Física III - 4323203

Escola Politécnica - 2015

GABARITO DA P2

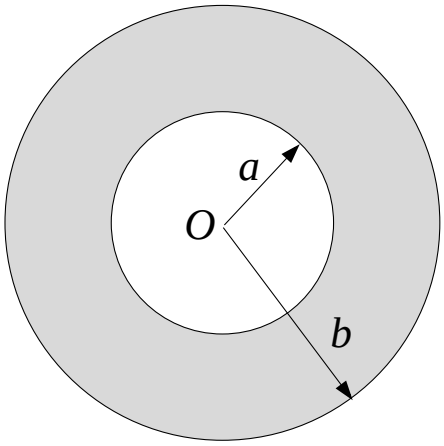
14 de maio de 2015

Questão 1

Considere uma camada esférica condutora de raio interno a e raio externo b, conforme a figura. A resistividade da camada cresce linearmente com a distância r ao centro O, sendo dada por

$$\rho(r) = \alpha r,$$

onde α é uma constante positiva.



(a) (0,5 ponto) Determine a dimensão da constante α no Sistema Internacional de Unidades.

(b) (1,0 ponto) Calcule a resistência elétrica da camada esférica na direção radial.

(c) (1,0 ponto) Uma diferença de potencial $V > 0$ é aplicada entre as duas superfícies. Supondo que o potencial maior seja o da superfície interna, calcule a corrente e o vetor densidade de corrente.

Solução da questão 1

(a) A resistividade possui dimensão de resistência multiplicada por unidade de comprimento. Portanto, no SI, α deve ter dimensão de Ohm.

(b) Utilizando a expressão para a resistência de uma camada infinitesimal de espessura dr e área $4\pi r^2$, teremos

$$dR = \rho(r)\frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{\alpha}{4\pi}\frac{dr}{r}$$

Integrando entre $r = a$ e $r = b$, teremos

$$R = \frac{A}{4\pi}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\alpha \log(b/a)}{4\pi}$$

(c) A diferença de potencial V produz uma corrente I dada por

$$I = \frac{V}{R} = \frac{4\pi V}{\alpha \log(b/a)}.$$

Essa corrente vai da superfície interna (maior potencial) para a externa (menor potencial). Por conservação de carga, devemos ter $I = \oint \vec{J} \cdot d\vec{A}$, para qualquer superfície fechada passando por pontos entre a e b . Usando a simetria radial da densidade de corrente, podemos considerar uma superfície esférica de raio r ($a \leq r \leq b$) de modo que

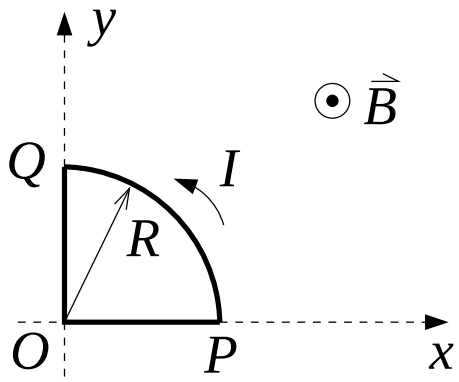
$$\oint \vec{J}(r)\cdot d\vec{A} = \oint J(r)\widehat{r}\cdot\widehat{r}dA = \oint J(r)dA = J(r)\oint dA = J(r)4\pi r^2 = I = \frac{4\pi V}{\alpha \log(b/a)}$$

Logo,

$$\vec{J}(r) = \frac{V}{\alpha \log(b/a) r^2}\widehat{r}.$$

Questão 2

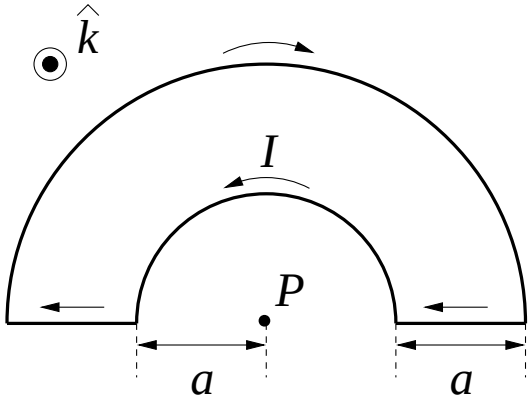
(I) Na figura abaixo o campo magnético $\vec{B} = B\hat{k}$ é uniforme e perpendicular ao plano da figura, apontando para fora (direção positiva do eixo z). A espira é formada por um quarto de círculo de raio R (arco $\overset{\frown}{PQ}$) e por dois segmentos retilíneos $\overline{OP}$ e $\overline{QO}$ de comprimento R, conforme a figura. Pela espira circula uma corrente I no sentido anti-horário.



(a) (1,0 ponto) Calcule a força magnética em cada um dos três trechos $\overline{QO}$, $\overline{OP}$ e $\overset{\frown}{PQ}$ da espira.

(b) (0,5 ponto) Calcule o torque que age sobre a espira.

(II) (1,0 ponto) A figura abaixo mostra um circuito formado por dois trechos semi-circulares de raios a e $2a$ e dois trechos retos. Uma corrente I percorre o circuito no sentido indicado na figura. Calcule o campo magnético no ponto P.



Solução da questão 2

(I) Forças magnéticas

(a) No trecho reto $\overline{OP}$, $d\vec{\ell} = dx\,\widehat{\imath}$

$$\vec{F}_1 = I\left(\int_O^P d\vec{\ell}\right) \times \vec{B} = I\,R\widehat{\imath} \times \vec{B} = -IBR\widehat{\jmath}.$$

No trecho reto $\overline{QO}$, $d\vec{\ell} = -dy\,\widehat{\jmath}$

$$\vec{F}_2 = I\left(\int_Q^O d\vec{\ell}\right) \times \vec{B} = -I\,R\widehat{\jmath} \times \vec{B} = -IBR\widehat{\imath}.$$

A força total age sobre uma espira num campo magnético homogêneo é zero. Portanto, a força no trecho $\widehat{PQ}$ é

$$\vec{F}_3 = -\vec{F}_1 - \vec{F}_2 = IBR(\widehat{\imath} + \widehat{\jmath}).$$

Solução alternativa:

$$\vec{F}_3 = I\left(\int_P^Q d\vec{\ell}\right) \times \vec{B} = I\,(-R\widehat{\imath} + R\widehat{\jmath}) \times \vec{B} = IBR(\widehat{\imath} + \widehat{\jmath}).$$

(b) O torque pode ser calculado com a equação

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = (I\,\frac{\pi R^2}{4}\,\widehat{k}) \times (B\widehat{k}) = \vec{0}.$$

(II) Campo magnético dos fios

Usando a lei de Biot-Savart vemos que os segmentos retos não contribuem para o campo em P uma vez que para estes trechos $d\vec{l} \times \widehat{r} = 0$.

No trecho circular de raio a, $d\vec{l} \times \widehat{r} = d\ell\,\widehat{k}$. Portanto

$$d\vec{B}_a = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} d\ell\,\widehat{k} \Longrightarrow \vec{B}_a = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}\widehat{k}\int d\ell = \frac{\mu_0 I}{4a}\,\widehat{k}.$$

No trecho circular de raio $2a$, $d\vec{l} \times \widehat{r} = -d\ell\,\widehat{k}$. Portanto

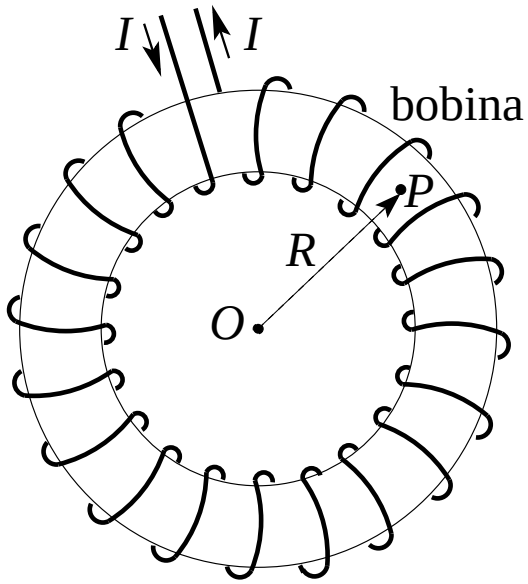
$$d\vec{B}_{2a} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi(2a)^2} d\ell\,\widehat{k} \Longrightarrow \vec{B}_{2a} = -\frac{\mu_0 I}{16\pi a^2}\widehat{k}\int d\ell = -\frac{\mu_0 I}{8a}\,\widehat{k}.$$

Usando o princípio de superposição, teremos

$$\vec{B}_P = \vec{B}_a + \vec{B}_{2a} = \frac{\mu_0 I}{8a}\,\widehat{k}.$$

Questão 3

A figura abaixo mostra uma bobina toroidal com com N espiras bem compactadas. Uma corrente I percorre o enrolamento desta bobina.



(a) (1,0 ponto) Calcule o módulo do campo magnético B em um ponto P no interior da bobina, a uma distância R do seu eixo, quando a bobina é constituída só pelo enrolamento (núcleo de ar). Lembre que para o magnetismo o ar é praticamente indistinguível do vácuo.

(b) (1,0 ponto) Calcule a relação entre as correntes I e I_{Fe} na bobina com núcleo de ar ($K_m \approx 1$) e com núcleo de ferro ($K_m = 1400$), respectivamente que produzem o mesmo campo magnético B no ponto P.

(c) (0,5 ponto) Calcule a suscetibilidade do alumínio se com o núcleo de alumínio e mesma corrente o campo magnético no ponto P passa a ser 1,00002 do valor no ar. Como se designa esse elemento segundo sua propriedade magnética?

Solução da questão 3

(a) Cálculo do campo da bobina toroidal: usando o círculo de raio R, coaxial com o fio, e a lei de Ampère obtemos

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \, I_{int}$$

Como $\vec{B}$ é paralelo a $d\vec{\ell}$ e $B = B(r)$ e $I_{int} = NI$ podemos escrever

$$\oint_C B \, d\ell = B(R) \oint_C d\ell = B 2\pi R = \mu_0 \, NI \Longrightarrow B(R) = \frac{\mu_0 \, NI}{2\pi R}$$

(b) Na presença do material magnético o campo no vácuo aumenta por um fator K_m. Para o ar $K_m \approx 1$. Usando o resultado do item (a) podemos escrever

$$B_{\rm Fe}(R) = \frac{\mu_0 K_m \, N I_{\rm Fe}}{2\pi R} \; ; \qquad B_{\rm ar}(R) = \frac{\mu_0 \, NI}{2\pi R}.$$

Igualando os campos magnéticos obtemos

$$\frac{I}{I_{\rm Fe}} = K_m = 1400.$$

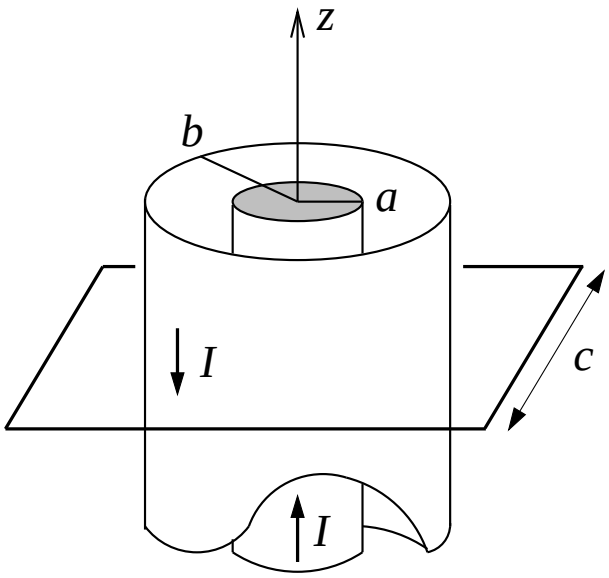
(c) Analogamente ao item anterior

$$\frac{B_{\rm Al}(R)}{B_{\rm ar}(R)} = K_m = 1 + \chi_m = 1,00002$$

Portanto, $\chi_m = 0,00002$ e o alumínio é paramagnético.

Questão 4

Um fio condutor cilíndrico muito longo e de seção reta de raio a está envolto por uma casca cilíndrica condutora fina de raio b, formando um *cabo coaxial* cujo eixo coincide com o eixo z. Pelo fio passa uma corrente I, na direção positiva do eixo z, uniformemente distribuída através de sua seção reta. Na casca cilíndrica passa uma corrente total I, na direção negativa do eixo z, conforme a figura.



(a) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo magnético nos pontos onde $0 < r < a$ (r é a distância do ponto até o eixo z).

(b) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo magnético na região $a < r < b$.

(c) (0,5 ponto) Calcule a integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$ ao longo do quadrado de lado $c > 2b$ coaxial com o eixo z, conforme a figura.

Solução da questão 4

A lei de Ampère

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I(r)$$

e a simetria cilíndrica do problema ($\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r)2\pi r$) resultam em

$$B(r) = \mu_0 \frac{I(r)}{2\pi r} \qquad \text{e} \qquad \vec{B} = \mu_0 \frac{I(r)}{2\pi r} \widehat{\phi}.$$

(a) Para $0 < r < a$,

$$I(r) = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} = \pi r^2 J = \pi r^2 \frac{I}{\pi a^2} = \frac{I r^2}{a^2}.$$

Logo

$$\vec{B}(0 < r < a) = \frac{\mu_0 \, I \, r}{2\pi a^2} \, \widehat{\phi}$$

(b) Para $a < r < b$, $I(r) = I$. Logo

$$\vec{B}(a < r < b) = \frac{\mu_0 \, I}{2\pi r} \, \widehat{\phi}$$

(c) Usando a lei de Ampère no percurso quadrado obtemos

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{int} = \mu_0 (I - I) = 0.$$

Formulário

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A}, \quad dR = \rho \frac{d\ell}{A}, \quad V = RI, \quad V = \mathcal{E} - Ir, \quad P = VI,$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \vec{E}/\rho, \quad \vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}, \quad \vec{\mu} = I\vec{A},$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}, \quad U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \widehat{r}}{r^2}, \quad \frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int},$$

$$\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}, \quad \vec{B}_m = \mu_0 \vec{M}, \quad \vec{M} = \chi_m \vec{H} = \chi_m \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}, \quad \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m,$$

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = (1 + \chi_m)\vec{B}_0, \quad \mu = K_m \mu_0 = (1 + \chi_m)\mu_0,$$