremos

$$\frac{d^2 f}{du^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 0. \tag{6.18.22}$$

Logo, a equação acima pode ser satisfeita fazendo $v = c$. Nesse caso, as soluções da forma $f(x \pm ct)$ representam ondas que se propagam respectivamente para e esquerda ou para a direita, com a velocidade da luz c. De maneira análoga, concluímos que existem soluções da forma

$$B_z(x,t) = g(x \pm ct). \tag{6.18.23}$$

Exemplo: Verifique que $E_y(x,t) = \exp[(x-ct)^2/a^2]$ é uma solução da equação de onda. Qual é o significado físico dessa solução?

Podemos determinar também como estão orientados os vetores $\vec{E}$, $\vec{B}$ e $\vec{v} = c\hat{x}$. Substituindo (6.18.21) e (6.18.23) na lei de Faraday, teremos

$$\frac{df}{du} = \mp c\frac{dg}{du}. \tag{6.18.24}$$

Integrando em u, e usando $f = E_y$ e $g = B_z$, obtemos

$$E_y = \mp cB_z. \tag{6.18.25}$$

Portanto, no caso de uma onda progressiva para a direita (esquerda) quando $E_y > 0$, teremos $B_z > 0$ ($B_z < 0$). Ou seja, a relação

$$\vec{B} \times (c\hat{x}) = \vec{E} \tag{6.18.26}$$

é satisfeita para uma *onda plana progressiva*.

6.19 Energia do campo eletromagnético

O comportamento dinâmico de uma carga q sob a ação dos campos eletromagnéticos é determinado pela *força de Lorentz*

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right). \tag{6.19.1}$$

Quando a força $\vec{F}$ atua ao longo de um deslocamento $d\vec{s} = \vec{v}dt$, o trabalho realizado é

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{v}dt = q\vec{E} \cdot vdt. \tag{6.19.2}$$

(A relação acima mostra que apenas o campo elétrico realiza trabalho.) Portanto, a potência fornecida para uma carga q é,

$$P = \frac{dW}{dt} = q\vec{E} \cdot v. \tag{6.19.3}$$

Se tivermos uma densidade de carga ρ, a potência fornecida para uma carga infinitesimal $dq = \rho dV$ será

$$dP = \vec{E} \cdot \vec{v}\rho dV. \tag{6.19.4}$$

Usando $\vec{J} = \rho\vec{v}$,

$$dP = \vec{E} \cdot \vec{J}dV. \tag{6.19.5}$$

Para um volume finito,

$$P = \int \vec{E} \cdot \vec{J}dV \tag{6.19.6}$$

6.19.1 Vetor de Poynting

Usando a lei de Ampère-Maxwell,

$$\vec{E} \cdot \vec{J} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \cdot \left(\mathrm{rot}\vec{B}\right) - \epsilon_0\vec{E} \cdot \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}. \tag{6.19.7}$$

Usando a relação [6]

$$\vec{E}\cdot\left(\mathrm{rot}\vec{B}\right)-\vec{B}\cdot\left(\mathrm{rot}\vec{E}\right)=-\mathrm{div}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) \tag{6.19.8}$$

e também a lei de Faraday ($\mathrm{rot}\,\vec{E}=-\partial\vec{B}/\partial t$), obtemos [7]

$$\vec{E}\cdot\vec{J}=-\frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial B^2}{\partial t}-\frac{\epsilon_0}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t}-\frac{1}{\mu_0}\mathrm{div}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) \tag{6.19.9}$$

Substituindo (6.19.9) em (6.19.6), teremos

$$P=\int\vec{E}\cdot\vec{J}dV=-\frac{d}{dt}\int\left(\frac{\epsilon_0}{2}E^2+\frac{1}{2\mu_0}B^2\right)-\frac{1}{\mu_0}\int\mathrm{div}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)dV. \tag{6.19.10}$$

É interessante reescrever a relação acima como

$$\frac{d}{dt}\int\left(\frac{\epsilon_0}{2}E^2+\frac{1}{2\mu_0}B^2\right)=-\int\vec{E}\cdot\vec{J}dV-\frac{1}{\mu_0}\int\mathrm{div}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)dV. \tag{6.19.11}$$

a usar o teorema de Gauss no segundo termo do lado direito, obtendo então

$$\frac{d}{dt}\int\left(\frac{\epsilon_0}{2}E^2+\frac{1}{2\mu_0}B^2\right)=-\int\vec{E}\cdot\vec{J}dV-\frac{1}{\mu_0}\int_\Sigma\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)\cdot d\vec{A}. \tag{6.19.12}$$

Definindo a *densidade de energia* do campo eletromagnético como

$$u=\frac{\epsilon_0}{2}E^2+\frac{1}{2\mu_0}B^2, \tag{6.19.13}$$

teremos

$$\frac{du}{dt}=-\int\vec{E}\cdot\vec{J}dV-\frac{1}{\mu_0}\int_\Sigma\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)\cdot d\vec{A}. \tag{6.19.14}$$

A expressão acima mostra que a taxa de variação da densidade de energia se deve em parte ao trabalho que o campo $\vec{E}$ realiza sobre as cargas (primeiro termo do lado direito) e também a um fluxo líquido

$$\vec{S}=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} \tag{6.19.15}$$

para fora ou para dentro de um determinado volume V, através da superfície que delimita esse volume. A grandeza $\vec{S}$ é denominada *vetor de Poynting*

---

[6] Prova:

$$\vec{E}\cdot\left(\mathrm{rot}\vec{B}\right)-\vec{B}\cdot\left(\mathrm{rot}\vec{E}\right)=\varepsilon_{ijk}(E_i\partial_jB_k-B_i\partial_jE_k)=\varepsilon_{ijk}(E_i\partial_jB_k+B_k\partial_jE_i)=\varepsilon_{ijk}\partial_j(E_iB_k)=-\mathrm{div}(\vec{E}\times\vec{B})$$

[7] Usamos também

$$\vec{V}\cdot\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial t}.$$

Vetor de Poynting de uma onda plana

No caso de uma onda plana propagando-se na direção x, teremos, substituindo (6.18.26) em (6.19.15),

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} cB^2 \hat{x} = \frac{1}{\mu_0} \frac{E^2}{c} \hat{x}. \tag{6.19.16}$$

Podemos expressar $\vec{S}$ em termos da densidade de energia. Substituindo $B^2 = E^2/c^2 = \mu_0 \epsilon_0 E^2$ em (6.19.13), teremos

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} \frac{E^2}{c^2} = \epsilon_0 E^2 \tag{6.19.17}$$

Substituindo E^2 dado por (6.19.17) em (6.19.16),

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0 c} u \hat{x} = cu\hat{x}. \tag{6.19.18}$$

Essa expressão mostra claramente que $\vec{S} = cu\hat{x}$ é de fato um fluxo de energia (densidade de corrente de energia).

6.20 Pressão eletromagnética

Consideremos uma superfície de área A, normal à direção x, feita de um material que absorve toda a energia da onda eletromagnética incidente. Vamos supor que a onda eletromagnética propaga-se da esquerda para a direita, ao longo de x, de modo a incidir normalmente sobre a área A. Ao incidir, a onda deve produzir uma força F sobre a superfície absorvente, direcionada da esquerda para a direita. Quando a energia contida em um volume Adx é absorvida pela superfície, ocorre uma variação da energia total dada por $dU = -udV = -u(Adx)$. Como o lado esquerdo está sujeito a uma *força de reação* $-F$, o trabalho realizado é $-Fdx$. Por conservação de energia, devemos ter $dU = -Fdx$, ou seja,

$$Fdx = -dU = d(Axu) = uAdx. \tag{6.20.1}$$

A partir dessa expressão podemos determinar a pressão

$$P = \frac{F}{A} = u = \frac{|\vec{S}|}{c} \tag{6.20.2}$$

exercida sobre a superfície.

Quando a força atua por um intervalo de tempo Δt, há também uma variação do *momento linear* associado à onda. Usando a relação entre a variação do momento e a força,

$$\Delta p = F\Delta t = uA\Delta t. \tag{6.20.3}$$

Como a onda propaga-se com velocidade c, temos $\Delta t = \Delta x/c$. Logo,

$$\Delta p = uA\frac{\Delta x}{c} = \frac{u}{c}\Delta V. \tag{6.20.4}$$

Portanto, temos uma *densidade de momento linear* dada por

$$\mathcal{P} = \frac{u}{c}. \tag{6.20.5}$$

Isso mostra que, no caso de uma onda eletromagnética, a relação entre energia e momento é

$$U = pc. \tag{6.20.6}$$

Na *Teoria de Relatividade Restrita* (Física II), vimos que uma partícula livre de massa m possui energia

$$U = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} = pc\sqrt{1 + \frac{m^2c^2}{p^2}} \tag{6.20.7}$$

No limite $m \to 0$ (ou $mc \ll p$) a relação acima se reduz à $U = pc$, como no caso de uma onda eletromagnética. Assim, uma descrição corpuscular da onda eletromagnética (veremos que isso é possível, e também *necessário* para explicar os fenômenos da *física quântica)*, deve atribuir *massa nula* aos respectivos *corpúsculos*. Na teoria quântica esses corpúsculos são denominados *fótons*. Nessa descrição, fótons de energia $U = pc$ são absorvidos pela superfície de área A.

No caso em que a superfície é totalmente refletora, sabemos da mecânica que o momento transferido é o dobro do caso totalmente absorvente

$$\mathcal{P}_{reflt.} = 2\frac{u}{c}. \tag{6.20.8}$$

6.21 Ondas eletromagnéticas harmônicas

Consideremos uma onda eletromagnética plana propagando-se ao longo da direção x, da esquerda para a direita. Suponhamos que em um dado ponto x o campo elétrico oscile com frequência $f = \omega/2\pi$ e amplitude E. Então,

$$E_y(x,t) = E\cos(\omega t + g(x)). \tag{6.21.1}$$

Para que essa onda seja progressiva, $g(x)$ deve ser uma função linear de x, ou seja $g(x) = -kx + \phi$. Logo,

$$E_y(x,t) = E\cos(kx - \omega t + \phi). \tag{6.21.2}$$

Podemos ver que de fato a equação acima pode descrever uma onda propagando-se da esquerda para a direita. Escrevendo $kx - \omega t + \phi = k(x - \omega/kt + \phi/k)$, vemos que a constante k deve estar relacionada com ω da seguinte forma

$$k = \frac{\omega}{c}. \tag{6.21.3}$$

As equações (6.21.2) e (6.21.3) definem uma onda eletromagnética progressiva harmônica propagando-se para a direita ao longo do eixo x. Analogamente, uma onda harmônica propagando-se para a esquerda possui campo elétrico

$$E_y(x,t) = E\cos(kx + \omega t + \phi). \tag{6.21.4}$$

Os respectivos campos magnéticos, obtidos a partir da equação (6.18.25), são

$$B_z(x,t) = \mp\frac{1}{c}E_y(x,t), \tag{6.21.5}$$

em que o sinal $+$ $(-)$ corresponde à onda propagando-se para a direita (esquerda).

Ondas eletromagnéticas harmônicas são extremamente importantes na descrição de diversos fenômenos relacionados com, por exemplo, o comportamento da luz visível. Em geral, é possível descrever o comportamento da radiação eletromagnética em termos de componentes harmônicas.

No caso da luz visível, Newton foi o primeiro a notar que a luz é composta de diversas componentes harmônicas, que nada mais são do que as diferentes cores produzidas pela passagem da luz por um prisma. Quando uma determinada cor não pode mais ser decomposta em mais componentes, temos uma onda harmônica de frequência bem definida.

Exercício Verifique que (6.21.2) satisfaz a equação de onda.

Para t fixo, a forma da onda dada em (6.21.2) se repete a cada intervalo $\Delta x = \lambda$, tal que

$$k\lambda = 2\pi. \tag{6.21.6}$$

A grandeza λ é denominada *comprimento de onda*. Em termos do comprimento de onda e da frequência $f = \omega/2\pi$, a relação (6.21.3) nos dá

$$c = \lambda f. \tag{6.21.7}$$

Onda estacionária

Consideremos a superposição de duas ondas de mesma amplitude propagando-se em sentidos opostos

$$E_{est}(x,t) = E\cos(kx - \omega t) + E\cos(kx + \omega t) = 2E\cos(\omega t)\cos(kx). \tag{6.21.8}$$

Por ser a superposição de duas soluções de uma equação de onda linear, E_{est} também é uma solução, como pode ser facilmente verificado substituindo (6.21.8) na equação de onda. Vemos que a solução resultante é uma *onda estacionária*.

Densidade de energia, vetor de Poynting e pressão de uma onda harmônica

Vimos que em geral a densidade de energia do campo eletromagnético é dada pela expressão (6.19.17). Portanto, no caso de uma onda harmônica, teremos

$$u = \epsilon_0 E_y(x,t)^2 = \epsilon_0 E^2\cos^2(kx \pm \omega t + \phi). \tag{6.21.9}$$

Tomando o valor médio no período, $1/T\int_0^T u dt$ ($T = 2\pi/\omega$), teremos (veja (6.16.42))

$$\langle u\rangle = \epsilon_0 E^2\langle\cos^2(kx \pm \omega t + \phi)\rangle = \epsilon_0\frac{E^2}{2}. \tag{6.21.10}$$

Usando (6.19.18) e a expressão acima, teremos

$$\langle\vec{S}\rangle = \langle cu\hat{x}\rangle = c\hat{x}\langle u\rangle = c\epsilon_0\frac{E^2}{2}\hat{x}, \tag{6.21.11}$$

para o vetor de Poynting de uma onda que se propaga para a direita. A *intensidade* da onda harmônica é definida como

$$I = c\epsilon_0\frac{E^2}{2}. \tag{6.21.12}$$

Usando (6.20.2) e (6.21.10), a pressão média exercida sobre uma superfície totalmente absorvente, normal à direção de propagação da onda, será

$$\langle P\rangle = \langle u\rangle = \epsilon_0\frac{E^2}{2}. \tag{6.21.13}$$

No caso de uma superfície refletora, teremos

$$\langle P_{reflet.}\rangle = 2\langle P\rangle = \epsilon_0 E^2. \tag{6.21.14}$$

6.22 Interferência e Difração

OBS: O presente capítulo encontra-se em desenvolvimento.

6.23 A Natureza da Luz

6.23.1 Comportamento Ondulatório e Corpuscular

Vimos que uma onda eletromagnética propaga-se no vácuo com a velocidade da luz $c = 299\,794\,458$ m/s. Além de todas as aplicações tecnológicas no que se refere à transmissão de sinais, esse fato desencadeou também um entendimento mais fundamental sobre a natureza da luz[8], com importantes consequências para o funcionamento de instrumentos óticos bem como para inovações mais recentes tais como o laser, fibras ópticas e diversas técnicas de imagens médicas.

Historicamente, a possibilidade de a luz possuir uma natureza ondulatória foi evidenciada em torno de 1665, embora Newton (1642-1727), assim como outros cientistas da época, preferisse um descrição *corpuscular* da luz (luz composta de partículas), o que seria mais condizente com suas recentes descobertas sobre o comportamento mecânico de partículas.

Com o desenvolvimento da Teoria Quântica, em torno de 1930, a natureza da luz foi ainda mais aprofundada, unindo o caráter ondulatório e corpuscular[9] , embora esse último não seja o mesmo advogado por Newton, tendo sido descoberto a partir de fatos experimentais que se tornaram tecnologicamente acessíveis apenas no final do século 19. Sabemos hoje que a energia da onda eletromagnética é subdividida (*quantizada*) em pacotes (os fótons) mínimos possuindo energia $E = h\,f$, onde f é a frequência da onda e $h = 6,626068 \times 10^{-34}\mathrm{m^2kg/s}$ é a constante de Planck. Essa foi uma das mais importantes decobertas de Einstein. Aprenderemos mais sobre isso quando tratarmos da Teoria Quântica.

A seguir discutiremos diversas consequências e aplicações do comportamento ondulatório da luz.

6.24 Interferência

Uma das consequências mais importantes exibidas pelo comportamento ondulatório é o fenômeno de *interferência*. Se de fato a luz é uma onda eletromagnética, então deve ser possível observar os diversos fenômenos devidos à interferência. Vejamos como isso é possível.

Sabemos que os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ satisfazem o *princípio de superposição*. Por exemplo, quando conhecemos os campos $\vec{E}_i(\vec{r},t)$, $i = 1, 2, 3\cdots$, o campo resultante é

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_1(\vec{r},t) + \vec{E}_2(\vec{r},t) + \vec{E}_3(\vec{r},t) + \cdots , \tag{6.24.1}$$

e analogamente para o campo $\vec{B}$. Isso segue simplesmente da linearidade as equações de Maxwell, ou seja, se $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$ são duas soluções, então $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$ também é uma solução. Vamos aplicar isso ao caso de duas ondas eletromagnéticas harmônicas que se propagam em uma mesma direção. Por exemplo, as componentes y de seus campos elétricos são

$$\left\{ \begin{array}{rcl} E_1(x,t) & = & A_1 \Re\mathrm{exp}[i(kx - \omega t + \delta_1)] = A_1 \cos(kx - \omega t + \delta_1) \\ E_2(x,t) & = & A_2 \Re\mathrm{exp}[i(kx - \omega t + \delta_2)] = A_2 \cos(kx - \omega t + \delta_2) \end{array} \right. . \tag{6.24.2}$$

[8] A *luz visível* é composta de ondas eletromagnéticas com comprimentos de onda λ tais que 4×10^{-7} m $< \lambda < 7 \times 10^{-7}$ m.

[9] Essa unificação também foi estendida para todas as partículas; a chamada *dualidade onda-partícula*.

Ou seja, duas ondas se propagando para a direita com velocidade $v = \omega/k$, amplitudes A_1 e A_2 e constantes de fase δ_1 e δ_2. Note que as duas ondas diferem apenas nas suas respectivas constantes de fase e amplitudes. Esse exemplo exibe três características essenciais para que o fenômeno de interferência seja observado, a saber:

1. O princípio de superposição é válido.
2. As ondas são *monocromáticas*, ou seja, possuem o mesmo comprimento de onda.
3. A *fases* $kx - \omega t + \delta_1$ e $kx - \omega t + \delta_2$ mantêm uma relação constante entre si. Essa propriedade é denominada *coerência*. Quando essa propriedade é satisfeita, uma vez conhecido o valor instantâneo de $\vec{E}_1$, é possível prever $\vec{E}_2$.

No caso em que a onda se propaga no vácuo, sabemos que velocidade de propagação é

$$c = \frac{\omega}{k} = \lambda f. \tag{6.24.3}$$

A frequência f é determinada pela frequência característica da *fonte* que produz as ondas. Quando a onda se propaga no interior de certos meios materiais dielétricos (e.g. vidro, água, plástico, óleo) tais que permissividades ϵ e μ possam ser atribuidas, sua velocidade será

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} < c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}, \tag{6.24.4}$$

Podemos definir o *índice de refração* como

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} \tag{6.24.5}$$

Portanto, o comprimento de onda no interior de um tal meio material será

$$\lambda_n = \frac{v}{f} = \frac{c}{nf} = \frac{\lambda}{n}, \tag{6.24.6}$$

o qual é menor do que o comprimento de onda no vácuo.

Interferência de duas ondas

Vejamos primeiramente a matemática envolvida na interferência. Substituindo (6.24.2) em (6.24.1), obtemos

$$E = E_1 + E_2 = \Re\left[\exp[i(kx - \omega t + \delta_1)]\underbrace{(A_1 + A_2\exp(i\delta_{12}))}_{\equiv Z}\right], \tag{6.24.7}$$

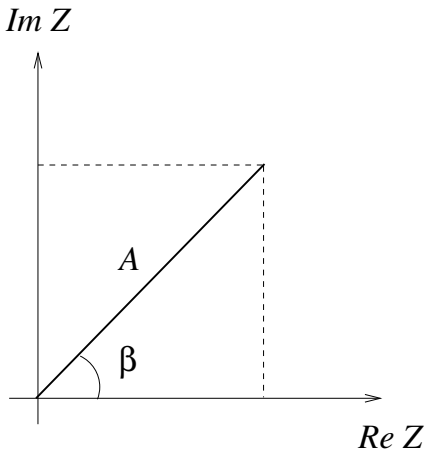
onde introduzimos a *diferença de fase*

$$\delta_{12} = \delta_2 - \delta_1. \tag{6.24.8}$$

O número complexo $Z \equiv (A_1 + A_2\exp(i\delta_{12}))$ pode ser reescrito na forma polar, como

$$Z = A\exp(i\beta) = A(\cos(\beta) + i\mathrm{sen}(\beta)) \tag{6.24.9}$$

com A e β reais. A é o *módulo* de Z. Logo, de acordo com a figura abaixo,



$$\begin{aligned} |Z|^2 = A^2 &= (\Re Z)^2 + (\Im Z)^2 = (A_1 + A_2\cos(\delta_{12}))^2 + (A_2\text{sen}(\delta_{12}))^2 \\ &= A_1^2 + 2A_1A_2\cos(\delta_{12}) + A_2^2\cos^2(\delta_{12}) + A_2^2\text{sen}^2(\delta_{12}) \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\delta_{12}). \end{aligned} \tag{6.24.10}$$

Portanto

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\delta_{12})}} \tag{6.24.11}$$

O ângulo β indicado na figura acima é

$$\beta = \arctan\left(\frac{\Im Z}{\Re Z}\right) = \arctan\left(\frac{A_2\text{sen}(\delta_{12})}{A_1 + A_2\cos(\delta_{12})}\right). \tag{6.24.12}$$

Portanto, a combinação das duas ondas resulta em

$$E = E_1 + E_2 = A\cos(kx - \omega t + \delta_1 + \beta). \tag{6.24.13}$$

Note que A em (6.24.11) é a *amplitude da onda resultante*. Portanto, usando (6.21.12), a intensidade da onda resultante será (substituindo c por v),

$$I = v\epsilon\frac{E^2}{2} = v\epsilon\frac{A_1^2}{2} + v\epsilon\frac{A_2^2}{2} + 2v\epsilon\frac{A_1\,A_2}{2}\cos(\delta_{12}). \tag{6.24.14}$$

Ou seja,

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}\cos(\delta_{12})}, \tag{6.24.15}$$

em que I_1 e I_2 são as intensidades das ondas individuais.

A relação (6.24.15) mostra um dos mais importantes fenômenos ondulatórios. Ele revela que a intensidade resultante pode ser diferente da soma das duas intensidades associadas a cada onda. Devido ao último termo em (6.24.15) pode ocorrer até mesmo uma *interferência destrutiva*, quando a intensidade total se anula em uma determinada região. Por exemplo, considerando o caso em que as duas ondas possuem a mesma amplitude, teríamos $I_1 = I_2$, resultando em uma amplitude resultante igual a $2I_1(1 + \cos(\delta_{12})$. Portanto, se a diferença de fase for $\delta_{12} = \pi$, a intensidade resultante será nula. Por outro lado, quando $\delta_{12} = 0$ a intensidade resultante é o dobro de $2I_1$. Esses dois casos extremos são claramente incompatíveis com a interpretação corpuscular clássica (mas não a quântica, como veremos).

Exercício: Mostre que as amplitudes resultantes máxima e mínima são, respectivamente, $(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$ e $(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$. Determine os correspondentes valores de δ_{12}.

Em geral, teremos

$$\begin{aligned} (\text{defasagem construtiva}) &= 2\pi n \qquad (6.24.16a) \\ (\text{defasagem destrutiva}) &= 2\pi(n+1/2), \qquad (6.24.16b) \end{aligned}$$

com $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \cdots$.

Diferença de fase devida a caminhos diferentes

Uma diferença de fase pode ser produzida quando duas ondas interferem em um dado ponto após terem percorrido *distâncias distintas* a partir das respectivas fontes. Quando as respectivas distâncias às fontes são r_1 e r_2, então, no ponto onde as ondas interferem teremos [10],

$$\begin{aligned} E_1 &= A_1 \cos(kr_1 - \omega t + \delta_1) \\ E_2 &= A_2 \cos(kr_2 - \omega t + \delta_2) \end{aligned} . \qquad (6.24.17)$$

(Note que as ondas interferem, obviamente, *no mesmo ponto* x_P mas este ponto dista r_1 e r_2 das respectivas fontes.) Então a diferença de fase, no ponto onde as ondas interferem, é agora

$$\delta = k(r_2 - r_1) + \delta_{12}. \qquad (6.24.18)$$

Ou seja, mesmo em situações especiais, quando $\delta_{12} = 0$, ainda assim teremos uma defasagem de caminho

$$\delta_c = k(r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta r. \qquad (6.24.19)$$

Usando as condições de interferência construtiva e destrutiva, obtemos

$$(\Delta r)_{constr.} = n\lambda \quad \text{ou} \quad (\Delta r)_{destr.} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda. \qquad (6.24.20)$$

Ou seja, quando a diferença de caminho é um número inteiro ou semi-inteiro de comprimentos de onda, temos respectivamente interferência construtiva ou destrutiva.

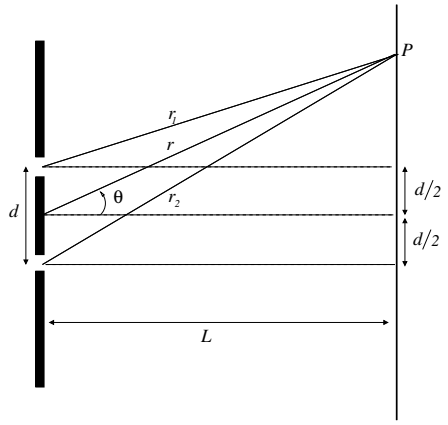
Ponto de Poisson

Um exmplo bastante simples, porém historicamente crucial para refutar a teoria corpuscular da luz, é o chamado "Experimento do Ponto de Poisson". A figura abaixo (???) mostra um disco sobre o qual incide um feixe de luz que se propaga paralelamente ao eixo do disco. De acordo com a teoria corpuscular da luz, seria produzida uma *sombra* circular em uma tela paralela ao plano do disco. Já a teoria ondulatória prevê uma interferência construtiva no ponto de intersecção do eixo do disco com o plano da tela, produzindo ali um ponto brilhante. Isso pode ser entendido, notando que no ponto de intersecção do eixo do disco com o plano da tela, a defasagem entre o caminho percorrido pelas ondas que partem das extremidades do disco (??? ver Huygens) é nula. Em 1818, Poisson, defendendo a teoria corpuscular da luz, argumentou que se de fato a luz fosse uma onda, tal ponto brilhante deveria ter sido observado. De fato, a teoria ondulatória de Huygens e Fresnel fazia precisamente esse tipo de previsão. Um experimento cuidadoso foi efetuado por Arago, verificando a existência do ponto brilhante, o qual ficou conhecido como *Mancha de Poisson* ou *Ponto de Arago*, ou ainda *Ponto Brilhante de Fresnel*.

[10] Há aqui uma aproximação, envolvendo ondas esféricas, que será identificada e justificada mais tarde. As amplitudes A_1 e A_2 devem diminuir com o inverso da distância r_1.

Experimento de Young

A figua abaixo mostra um anteparo possuindo duas fendas, separadas por uma distância d, e uma tela situada a uma distância $L \gg d$ do anteparo. O anteparo é iluminado por uma fonte monocormática de luz possuindo comprimento de onda λ, de modo que a luz passando por cada uma das fendas interfere em um ponto P qualquer da tela. Este tipo de aparato é denominado *experimento de Young* e foi concebido por Young ($\sim$ 1801) como uma forma de verificar experimentalmente se de fato a luz possui um caráter ondulatório.



Baseado no que vimos anteriormente, é fácil entender que, devido à interferência, serão produzidas *franjas* brilhantes e escuras na tela, *caso a luz seja de fato uma onda.* Realmente, usando (6.24.20), no caso especial de tela distante ($L \approx r \gg d$), de modo que [11]

$$r_2 - r_1 \approx d\text{sen}\theta. \tag{6.24.21}$$

teremos então, sobre o ponto P, uma franja brilhante ou escura, respectivamente para

$$\text{sen}\theta_{bril.} = n\frac{\lambda}{d} \quad \text{ou} \quad \text{sen}\theta_{esc.} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{d}. \tag{6.24.22}$$

Esse tipo de fenômeno, observado em 1801 por Young, será demonstrado em sala de aula.

Podemos expressar a posição das franjas em termos da coordenada y do ponto P. Usando

$$\frac{y}{L} = \tan\theta \approx \text{sen}\theta, \tag{6.24.23}$$

[11] Prova:

As distâncias entre P e cada uma das fendas são r_1 e r_2. O ponto médio, entre as fendas, está a uma distância r de P. Logo, da figura, teremos

$$r_1^2 = \left(r\text{sen}\theta - \frac{d}{2}\right)^2 + (r\cos\theta)^2 = r^2 + \frac{d^2}{4} - rd\text{sen}\theta$$

e

$$r_2^2 = \left(r\text{sen}\theta + \frac{d}{2}\right)^2 + (r\cos\theta)^2 = r^2 + \frac{d^2}{4} + rd\text{sen}\theta$$

Como $r \gg d$,

$$r_{2,1} \approx \left(r^2 \pm rd\text{sen}\theta\right)^{\frac{1}{2}} \approx r\left(1 \pm \frac{1}{2}\frac{d}{r}\text{sen}\theta\right).$$

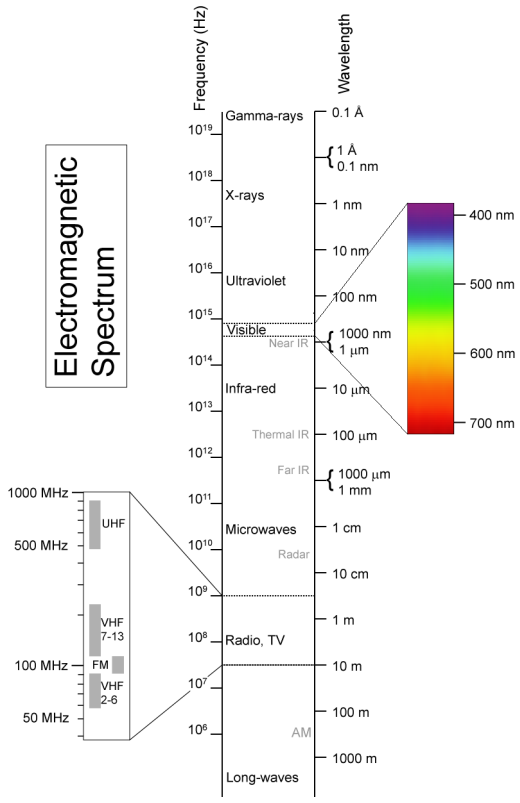
Logo

$$r_2 - r_1 \approx d\text{sen}\theta$$

teremos

$$y_{bril.} = n\frac{\lambda L}{d} \quad \text{ou} \quad y_{esc.} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda L}{d}. \tag{6.24.24}$$

Note que y é positivo ou negativo respectivamente para valores positivos ou negativos de n. Em $y = 0$ há uma franja brilhante. A posição da primeira franja escura é $y_{esc_1} = \frac{\lambda L}{2d}$. Por exemplo, quando $L = 2$ m, $d = 10^{-3}$ m e $\lambda = 7 \times 10^{-7}$ m $= 700$ nm (luz vermelha; veja a figura abaixo)[12]), teremos $y_{esc_1} = 0,7$ mm. Já a primeira franja brilhante estará em $y_{bri_1} = 1,4$ mm (verifique!). Isso mostra que o efeito de interferência para a luz visível pode facilmente passar despercebido.



Interferência de N Fontes Coerentes

Interferência em Películas Finas

Condições de contorno na incidência normal.

[12] Obtida em http://en.wikipedia.org/wiki/Electromagnetic_spectrum

Interferômetro de Michelson

6.24.1 Difração

Princípio de Huygens

Difração de Fresnel e Difração de Fraunhofer

Difração Produzida por uma Fenda Simples

Intensidade na Difração Produzida por uma Fenda Simples

Rede de Difração

Difração de Raios X

Orifícios Circulares e Poder de Resolução

6.25 Fótons, Elétrons e Átomos

6.26 Teoria Quântica

6.27 Estrutura Atômica

Apêndice A

Conservação de momento na relatividade

A.1 Exercício

Demonstre que a definição de momento em (3.7.15) é tal que

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{p}\,'}{\mathrm{d}t'} = 0. \tag{A.1.1}$$

Ou seja, se o momento é conservado em um referencial, será conservado em qualquer outro.

Solução:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}\,'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}\,'}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \frac{1}{\gamma\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)}\frac{\mathrm{d}\vec{p}\,'}{\mathrm{d}t} = \frac{m}{\gamma\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\vec{u}\,'}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}. \tag{A.1.2}$$

Usando as equações (3.5.67) e (3.5.70), teremos

$$\begin{aligned}
u'^2 = u_x'^{\,2} + u_y'^{\,2} + u_z'^{\,2} &= \frac{1}{\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)^2}\left[(u_x - v)^2 + \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\underbrace{\left(u_y^2 + u_z^2\right)}_{u^2-u_x^2}\right] \\
&= \frac{1}{\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)^2}\left[u_x^2 - 2u_x v + v^2 + u^2 - u_x^2 - \frac{v^2u^2}{c^2} + \frac{v^2u_x^2}{c^2}\right] \\
&= \frac{1}{\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)^2}\left[\left(c - \frac{u_x v}{c}\right)^2 - c^2 + v^2 + u^2 - \frac{v^2u^2}{c^2}\right] \\
&= \frac{c^2}{\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)^2}\left[\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)^2 - \left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\right] \\
&= c^2\left[1 - \frac{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)^2}\right]
\end{aligned} \tag{A.1.3}$$

Portanto,

$$\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}} = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{1}{1-\frac{u_x v}{c^2}} = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\frac{1}{\gamma\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)} \tag{A.1.4}$$

Substituindo (A.1.4) em (A.1.2), obtemos

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}\,'}{\mathrm{d}t'} = \frac{m}{1-\frac{u_x v}{c^2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\vec{u}\,'\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}. \tag{A.1.5}$$

Usando novamente a equação (3.5.67), teremos

$$\frac{\mathrm{d}p'_x}{\mathrm{d}t'} = \frac{m}{1-\frac{u_x v}{c^2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{u_x - v}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{m}{1-\frac{u_x v}{c^2}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{u_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - v\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right) = \frac{1}{1-\frac{u_x v}{c^2}}\left(\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} - mv\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}.\right) \tag{A.1.6}$$

Usando a equação (3.7.71), podemos escrever

$$mv\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{v}{c^2}\vec{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \tag{A.1.7}$$

Assim,

$$\frac{\mathrm{d}p'_x}{\mathrm{d}t'} = \frac{1}{1-\frac{u_x v}{c^2}}\left(\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} - \frac{v}{c^2}\vec{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right). \tag{A.1.8}$$

Para as outras duas componentes as equações (A.1.5) e (3.5.70) resultam em

$$\frac{\mathrm{d}p'_y}{\mathrm{d}t'} = \frac{m}{\gamma\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{u_y}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\gamma\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{mu_y}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\gamma\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)}\frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t} \tag{A.1.9}$$

e

$$\frac{\mathrm{d}p'_z}{\mathrm{d}t'} = \frac{m}{\gamma\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{u_z}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\gamma\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{mu_z}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\gamma\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)}\frac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t} \tag{A.1.10}$$

As três últimas equações levam diretamente à (A.1.1). Esta dedução também mostra que se tivéssemos empregado a definição não relativística de momento, $\vec{p} = m\vec{u}$, a implicação (A.1.1) não seria verdadeira.

Apêndice B

Teorema de Equipartição de Energia

Nosso ponto de partida é a *expressão geral* para a fração de moléculas possuindo coordenadas $q_1, q_2, \ldots, q_f$ e momentos $p_1, p_2, \ldots, p_f$ no intervalo
$dq_1 dq_2 \ldots dq_f dp_1 dp_2 \ldots dp_f$; f é o número de *graus de liberdade do sistema*. Como vimos anteriormente, esta fração é dada por [1]

$$F(q_1, \ldots, q_f; p_1, \ldots, p_f) = C\mathrm{e}^{-\beta E(q_1, q_2, \ldots, q_f; p_1, p_2, \ldots, p_f)} dq_1 \ldots dq_f dp_1 \ldots dp_f, \tag{B.0.1}$$

com $\beta \equiv 1/k_B T$. Suponhamos, como é o caso em diversos exemplos (partícula livre, oscilador, corpo rígido em rotação, etc), que

$$E = \epsilon_i(p_i) + E'(q_1, q_2, \ldots, q_f; p_1, p_2, \ldots, p_f). \tag{B.0.2}$$

Na expressão acima, ϵ_i só depende do momento p_i e E' depende de todos os momentos, *exceto* p_i.

O valor médio de ϵ_i é

$$\langle \epsilon_i \rangle = \frac{\int \mathrm{e}^{-\beta E(q_1, q_2, \ldots, q_f; p_1, p_2, \ldots, p_f)}\, \epsilon_i\, dq_1 dq_2 \ldots dq_f dp_1 dp_2 \ldots dp_f}{\int \mathrm{e}^{-\beta E(q_1, q_2, \ldots, q_f; p_1, p_2, \ldots, p_f)}\, dq_1 dq_2 \ldots dq_f dp_1 dp_2 \ldots dp_f}. \tag{B.0.3}$$

Os limites de integração nas integrais acima se estendem para todos os possíveis valores das coordenas e momentos.

Usando (B.0.2), a equação acima pode ser escrita como

$$\langle \epsilon_i \rangle = \frac{\int \mathrm{e}^{-\beta(\epsilon_i + E'(q_1, q_2, \ldots, q_f; p_1, p_2, \ldots, p_f)}\, \epsilon_i\, dq_1 dq_2 \ldots dq_f dp_1 dp_2 \ldots dp_f}{\int \mathrm{e}^{-\beta E(q_1, q_2, \ldots, q_f; p_1, p_2, \ldots, p_f)}\, dq_1 dq_2 \ldots dq_f dp_1 dp_2 \ldots dp_f}. \tag{B.0.4}$$

Usando $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$, teremos

$$\langle \epsilon_i \rangle = \frac{\int \mathrm{e}^{-\beta\epsilon_i} \epsilon_i dp_i \int' \mathrm{e}^{E'(q_1, q_2, \ldots, q_f; p_1, p_2, \ldots, p_f)}\, dq_1 dq_2 \ldots dq_f dp_1 dp_2 \ldots dp_f}{\int \mathrm{e}^{-\beta\epsilon_i} dp_i \int' \mathrm{e}^{E'(q_1, q_2, \ldots, q_f; p_1, p_2, \ldots, p_f)}\, dq_1 dq_2 \ldots dq_f dp_1 dp_2 \ldots dp_f}. \tag{B.0.5}$$

Na expressão acima, $\int'$ representa a integração sobre todas as coordenadas e momentos, exceto p_i. Como as $\int'$ são as mesmas no numerador e no denominador, teremos

$$\langle \epsilon_i \rangle = \frac{\int \mathrm{e}^{-\beta\epsilon_i} \epsilon_i dp_i}{\int \mathrm{e}^{-\beta\epsilon_i} dp_i} \tag{B.0.6}$$

[1] Seção 6.6 do Statistical Physics, F. Reif.

Podemos simplificar ainda mais o resultado, escrevendo a integral no numerador como um derivada em relação à β. Ou seja,

$$\langle \epsilon_i \rangle = \frac{-\frac{\partial}{\partial \beta} \int \mathrm{e}^{-\beta \epsilon_i} dp_i}{\int \mathrm{e}^{-\beta \epsilon_i} dp_i}. \tag{B.0.7}$$

Ou ainda,

$$\langle \epsilon_i \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\beta \epsilon_i} dp_i \right) \tag{B.0.8}$$

Vamos considerar agora o caso em que ϵ_i é uma função quadrática de p_i. Por exemplo,

$$\epsilon_i = b p_i^2; \quad b = \text{ constante}. \tag{B.0.9}$$

Fazendo a mudança de variável $x = \beta^{1/2} p_i$ na integral (B.0.8), obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\beta \epsilon_i} dp_i = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\beta b p_i^2} dp_i = \beta^{(-1/2)} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-bx^2} dx. \tag{B.0.10}$$

Então,

$$\begin{aligned} \log \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\beta \epsilon_i} dp_i \right) &= \log \left(\beta^{(-1/2)} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-bx^2} dx \right) \\ &= -\frac{1}{2} \log(\beta) + \log \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-bx^2} dx \right). \end{aligned} \tag{B.0.11}$$

Substituindo a equação acima em (B.0.8), teremos

$$\langle \epsilon_i \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \left[-\frac{1}{2} \log(\beta) + \log \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-bx^2} dx \right) \right] = \frac{1}{2\beta}. \tag{B.0.12}$$

Portanto,

$$\langle \epsilon_i \rangle = \frac{1}{2} k_B T. \tag{B.0.13}$$

Observe que embora o nosso ponto de partida envolva uma integral multidimensional no espaço de fase, fomos capazes chegar ao resultado (B.0.13), a partir de (B.0.1), sem ter que calcular explicitamente uma só integral. Note também que o resultado é independente do coeficiente do termo quadrático (isso é faz sentido?).

Podemos agora considerar a possibilidade

$$E = \delta_i(q_i) + E^{\star}(q_1, q_2, \ldots, q_f; p_1, p_2, \ldots, p_f) \tag{B.0.14}$$

em que δ_i só depende da coordenada q_i e $E^{\star}$ depende de todas as coordenadas, *exceto* q_i. É fácil ver que não é preciso refazer todos os passos acima; basta trocar em todas as passagens p_i por q_i, de modo que

$$\langle \delta_i \rangle = \frac{1}{2} k_B T. \tag{B.0.15}$$

Portanto, podemos afirmar que: Se um sistema, descrito pela mecânica clássica, está em equilíbrio a temperatura absoluta T, cada termo quadrático na função energia possui um valor médio igual a $1/2 k_B T$. Esse é o enunciado do teorema de equipartição de energia, que provamos acima.

Exercício: Generalize este resultado para o caso em que

$$\epsilon_i(p_i) = b p_i^s. \tag{B.0.16}$$

Note que os dois ingredientes que entram na prova do teorema de equipartição são o postulado básico da mecânica estatística e a descrição do comportamento dinâmico das partículas em termos da mecânica clássica. Assim, se pudermos apontar uma inconsistência entre o resultado do teorema e o que é observado experimentalmente, podemos considerar a possibilidade de que um dos ingredientes não constitui a correta descrição da natureza. Levando em conta que o postulado da mecânica estatística parece ser bastante geral, a eventual contradição deve ser resolvida considerando a modificação das leis microscópicas. De fato, sabemos que a correta descrição é em termos da Mecânica Quântica.

Para ver que de fato a descrição clássica é problemática, considere um oscilador harmônico de massa m e constante elástica k, em equilíbrio com um banho térmico a temperatura T. De acordo com a descrição clássica, o teorema de equipartição de energia, provado acima, prevê que a energia média do oscilador será k_BT, *independentemente de qual seja a constante elástica* k. De fato, mesmo com uma constante elástica muito grande (tendendo a infinito) a energia média dependerá apenas da temperatura (veja a equação (B.0.12)). Mas isso não pode ser verdade; um oscilador infinitamente rígido estaria completamente "congelado" para qualquer temperatura.

Veremos mais adiante [2] que a descrição quântica do oscilador leva a uma energia média que depende da constante elástica e da massa do oscilador, dada por

$$\langle \epsilon(\omega) \rangle = \frac{\hbar\omega}{\mathrm{e}^{\frac{\hbar\omega}{k_BT}} - 1}, \tag{B.0.17}$$

onde $\omega = \sqrt{k/m}$ é a frequência natural do oscilador. A expressão acima mostra que na região $\omega \gg k_BT/\hbar$, ou seja, k *relativamente grande*, a energia média tende a zero. Por outro lado, quando a energia térmica é muito maior do que o quantum de energia, $k_BT \gg \hbar\omega$, a energia média tende para o valor clássico[3]. Há uma *região de transição* entre o regime clássico e quântico, quando $k_BT \approx \hbar\omega$.

A descrição quântica do oscilador é crucial para descrever corretamente a radiação térmica, ou radiação de corpo negro, levando à famosa fórmula de Planck para o espectro de densidade de energia da radiação térmica. Os detalhes estão aqui.

[2] Clique aqui para ver os detalhes.

[3]
$$\langle \epsilon(\omega) \rangle = \frac{\hbar\omega}{\mathrm{e}^{\frac{\hbar\omega}{k_BT}} - 1} \approx \frac{\hbar\omega}{1 + \frac{\hbar\omega}{k_BT} - 1} = \frac{\hbar\omega}{\frac{\hbar\omega}{k_BT}} = k_BT. \tag{B.0.18}$$

Apêndice C

Distribuição de Maxwell

Derivação 1

$$f_1(v_x)f_2(v_y)f_3(v_z) = F(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \tag{C.0.1}$$

Tomando a derivada em relação a v_x, teremos

$$\frac{f_1' F}{f_1} = 2v_x F'. \tag{C.0.2}$$

Ou seja,

$$\frac{f_1'}{2v_x f_1} = \frac{F'}{F}. \tag{C.0.3}$$

Portanto, a única maneira de compatibilizar essa igualdade (o lado esquerdo só pode depender de v_x, mas o lado direito é uma função de v_x, v_y e v_z), é tomar ambos os lados iguais a uma constante. Ou seja,

$$\frac{f_1'}{2v_x f_1} = A. \tag{C.0.4}$$

Resolvendo a equação diferencial,

$$f_1(v_x) = C\mathrm{e}^{Av_x^2}. \tag{C.0.5}$$

Levando em conta a isotropia da distribuição de velocidades (mesma constante A para as três distribuições), teremos

$$F(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = C\mathrm{e}^{A(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}. \tag{C.0.6}$$

Fisicamente, a constante A deve ser negativa, uma vez que a distribuição deve ser normalizável (sua integral deve ser finita).

Derivação 2

Tomando o logaritmo de (C.0.1), teremos

$$\phi(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \psi(v_x^2) + \psi(v_y^2) + \psi(v_z^2), \tag{C.0.7}$$

em que $\phi = \log(F)$ e $\psi = \log(f)$ ($f = f_1 = f_2 = f_3$). Portanto ϕ deve ser uma função linear. Logo,

$$\psi(v_i^2) = -\alpha v_i^2 + \beta; \quad i = x, y, z. \tag{C.0.8}$$

Temos assim o resultado dado em (C.0.6) com $A = -\alpha$ e $C = \exp(\beta)$, ou seja

$$F = \mathrm{e}^{\phi} = C\mathrm{e}^{-\alpha v^2}. \tag{C.0.9}$$

Apêndice D

Formulas e tabelas de constantes físicas

D.1 Teorema Binomial

$$(x+y)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^{r-k} y^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k y^{r-k}, \tag{D.1.1}$$

onde

$$\binom{r}{k} = \frac{r\,(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}. \tag{D.1.2}$$

Para $r = n$, com n inteiro,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}. \tag{D.1.3}$$

D.2 Função exponencial

D.2.1 O limite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ quando $n \to \infty$

Usando o teorema binomial,

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots \\ &= 1 + \frac{n}{n} + \frac{1}{2!}\left(\frac{n(n-1)}{n^2}\right) + \frac{1}{3!}\left(\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\right) + \ldots .\end{aligned} \tag{D.2.1}$$

Quando n é grande, teremos $n(n-1) \approx n^2$, $n(n-1)(n-2) \approx n^3$, ... Ou seja, com n grande, cada um dos termos na soma acima torna-se independente de n (as partes dependentes de n vão a zero quando $n \to \infty$). Assim, obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \tag{D.2.2}$$

O valor numérico da soma (convergente) acima é o número e $= 2,71828\ldots$ [1].

[1] Essa precisão é atingida com $n = 8 \times 10^5$. Verifique!

D.2.2 A função e^x

Usando o resultado acima, podemos escrever [2]

$$\mathrm{e}^x = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{(nx)}. \tag{D.2.3}$$

Usando novamente o teorema binomial,

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{(nx)} &= 1+(nx)\frac{1}{n}+\frac{(nx)[(nx)-1]}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{(nx)[(nx)-1][(nx)-2]}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots \\ &= 1+\frac{nx}{n}+\frac{1}{2!}\left(\frac{nx(nx-1)}{n^2}\right)+\frac{1}{3!}\left(\frac{nx(nx-1)(nx-2)}{n^3}\right)+\ldots.\end{aligned} \tag{D.2.4}$$

Para n grande, teremos $nx(nx-1)\approx n^2x^2$, $nx(nx-1)(nx-2)\approx n^3x^3$, ... Ou seja, com n grande, cada um dos termos na soma acima torna-se independente de n (como anteriormente, as partes dependentes de n vão a zero quando $n\to\infty$). Assim, obtemos

$$\mathrm{e}^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots \tag{D.2.5}$$

D.2.3 Derivadas de e^x

$$\frac{d}{dx}\mathrm{e}^x = 0+1+\frac{2x}{2!}+\frac{3x^2}{3\times 2!}+\frac{4x^3}{4\times 3!}+\cdots = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots = \mathrm{e}^x. \tag{D.2.6}$$

Ou seja, a função $f(x)=\mathrm{e}^x$ é solução da equação

$$\frac{d}{dx}f(x) = f(x). \tag{D.2.7}$$

Derivando a equação acima mais uma vez, também obtemos

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = f(x). \tag{D.2.8}$$

Em geral,

$$\frac{d^p}{dx^p}f(x) = f(x); \quad p=1,\ 2,\ 3,\ldots \tag{D.2.9}$$

D.2.4 Integral de e^x

É imediato que

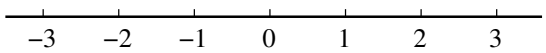
$$\int \mathrm{e}^x\ dx = \mathrm{e}^x. \tag{D.2.10}$$

[2] Supondo que exponenciar comuta com o limite.

D.2.5 Números complexos

Baseado nas notas online de Michael Fowler[3].

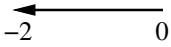
Números podem ser representados em uma reta como mostra afigura abaixo.



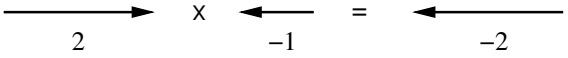
Não apenas os inteiros, mas também os racionais (tais como 1/2 ou 5/3) ou irracionais ($\sqrt{2}$, π, etc), possuem um lugar na reta mostrada acima.

É interessante considerar uma representação mais geral, em que os números são representados por um segmento orientado da origem até o número (semelhante a um vetor). Por exemplo, o número 1 é representado como na figura abaixo

e o número -2 como



A operação de multiplicação também pode ser representada graficamente. Por exemplo, a figura abaixo mostra a multiplicação de 2 por -1.



Observe que multiplicar por -1 produz uma rotação de 180 graus no "vetor" 2.

Vejamos agora a operação de extrair a raiz quadrada. Por exemplo, sabemos que raízes de 4 são 2 e -2. Na representação gráfica, $(-2) \times (-2)$ dobra o comprimento do vetor -2 e gira o resultado de 180 graus. Essa maneira complicada de visualizar a multiplicação será recompensada logo a seguir.

A representação dos números como acima descrito, encontra limitações quando lidamos com equações não lineares. Por exemplo, a equação

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{D.2.11}$$

tem soluções

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{D.2.12}$$

O que fazer quando a $b^2 - 4ac < 0$? Em alguns problemas físicos podemos afirmar que não há solução. Por exemplo, se arremessarmos um bola para cima com 10 m/s e perguntarmos quando ela atingirá 20 m (tomando $g = 10\text{m/s}^2$), a solução da equação quadrática para t possuirá um número negativo dentro da raiz quadrada. Isso mostra que a questão não faz sentido. No entanto, existem vários problemas físicos nos quais a raiz quadrada de um número negativo possui um significado físico.

A situação mais simples seria uma equação da forma

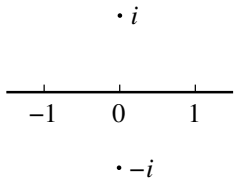
$$x^2 + 1 = 0, \tag{D.2.13}$$

cuja solução seria $x = \pm\sqrt{-1}$. Para dar sentido a essa solução, consideremos em maior detalhe o exemplo do método de multiplicação de $(-2) \times (-2)$. Cada um dos dois sinais $-$ pode ser visto

[3] http://galileo.phys.virginia.edu/classes/152.mf1i.spring02/ComplexNumbers.htm

como um operação de rotação de 180 graus. A combinação de duas operações (dois sinais) é então uma rotação de 360 graus; ou seja, nenhuma rotação. De maneira semelhante podemos representar -1 como a operação $-$ atuando no vetor 1. Essa operação faz o "vetor" 1 girar de 180 graus. Para dar sentido à raiz de -1, devemos então encontrar uma operação tal que, sendo aplicada duas vezes, produz um giro de 180 graus. Com essa formulação, fica claro que a operação procurada é aquela que produz uma rotação de 90 graus.

Porém, uma rotação de 90 graus produz um número *fora da reta*. Números assim produzidos (rotação 90 graus a partir de um número na reta) são chamados de números imaginários puros. A unidade imaginária é representada por $i \equiv \sqrt{-1}$. A figura abaixo mostra a representação gráfica.



Qualquer raiz de um número negativo pode agora ser escrita em termos de $i \equiv \sqrt{-1}$. Por exemplo $\sqrt{-4} = \pm 2i$.

Podemos agora imaginar "vetores" apontando em uma direção qualquer. Tais vetores podem ser decompostos em duas componentes; uma paralela e outra ortogonal à reta horizontal. A partir de dois números quaisquer x e y, ambos na reta horizontal, podemos escolher x como sendo a componente paralela; iy (o "vetor" y rodado de 90 graus) é a componente ortogonal. Então, o "vetor" mais geral possível representa o *número complexo*

$$z = x + iy. \tag{D.2.14}$$

D.2.6 Fórmula de Euler

A fórmula de Euler

$$e^{ix} = \cos x + i\text{sen}x; \quad i \equiv \sqrt{-1} \tag{D.2.15}$$

pode ser verificada usando a equação (D.2.5), com $x \to ix$, e as expansões em série das funções trigonométricas, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \frac{(ix)^8}{8!} + \cdots \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) \\ &= \cos x + i\text{sen}x\ , \end{aligned} \tag{D.2.16}$$

onde usamos

$$\begin{aligned} &i^0 = 1, \qquad i^1 = i, \qquad i^2 = -1, \qquad i^3 = -i, \\ &i^4 = 1, \qquad i^5 = i, \qquad i^6 = -1, \qquad i^7 = -i, \quad \text{etc.} \end{aligned} \tag{D.2.17}$$

Alternativamente, usando a forma polar dos números complexos, teremos

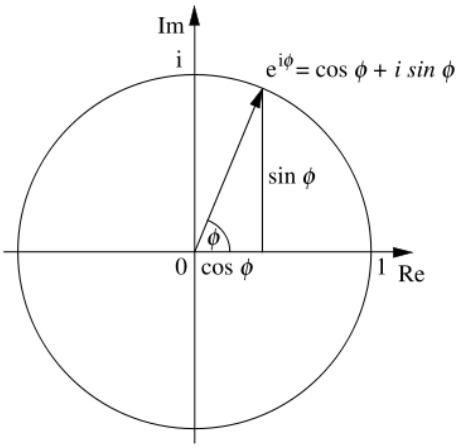
$$\mathrm{e}^{ix} = r(\cos(\theta) + i\mathrm{sen}(\theta)). \tag{D.2.18}$$

Tomando a derivada e usando $\frac{d}{dx}\mathrm{e}^{ix} = i\,\mathrm{e}^{ix}$, teremos

$$ie^{ix} = (\cos(\theta) + i\mathrm{sen}(\theta))\frac{dr}{dx} + r(-\mathrm{sen}(\theta) + i\cos(\theta))\frac{d\theta}{dx}. \tag{D.2.19}$$

Substituindo e^{ix} por $r(\cos(\theta) + i\mathrm{sen}(\theta))$ e igualando as partes reais e imaginárias, obtemos $\frac{dr}{dx} = 0$ e $\frac{d\theta}{dx} = 1$. Levando em conta que $\mathrm{e}^{i0} = 1$, devemos ter $r(0) = 1$ e $\theta(0) = 0$. Logo, $r = 1$ e $\theta = x$. Isso prova a fórmula de Euler dada em (D.2.15).

A figura abaixo mostra a representação geométrica da fórmula de Euler, no plano complexo.



D.3 Fórmulas trigonométricas

D.3.1 Soma de ângulos

$$\mathrm{sen}(x \pm y) = \mathrm{sen}(x)\cos(y) \pm \cos(x)\mathrm{sen}(y) \tag{D.3.1}$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \mathrm{sen}(x)\mathrm{sen}(y) \tag{D.3.2}$$

D.3.2 Identidades produto-soma

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2} \tag{D.3.3}$$

$$\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{sen}(y) = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2} \tag{D.3.4}$$

$$\mathrm{sen}(x)\cos(y) = \frac{\mathrm{sen}(x-y) + \mathrm{sen}(x+y)}{2} \tag{D.3.5}$$

D.3.3 Identidades soma-produto

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \tag{D.3.6}$$

$$\text{sen}(x) + \text{sen}(y) = 2\text{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \tag{D.3.7}$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\text{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right) \tag{D.3.8}$$

$$\text{sen}(x) - \text{sen}(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right) \tag{D.3.9}$$

D.4 Algumas integrais

D.4.1 Fórmulas básicas

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \tag{D.4.1}$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C \tag{D.4.2}$$

$$\int udv = uv - \int vdu \tag{D.4.3}$$

D.4.2 Integrais de algumas funções racionais

$$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln(ax+b) + C \tag{D.4.4}$$

$$\int \frac{1}{(x+a)^2}dx = -\frac{1}{x+a} + C \tag{D.4.5}$$

$$\int (x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1 \tag{D.4.6}$$

$$\int x(x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}((n+1)x-a)}{(n+1)(n+2)} + C \tag{D.4.7}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) + C \tag{D.4.8}$$

$$\int \frac{x}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln(a^2+x^2) + C \tag{D.4.9}$$

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\tan^{-1}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C \tag{D.4.10}$$

$$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}dx = \frac{1}{b-a}\ln\frac{a+x}{b+x},\ a \neq b \tag{D.4.11}$$

D.4.3 Integrais envolvendo raízes

$$\int \sqrt{x-a}dx = \frac{2}{3}(x-a)^{3/2} + C \tag{D.4.12}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x \pm a}}dx = 2\sqrt{x \pm a} + C \tag{D.4.13}$$

$$\int x\sqrt{x-a}dx = \frac{2}{3}a(x-a)^{3/2} + \frac{2}{5}(x-a)^{5/2} + C \tag{D.4.14}$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{2}a^2 \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} + C \tag{D.4.15}$$

D.4.4 Integrais envolvendo logaritmos

$$\int \ln axdx = x\ln ax - x + C \tag{D.4.16}$$

$$\int \frac{\ln ax}{x}dx = \frac{1}{2}\left(\ln ax\right)^2 + C \tag{D.4.17}$$

$$\int \ln\left(a^2 - b^2x^2\right)dx = x\ln\left(ar - b^2x^2\right) + \frac{2a}{b}\tan^{-1}\frac{bx}{a} - 2x + C \tag{D.4.18}$$

$$\int x\ln\left(a^2 - b^2x^2\right)dx = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{a^2}{b^2}\right)\ln\left(a^2 - b^2x^2\right) + C \tag{D.4.19}$$

D.4.5 Integrais envolvendo exponenciais

$$\int \mathrm{e}^{ax}dx = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} + C \tag{D.4.20}$$

$$\int x\mathrm{e}^{x}dx = (x-1)\mathrm{e}^{x} + C \tag{D.4.21}$$

$$\int \mathrm{e}^{-\alpha x^2}dx = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \tag{D.4.22}$$

D.4.6 Integrais envolvendo funções trigonométricas

$$\int \mathrm{sen}axdx = -\frac{1}{a}\cos ax + C \tag{D.4.23}$$

$$\int \mathrm{sen}^2axdx = \frac{x}{2} - \frac{\mathrm{sen}2ax}{4a} + C \tag{D.4.24}$$

$$\int \mathrm{sen}(x)\cos(x)dx = -\frac{\left(\cos(x)\right)^2}{2} + C \tag{D.4.25}$$

$$\int \tan axdx = -\frac{1}{a}\ln\cos ax + C \tag{D.4.26}$$

$$\int \tan^2 axdx = -x + \frac{1}{a}\tan ax + C \tag{D.4.27}$$

$$\int x\cos axdx = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{x}{a}\text{sen}ax + C \tag{D.4.28}$$

$$\int \text{e}^{bx}\text{sen}axdx = \frac{1}{a^2+b^2}\text{e}^{bx}(b\text{sen}ax - a\cos ax) + C \tag{D.4.29}$$

$$\int x\text{e}^{x}\text{sen}xdx = \frac{1}{2}\text{e}^{x}(\cos x - x\cos x + x\text{sen}x) + C \tag{D.4.30}$$

D.5 Algumas constantes físicas

Nome	Símbolo	Valor	Unidade
Velocidade da luz no vácuo	c	$2,99792458 \cdot 10^{8}$	m/s (def)
Carga do elétron	e	$1,60217733 \cdot 10^{-19}$	C
Constante gravitacional	G, κ	$6,67259 \cdot 10^{-11}$	$\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$
Permeabilidade do vácuo	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$	H/m
Permissividade do vácuo	$\varepsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$	$8,854187 \cdot 10^{-12}$	F/m
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$5,67032 \cdot 10^{-8}$	$\mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$
Constante de Wien	k_{W}	$2,8978 \cdot 10^{-3}$	mK
Constante universal dos gases	R	8,31441	$\mathrm{J{\cdot}mol^{-1}{\cdot}K^{-1}}$
Número de Avogadro	N_{A}	$6,0221367 \cdot 10^{23}$	$\mathrm{mol^{-1}}$
Constante de Boltzmann	$k = R/N_{\mathrm{A}}$	$1,380658 \cdot 10^{-23}$	J/K
Diâmetro do Sol	$D_\odot$	$1392 \cdot 10^{6}$	m
Massa do Sol	$M_\odot$	$1,989 \cdot 10^{30}$	kg
Período de rotação do Sol	$T_\odot$	25,38	dias
Raio da Terra	R_{A}	$6,378 \cdot 10^{6}$	m
Massa da Terra	M_{A}	$5,976 \cdot 10^{24}$	kg
Período de rotação da Terra	T_{A}	23,96	horas
Período orbital da Terra	Ano tropical	365,24219879	dias
Unidade astrnômica	AU	$1,4959787066 \cdot 10^{11}$	m
Ano-luz	lj	$9,4605 \cdot 10^{15}$	m
Parsec	pc	$3,0857 \cdot 10^{16}$	m
Constante de Hubble	H	$\approx (75 \pm 25)$	$\mathrm{km{\cdot}s^{-1}{\cdot}Mpc^{-1}}$
Massa do Elétron	m_{e}	$9,1093897 \cdot 10^{-31}$	kg
Massa do Próton	m_{p}	$1,6726231 \cdot 10^{-27}$	kg
Massa do Neutron	m_{n}	$1,674954 \cdot 10^{-27}$	kg
Unidade atômica de massa	$m_{\mathrm{u}} = \frac{1}{12} m(^{12}_{6}\mathrm{C})$	$1,6605656 \cdot 10^{-27}$	kg
Constante de Planck	h	$6,6260755 \cdot 10^{-34}$	Js
Constante de Planck reduzida	$\hbar = h/2\pi$	$1,0545727 \cdot 10^{-34}$	Js
Magnéton de Bohr	$\mu_{\mathrm{B}} = e\hbar/2m_{\mathrm{e}}$	$9,2741 \cdot 10^{-24}$	$\mathrm{Am^2}$
Raio de Bohr	a_0	0,52918	Å
Constante de Rydberg	Ry	13,595	eV
Comprimento de onda de Compton do elétron	$\lambda_{\mathrm{Ce}} = h/m_{\mathrm{e}}c$	$2,2463 \cdot 10^{-12}$	m
Comprimento de onda de Compton do próton	$\lambda_{\mathrm{Cp}} = h/m_{\mathrm{p}}c$	$1,3214 \cdot 10^{-15}$	m
Constante de estrutura fina	$\alpha = e^2/2hc\varepsilon_0$	$\approx 1/137$	

Os valores da tabela acima foram obtidos do sítio `http://pdg.lbl.gov/2007/reviews/consrpp.pdf`, que reproduzimos abaixo

Table 1.1. Reviewed 2007 by P.J. Mohr and B.N. Taylor (NIST). Based mainly on the "CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2006" by P.J. Mohr, B.N. Taylor, and D.B. Newell (to be published). The last group of constants (beginning with the Fermi coupling constant) comes from the Particle Data Group. The figures in parentheses after the values give the 1-standard-deviation uncertainties in the last digits; the corresponding fractional uncertainties in parts per 10^9 (ppb) are given in the last column. This set of constants (aside from the last group) is recommended for international use by CODATA (the Committee on Data for Science and Technology). The full 2006 CODATA set of constants may be found at `http://physics.nist.gov/constants`

Quantity	Symbol, equation	Value	Uncertainty (ppb)
speed of light in vacuum	c	299 792 458 m s^{-1}	exact*
Planck constant	h	$6.626\ 068\ 96(33)\times10^{-34}$ J s	50
Planck constant, reduced	$\hbar \equiv h/2\pi$	$1.054\ 571\ 628(53)\times10^{-34}$ J s	50
		$= 6.582\ 118\ 99(16)\times10^{-22}$ MeV s	25
electron charge magnitude	e	$1.602\ 176\ 487(40)\times10^{-19}$ C $= 4.803\ 204\ 27(12)\times10^{-10}$ esu	25, 25
conversion constant	$\hbar c$	197.326 9631(49) MeV fm	25
conversion constant	$(\hbar c)^2$	0.389 379 304(19) GeV^2 mbarn	50
electron mass	m_e	$0.510\ 998\ 910(13)$ MeV$/c^2 = 9.109\ 382\ 15(45)\times10^{-31}$ kg	25, 50
proton mass	m_p	$938.272\ 013(23)$ MeV$/c^2 = 1.672\ 621\ 637(83)\times10^{-27}$ kg	25, 50
		$= 1.007\ 276\ 466\ 77(10)$ u $= 1836.152\ 672\ 47(80)\ m_e$	0.10, 0.43
deuteron mass	m_d	1875.612 793(47) MeV$/c^2$	25
unified atomic mass unit (u)	(mass ^{12}C atom)/12 = (1 g)/(N_A mol)	$931.494\ 028(23)$ MeV$/c^2 = 1.660\ 538\ 782(83)\times10^{-27}$ kg	25, 50
permittivity of free space	$\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$	$8.854\ 187\ 817\ \ldots\ \times10^{-12}$ F m^{-1}	exact
permeability of free space	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ N $A^{-2} = 12.566\ 370\ 614\ \ldots\ \times10^{-7}$ N A^{-2}	exact
fine-structure constant	$\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$	$7.297\ 352\ 5376(50)\times10^{-3} = 1/137.035\ 999\ 679(94)^\dagger$	0.68, 0.68
classical electron radius	$r_e = e^2/4\pi\epsilon_0 m_e c^2$	$2.817\ 940\ 2894(58)\times10^{-15}$ m	2.1
(e^- Compton wavelength)/2π	$\lambda\!\!\!^{-}_e = \hbar/m_e c = r_e\alpha^{-1}$	$3.861\ 592\ 6459(53)\times10^{-13}$ m	1.4
Bohr radius ($m_{\mathrm{nucleus}} = \infty$)	$a_\infty = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/m_e e^2 = r_e\alpha^{-2}$	$0.529\ 177\ 208\ 59(36)\times10^{-10}$ m	0.68
wavelength of 1 eV/c particle	$hc/(1\ \mathrm{eV})$	$1.239\ 841\ 875(31)\times10^{-6}$ m	25
Rydberg energy	$hcR_\infty = m_e e^4/2(4\pi\epsilon_0)^2\hbar^2 = m_e c^2\alpha^2/2$	13.605 691 93(34) eV	25
Thomson cross section	$\sigma_T = 8\pi r_e^2/3$	0.665 245 8558(27) barn	4.1
Bohr magneton	$\mu_B = e\hbar/2m_e$	$5.788\ 381\ 7555(79)\times10^{-11}$ MeV T^{-1}	1.4
nuclear magneton	$\mu_N = e\hbar/2m_p$	$3.152\ 451\ 2326(45)\times10^{-14}$ MeV T^{-1}	1.4
electron cyclotron freq./field	$\omega^e_{\mathrm{cycl}}/B = e/m_e$	$1.758\ 820\ 150(44)\times10^{11}$ rad s^{-1} T^{-1}	25
proton cyclotron freq./field	$\omega^p_{\mathrm{cycl}}/B = e/m_p$	$9.578\ 833\ 92(24)\times10^{7}$ rad s^{-1} T^{-1}	25
gravitational constant‡	G_N	$6.674\ 28(67)\times10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}	1.0×10^5
		$= 6.708\ 81(67)\times10^{-39}\ \hbar c\ (\mathrm{GeV}/c^2)^{-2}$	1.0×10^5
standard gravitational accel.	g_n	9.806 65 m s^{-2}	exact
Avogadro constant	N_A	$6.022\ 141\ 79(30)\times10^{23}$ mol^{-1}	50
Boltzmann constant	k	$1.380\ 6504(24)\times10^{-23}$ J K^{-1}	1700
		$= 8.617\ 343(15)\times10^{-5}$ eV K^{-1}	1700
molar volume, ideal gas at STP	$N_A k$(273.15 K)/(101 325 Pa)	$22.413\ 996(39)\times10^{-3}$ m^3 mol^{-1}	1700
Wien displacement law constant	$b = \lambda_{\mathrm{max}} T$	$2.897\ 7685(51)\times10^{-3}$ m K	1700
Stefan-Boltzmann constant	$\sigma = \pi^2 k^4/60\hbar^3 c^2$	$5.670\ 400(40)\times10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}	7000
Fermi coupling constant**	$G_F/(\hbar c)^3$	$1.166\ 37(1)\times10^{-5}$ GeV^{-2}	9000
weak-mixing angle	$\sin^2\widehat{\theta}(M_Z)$ ($\overline{\mathrm{MS}}$)	0.231 22(15)††	6.5×10^5
$W^\pm$ boson mass	m_W	80.403(29) GeV$/c^2$	3.6×10^5
Z^0 boson mass	m_Z	91.1876(21) GeV$/c^2$	2.3×10^4
strong coupling constant	$\alpha_s(m_Z)$	0.1176(20)	1.7×10^7

$\pi = 3.141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238$ e $= 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235$ $\gamma = 0.577\ 215\ 664\ 901\ 532\ 861$

1 in $\equiv 0.0254$ m 1 G $\equiv 10^{-4}$ T 1 eV $= 1.602\ 176\ 487(40)\times10^{-19}$ J kT at 300 K $= [38.681\ 685(68)]^{-1}$ eV

1 Å $\equiv 0.1$ nm 1 dyne $\equiv 10^{-5}$ N 1 eV$/c^2 = 1.782\ 661\ 758(44)\times10^{-36}$ kg 0 °C $\equiv 273.15$ K

1 barn $\equiv 10^{-28}$ m^2 1 erg $\equiv 10^{-7}$ J $2.997\ 924\ 58\times10^9$ esu $= 1$ C 1 atmosphere $\equiv 760$ Torr $\equiv 101\ 325$ Pa

* The meter is the length of the path traveled by light in vacuum during a time interval of 1/299 792 458 of a second.
† At $Q^2 = 0$. At $Q^2 \approx m_W^2$ the value is $\sim 1/128$.
‡ Absolute lab measurements of G_N have been made only on scales of about 1 cm to 1 m.
** See the discussion in Sec. 10, "Electroweak model and constraints on new physics."
†† The corresponding $\sin^2\theta$ for the effective angle is 0.23152(14).

D.6 Tabela Periódica

A tabela abaixo foi obtida em `http://pdg.lbl.gov/2007/reviews/periodicrpp.pdf`,

Table 4.1. Revised 2007 by C.G. Wohl (LBNL) and D.E. Groom (LBNL). Adapted from the Commission on Isotopic Abundances and Atomic Weights, "Atomic Weights of the Elements 2005," Pure and Applied Chemistry **78**, 2051 (2006), and G. Audi, A.H. Wapstra, and C. Thibault, Nucl. Phys. **A729**, 337 (2003). The atomic number (top left) is the number of protons in the nucleus. The atomic mass (bottom) is weighted by isotopic abundances in the Earth's surface. Atomic masses are relative to the mass of ^{12}C, defined to be exactly 12 unified atomic mass units (u) (approx. g/mole). Relative isotopic abundances often vary considerably, both in natural and commercial samples; this is reflected in the number of significant figures given. A number in parentheses is the atomic mass of the longest-lived known isotope of that element as of 2005—no stable isotope exists. The exceptions are Th, Pa, and U, which do have characteristic terrestrial compositions. As of early 2006 element 112 has not been assigned a name, and there are no confirmed elements with $Z > 112$.

PERIODIC TABLE OF THE ELEMENTS

1 IA												13 IIIA	14 IVA	15 VA	16 VIA	17 VIIA	18 VIIIA
1 H Hydrogen 1.00794	2 IIA																2 He Helium 4.002602
3 Li Lithium 6.941	4 Be Beryllium 9.012182											5 B Boron 10.811	6 C Carbon 12.0107	7 N Nitrogen 14.0067	8 O Oxygen 15.9994	9 F Fluorine 18.9984032	10 Ne Neon 20.1797
11 Na Sodium 22.98976928	12 Mg Magnesium 24.3050	3 IIIB	4 IVB	5 VB	6 VIB	7 VIIB	8	9 VIII	10	11 IB	12 IIB	13 Al Aluminum 26.9815386	14 Si Silicon 28.0855	15 P Phosph. 30.973762	16 S Sulfur 32.065	17 Cl Chlorine 35.453	18 Ar Argon 39.948
19 K Potassium 39.0983	20 Ca Calcium 40.078	21 Sc Scandium 44.955912	22 Ti Titanium 47.867	23 V Vanadium 50.9415	24 Cr Chromium 51.9961	25 Mn Manganese 54.938045	26 Fe Iron 55.845	27 Co Cobalt 58.933195	28 Ni Nickel 58.6934	29 Cu Copper 63.546	30 Zn Zinc 65.409	31 Ga Gallium 69.723	32 Ge German. 72.64	33 As Arsenic 74.92160	34 Se Selenium 78.96	35 Br Bromine 79.904	36 Kr Krypton 83.798
37 Rb Rubidium 85.4678	38 Sr Strontium 87.62	39 Y Yttrium 88.90585	40 Zr Zirconium 91.224	41 Nb Niobium 92.90638	42 Mo Molybd. 95.94	43 Tc Technet. (97.9072)	44 Ru Ruthen. 101.07	45 Rh Rhodium 102.90550	46 Pd Palladium 106.42	47 Ag Silver 107.8682	48 Cd Cadmium 112.411	49 In Indium 114.818	50 Sn Tin 118.710	51 Sb Antimony 121.760	52 Te Tellurium 127.60	53 I Iodine 126.90447	54 Xe Xenon 131.293
55 Cs Cesium 132.9054519	56 Ba Barium 137.327	57–71 Lantha-nides	72 Hf Hafnium 178.49	73 Ta Tantalum 180.94788	74 W Tungsten 183.84	75 Re Rhenium 186.207	76 Os Osmium 190.23	77 Ir Iridium 192.217	78 Pt Platinum 195.084	79 Au Gold 196.966569	80 Hg Mercury 200.59	81 Tl Thallium 204.3833	82 Pb Lead 207.2	83 Bi Bismuth 208.98040	84 Po Polonium (208.9824)	85 At Astatine (209.9871)	86 Rn Radon (222.0176)
87 Fr Francium (223.0197)	88 Ra Radium (226.0254)	89–103 Actinides	104 Rf Rutherford. (267.1215)	105 Db Dubnium (268.1255)	106 Sg Seaborg. (266.)	107 Bh Bohrium (264.)	108 Hs Hassium (277.150)	109 Mt Meitner. (276.1512)	110 Ds Darmstadt. (281.162)	111 Rg Roentgen. (280.1645)	112 (285.174)						

Lanthanide series	57 La Lanthan. 138.90547	58 Ce Cerium 140.116	59 Pr Praseodym. 140.90765	60 Nd Neodym. 144.242	61 Pm Prometh. (144.9127)	62 Sm Samarium 150.36	63 Eu Europium 151.964	64 Gd Gadolin. 157.25	65 Tb Terbium 158.92535	66 Dy Dyspros. 162.500	67 Ho Holmium 164.93032	68 Er Erbium 167.259	69 Tm Thulium 168.93421	70 Yb Ytterbium 173.04	71 Lu Lutetium 174.967
Actinide series	89 Ac Actinium (227.0278)	90 Th Thorium 232.03806	91 Pa Protactin. 231.03588	92 U Uranium 238.02891	93 Np Neptunium (237.0482)	94 Pu Plutonium (244.0642)	95 Am Americ. (243.0614)	96 Cm Curium (247.0704)	97 Bk Berkelium (247.0703)	98 Cf Californ. (251.0796)	99 Es Einstein. (252.0830)	100 Fm Fermium (257.0951)	101 Md Mendelev. (258.0984)	102 No Nobelium (259.1010)	103 Lr Lawrenc. (262.1096)

Exercícios

Além das listas já divulgadas, há mais alguns exercícios espalhados pelas seguintes páginas:

Ondas: 11, 17, 19, 21, 22, 36, 46

Relatividade: 72–77, 84, 87, 88, 90, 91, 94, 96, 98, 101–104, 105, 111

Termodinâmica:

Referências Bibliográficas

[1] NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica - Vol. 1.* São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1998.

[2] NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica - Vol. 2.* São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1998.

[3] NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica - Vol. 3.* São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1998.

[4] NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica - Vol. 4.* São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1998.

[5] FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. *The Feynman Lectures on Physics – Vol. 1.* London: Addison-Wesley Pub. Co., 1964.

[6] FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. *The Feynman Lectures on Physics – Vol. 2.* London: Addison-Wesley Pub. Co., 1964.

[7] FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. *The Feynman Lectures on Physics – Vol. 3.* London: Addison-Wesley Pub. Co., 1964.

[8] RUSSEL, B. *ABC of Relativity.* London: Unwin Paperbacks, 1977.

[9] GARDNER, M. *Relativity Simply Explained.* Mineola, New York: Dover Publications, Inc., 1996.

[10] EINSTEIN, A. *Relativity: The Special and General Theory (Translated: Robert W. Lawson).* New York: Methuen & Co Ltd, 1916.

[11] LEVY-LEBLOND, J.-M. One more derivation of the Lorentz transformation. *Am. J. Phys*, v. 44, p. 271, 1976.

[12] GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Electrodynamics.* New Jersey: Prentice Hall, 1999.

[13] EINSTEIN, A.; MINKOWSKI, H.; WEYL, H. *The Principle of Relativity: A Collection of Original Memoirs on the Special and General Theory of Relativity.* New York: Dover, 1952.

[14] EDDINGTON, A. *The Nature of the Physical World.* Kessinger Publishing, 2005. (Kessinger Publishing's rare reprints). ISBN 9781417907182. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=PGOTKcxSqMUC>.

[15] ATKINS, P. *The Laws of Thermodynamics: A Very Short Introduction*. OUP Oxford, 2010. (Very Short Introductions). ISBN 9780191614385. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=tz1R4vJN6VkC>.

[16] NUSSENZVEIG, H. *Curso de Física Básica: fluidos, oscilações e ondas, calor*. Edgard Blücher, 2008. (Curso de física básica). ISBN 9788521202998. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=UXMVAAAACAAJ>.

[17] TOLMAN, R. C. On the Weight of Heat and Thermal Equilibrium in General Relativity. *Phys.Rev.*, v. 35, p. 904–924, 1930.

[18] BALAZS, N.; DAWSON, M. On thermodynamic equilibrium in a gravitational field. *Physica*, v. 31, p. 222, 1965.

[19] EBERT, R.; GöBEL, R. Carnot cycles in general relativity. *Gen. Rel. and Grav.*, v. 4, p. 375–386, 1973.

[20] WILLIAMS, E. R.; FALLER, J. E.; HILL, H. A. New experimental test of coulomb's law: A laboratory upper limit on the photon rest mass. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 26, p. 721–724, Mar 1971. Disponível em: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.26.721>.

Índice Remissivo

Índice de refração, 237

adiabático, 44
Ampère, 223, 225
amplitude, 14

batimentos, 22

Carnot, 112, 115
Circuito RLC, 213
Clausius, 114
coeficientes de Fourier, 36
Coerência, 237
comprimento de onda, 14, 19, 23, 24, 30, 44, 53–55, 57, 105
comprimento de onda Compton, 105
condição de contorno, 25, 33
cone de luz, 94, 95
conservação de momento, 101
constante de Planck, 102
contração de Lorentz, 83, 89
corda vibrante, 15, 19
Corrente alternada, 212
Corrente de deslocamento, 226

d'Alembert, 11, 12, 14
Delta de Kronecker, 228
difração, 54
dilatação do tempo, 77–81, 90, 93

Eddington, 109
efeito Doppler, 55, 58, 97, 98
Einstein, 64, 65, 69–71, 228, 236
energia de repouso, 101
Euler, 14, 215, 252
Exercício, 13, 19, 21, 23, 24, 38, 48, 74–79, 85, 88, 90, 92, 93, 96, 98, 99, 102–105, 107, 108, 243

fóton, 102, 104, 105
Fótons, 234, 236, 242
Faraday, 217, 222, 223, 225, 230–232
Fasores, 216
Fator de qualidade, 218
fissão nuclear, 101
força de Lorentz, 106
Fourier, 34, 35, 37, 38
freqüência, 14
Fresnel, 51
fusão nuclear, 101

Galileu, 63–65, 72, 73
Gauss, 223–226, 232

Helmholtz, 66
Huygens, 50–52, 54

Impedância, 215, 223
intensidade, 17–19, 21–23, 29
Interferência, 236, 237, 241
intervalo do tipo espaço, 91, 93
intervalo do tipo luz, 91
intervalo do tipo tempo, 91
Irreversibilidade, 120

Kelvin, 114

Levi-Civita, 228
Lorentz, 85, 92, 93, 95

Mach, 58–61, 66
massa, 100
massa nula, 102
Maxwell, 64–66, 71, 223, 226, 227, 236
Michelson, 65, 66, 69, 70
Minkowski, 91
modos normais, 29, 32, 34
momento-energia, 100
Morley, 65, 66, 69

número de onda, 14
NASA, 60

Nernest, 110
Newton, 16, 39, 42, 43, 63, 65, 72, 73, 235, 236
Noether, 109

onda de choque, 60, 61
Onda progressiva, 231

pósitron, 102, 104
paradoxo das gêmeas, 79
Planck, 236
Poincaré, 70
Ponto de Poisson, 239
potência, 17–19
potência média, 19
Poynting, 231–233, 235
princípio de causalidade, 92
princípio de inércia, 63
princípio de relatividade, 64
princípio de superposição, 20, 34

quanta de energia, 102

relação energia-momento, 101
Ressonância, 217, 218, 220, 221

série de Fourier, 38
sincronização, 74, 90
sistema inercial, 63, 64, 73

Teorema de Carnot, 116
Teorema de Gauss, 224
Teorema de Stokes, 224
teorema trabalho-energia, 107
terceira lei de Newton, 25, 108
Tolman, 126
transformação de Galileu, 89
transformação de Lorentz, 85, 89, 95
Transformadores, 222

velocidade aparente, 75
Velocidade da Luz, 228
velocidade da luz, 64, 66, 70, 76, 78, 81, 87, 89, 94
velocidade de fase, 24
velocidade de grupo, 24