Física III - 4323203

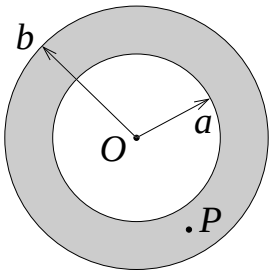
Escola Politécnica - 2016

Prova de Recuperação

21 de julho de 2016

Questão 1

A camada esférica na figura abaixo tem uma distribuição volumétrica de carga dada por



$$\rho(r) = \begin{cases} 0 \quad \text{para} \quad r < a \\ \alpha/r^2 \quad \text{para} \quad a \leq r \leq b \\ 0 \quad \text{para} \quad r > b, \end{cases}$$

onde a constante $\alpha > 0$ e r é a distância até o centro O da distribuição.

(a) (0,5 ponto) Calcule a carga elétrica total da distribuição.

(b) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo elétrico em todo o espaço.

(c) (1,0 ponto) Considere o potencial nulo no centro O da distribuição. Usando o campo elétrico, calcule o potencial num ponto P a uma distância r do centro O (região $a < r < b$).

Solução da questão 1

(a) A carga total é

$$Q = \int \rho dV = \int_a^b \frac{\alpha}{r^2}\, 4\pi r^2 dr = \boxed{4\pi\alpha(b-a)}.$$

(b) Por simetria, o campo elétrico é radial: $\vec{E} = E(r)\widehat{r}$. A lei de Gauss, usando uma superfície esférica S concêntrica com a distribuição, fornece

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \oint_S E(r)dA = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \Longrightarrow E(r) = \frac{q_{in}}{4\pi\epsilon_0\, r^2}.$$

Para $r < a$, $q_{in} = 0 \Longrightarrow E = 0$.

Para $r > b$, $q_{in} = Q = 4\pi\alpha(b-a) \Longrightarrow E = \dfrac{\alpha(b-a)}{\epsilon_0\, r^2}$.

Para $a \leq r \leq b$,

$$q_{in} = q_{in}(r) = \int_a^r \frac{\alpha}{r^2}\, 4\pi r^2 dr = 4\pi\alpha(r-a) \Longrightarrow E = \frac{\alpha(r-a)}{\epsilon_0\, r^2} = \frac{\alpha}{\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{a}{r^2}\right).$$

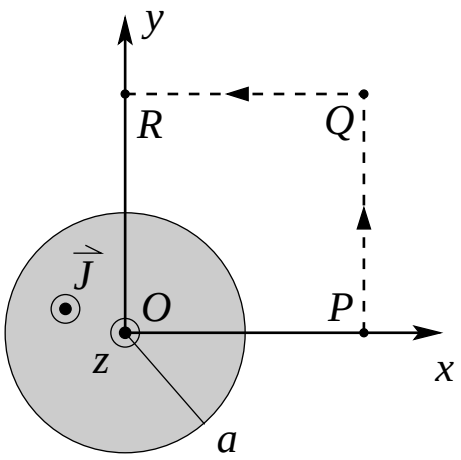
$$\boxed{\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} \quad \text{para} \quad r < a \\ \dfrac{\alpha}{\epsilon_0}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{a}{r^2}\right)\widehat{r} \quad \text{para} \quad a \leq r \leq b \\ \dfrac{\alpha(b-a)}{\epsilon_0\, r^2}\widehat{r} \quad \text{para} \quad r > b. \end{cases}}$$

(c) Na região $r < a$ o campo é nulo. Portanto, o potencial é constante e igual a $V_O = 0$. Como o potencial é contínuo, $V(r = a) = V_O = 0$. O potencial na região $a \leq r \leq b$ pode ser calculado a partir do campo:

$$V(r) = -\int_a^r E(r)dr = -\int_a^r \frac{\alpha}{\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{a}{r^2}\right) dr = \boxed{-\frac{\alpha}{\epsilon_0}\left[\ln\left(\frac{r}{a}\right) + \frac{a}{r} - 1\right]}.$$

Questão 2

Em um cilindro condutor infinito de raio a, visto em corte transversal na figura, a densidade de corrente é dada por $\vec{J}(r) = \alpha r \widehat{k}$, onde r é a distância até o eixo do cilindro (eixo z).



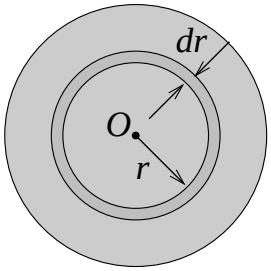
(a) (0,5 ponto) Calcule a corrente total que atravessa a seção transversal do condutor.

(b) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo magnético total em todo o espaço.

(c) (1,0 ponto) Determine a integral de linha do campo magnético ao longo do trecho PQR, no sentido indicado na figura.

Solução da questão 2

(a) A corrente que passa através de um anel de raio r e largura dr da seção é



$dI = \vec{J} \cdot d\vec{A} = (\alpha r)(2\pi r dr)$. A corrente através de toda a seção é

$$I_{total} = \int_0^a \alpha r \, 2\pi r dr = \left. \frac{2\pi\alpha r^3}{3} \right|_0^a = \boxed{\frac{2\pi\alpha a^3}{3}}.$$

(b) O campo magnético é calculado através da lei de Ampère, $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int}$. O campo tem simetria cilíndrica: $\vec{B} = B(r)\widehat{\theta}$. Usando um círculo C de raio r, coaxial com o fio, obtemos

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_C B(r) d\ell = 2\pi r B(r) = \mu_0 I_{int} \Longrightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I_{int}}{2\pi r},$$

onde I_{int} é a corrente através do disco de raio r com borda C.

Para $\underline{r < a}$,

$$I_{int} = I(r) = \int_0^r \alpha r \, 2\pi r dr = \frac{2\pi\alpha r^3}{3} \Longrightarrow B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r}\frac{2\pi\alpha r^3}{3} = \frac{\mu_0 \alpha r^2}{3}.$$

Para $\underline{r > a}$, $I_{int} = I_{total}$. Assim,

$$B(r) = \frac{\mu_0 I_{total}}{2\pi r} = \frac{\mu_0}{2\pi r}\frac{2\pi\alpha a^3}{3} = \frac{\mu_0 \alpha a^3}{3r}.$$

Portanto,

$$\boxed{\vec{B} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 \alpha r^2}{3}\,\widehat{\theta} & \text{para} \quad r < a \\ \dfrac{\mu_0 \alpha a^3}{3r}\,\widehat{\theta} & \text{para} \quad r > a \end{cases}}.$$

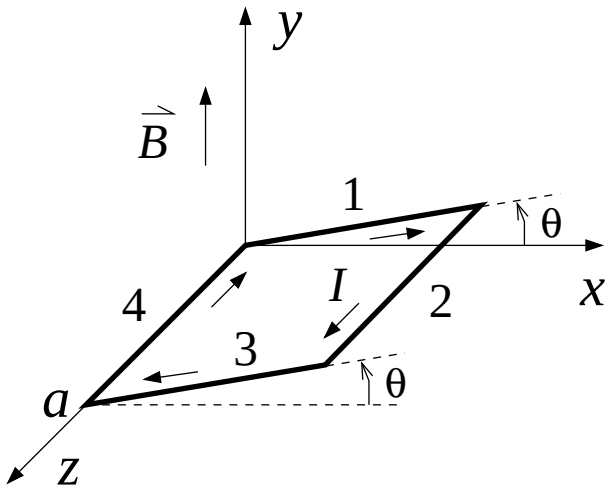
(c) Como o campo $\vec{B}$ é perpendicular aos segmentos OP e RO,

$$\int_{PQR} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{OPQRO} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\mu_0 I_{total}}{4} = \boxed{\frac{\mu_0 \pi \alpha a^3}{6}},$$

onde usamos a lei de Ampère para calcular a integral sobre o percurso $OPQRO$.

Questão 3

Uma espira quadrada de lado a, percorrida por uma corrente I, pode girar livremente em torno do eixo z conforme a figura. Cada trecho da espira está numerado de 1 a 4. Seja θ o ângulo que o trecho 1 faz com o eixo x. Na região onde se encontra a espira existe um campo magnético uniforme $\vec{B} = B\,\hat{\jmath}$.



(a) (1,5 ponto) Calcule as forças $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ em cada trecho da espira.

(b) (1,0 ponto) Calcule o torque sobre a espira.

Solução da questão 3

(a) Como $\vec{B}$ é uniforme, as forças sobre os trechos 1, 2, 3 e 4 da espira são dadas por

$$\vec{F}_1 = I(\int_1 d\vec{\ell}) \times \vec{B} = I\vec{\ell}_1 \times \vec{B} = Ia(\cos\theta\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{\jmath}) \times B\,\hat{\jmath} = \boxed{IaB\cos\theta\,\hat{k}},$$

$$\vec{F}_2 = I(\int_2 d\vec{\ell}) \times \vec{B} = I\vec{\ell}_2 \times \vec{B} = I(a\,\hat{k}) \times B\,\hat{\jmath} = \boxed{-IaB\hat{\imath}},$$

$\ell_1 = -\ell_3 \Longrightarrow \vec{F}_3 = -\vec{F}_1 = \boxed{-IaB\cos\theta\,\hat{k}}$,

$\ell_2 = -\ell_4 \Longrightarrow \vec{F}_4 = -\vec{F}_2 = \boxed{IaB\hat{\imath}}$.

(b) O momento de dipolo magnético da espira é $\vec{\mu} = I\vec{A}$, onde $\vec{A}$ é o vetor área com a direção da normal determinada pelo sentido da corrente. No nosso caso $\vec{A} = a^2\,\hat{n} = a^2(-\operatorname{sen}\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath})$. Assim,

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = Ia^2(-\operatorname{sen}\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}) \times B\,\hat{\jmath} = \boxed{-Ia^2B\operatorname{sen}\theta\,\hat{k}}.$$

Solução alternativa: Note que as forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_3$ formam um binário, assim como as forças $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_4$. Portanto, o torque independe do ponto em relação ao qual ele é calculado. Calculando o torque em relação ao eixo z, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_3$ não contribuem porque são paralelas ao eixo z. $\vec{F}_4$ não contribui porque está aplicada sobre o eixo z. Assim,

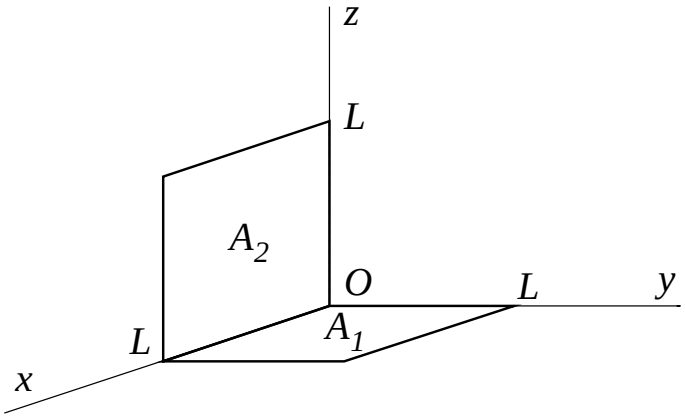
$$\vec{\tau} = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = a(\cos\theta\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{\jmath}) \times (-IaB\hat{\imath}) = \boxed{-Ia^2B\operatorname{sen}\theta\,\hat{k}}.$$

Questão 4

Uma onda plana monocromática tem comprimento de onda λ e período T. Na origem O de um sistema de coordenadas cartesianas o módulo do campo elétrico desta onda se anula no instante $t = 0$ e atinge seu valor máximo E_m no instante $T/4$. O campo elétrico desta onda oscila ao longo do eixo y e o campo magnético oscila ao longo do eixo x.

(a) (1,5 ponto) Escreva as expressões para os vetores campo elétrico e magnético desta onda. Expresse sua resposta em função de λ, E_m e da velocidade da luz c.

(b) (1,0 ponto) Calcule a energia por unidade de tempo que atravessa as áreas A_1 e A_2 mostradas na figura. Estas áreas são quadrados de lado L.



Solução da questão 4

(a) A direção de propagação da onda é a mesma do produto $\vec{E}\times\vec{B} = E\,\widehat{\jmath}\times B\,\widehat{\imath} = -EB\,\widehat{k}$, ou seja a onda se propaga na direção negativa do eixo z.

$$\vec{E} = E_m\cos(kz+\omega t+\phi)\widehat{\jmath} = E_m\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\,(z+ct)+\phi\right]\widehat{\jmath},$$

onde usamos $k = 2\pi/\lambda$, $\omega = kc = 2\pi c/\lambda$.

Cálculo da fase ϕ:

$$\left.\begin{array}{l} E(0,0) = 0 \Longrightarrow E_m\cos(\phi) = 0 \Longrightarrow \phi = \pm\pi/2 \\ E(0,T/4) = E_m \Longrightarrow E_m\cos\left(\dfrac{\pi cT}{2\lambda}+\phi\right) = E_m \Leftrightarrow E_m\cos(\dfrac{\pi}{2}+\phi) = E_m \end{array}\right\} \Longrightarrow \phi = -\pi/2.$$

Portanto,

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{E} = E_m\cos\left[\dfrac{2\pi}{\lambda}\,(z+ct)-\dfrac{\pi}{2}\right]\widehat{\jmath} = E_m\,\mathrm{sen}\left[\dfrac{2\pi}{\lambda}\,(z+ct)\right]\widehat{\jmath}, \\ \vec{B} = \dfrac{E_m}{c}\cos\left[\dfrac{2\pi}{\lambda}\,(z+ct)-\dfrac{\pi}{2}\right]\widehat{\imath} = \dfrac{E_m}{c}\,\mathrm{sen}\left[\dfrac{2\pi}{\lambda}\,(z+ct)\right]\widehat{\imath}. \end{array}}$$

(b) A energia por unidade de tempo por unidade de área é dada pelo vetor de Poynting:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = -\frac{E_m^2}{c\mu_0}\,\mathrm{sen}^2\left[\frac{2\pi}{\lambda}\,(z+ct)\right]\widehat{k}.$$

A energia por unidade de tempo através da área A_1, adotando a normal na direção $-\widehat{k}$ e colocando $z = 0$ é

$$\frac{dU}{dt} = \int_{A_1}\vec{S}\cdot d\vec{A} = \vec{S}\cdot\vec{A}_1 = \boxed{\frac{E_m^2L^2}{c\mu_0}\,\mathrm{sen}^2\left[\frac{2\pi ct}{\lambda}\right]}.$$

A energia por unidade de tempo através da área A_2 é zero porque $\vec{S}\perp d\vec{A}$ em A_2.

Formulário

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}, \quad V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V,$$

$$I = \int \vec{J}\cdot d\vec{A}, \quad V = RI, \quad P = VI = I^2R = \frac{V^2}{R}, \quad \vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B},$$

$$d\mathcal{V} = 4\pi r^2 dr, \quad \Phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{F} = Id\vec{\ell}\times\vec{B}, \quad \vec{\mu} = I\vec{A},$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B}, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}, \quad \frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int},$$

$$\vec{E} = E_m\cos(kx\pm\omega t+\phi)\widehat{e}_y, \quad \vec{B} = B_m\cos(kx\pm\omega t+\phi)\widehat{e}_z, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad k\,c = \omega,$$

$$f = 1/T, \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}, \quad S = uc, \quad u = u_e + u_m = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad I =< S >= \frac{E_m B_m}{2\mu_0},$$