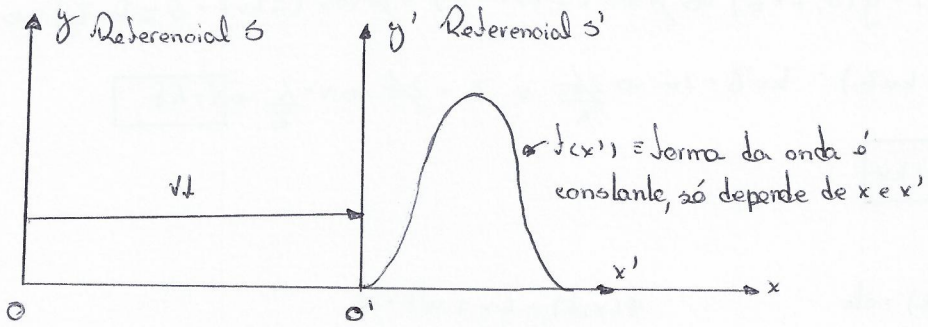
Resumo P3 de Física II - 2016 | Paulo Akira 2016.2

O que é uma onda? É uma perturbação no meio. A perturbação é propagada de uma região a outra.

1) Classificação:

Movimento das partículas no meio é $\left\{\begin{array}{l}\text{perpendicular}\\ \text{paralela}\end{array}\right\}$ a propagação da onda que acaba por caracterizar um onda $\left\{\begin{array}{l}\text{transversal}\\ \text{longitudinal}\end{array}\right\}$. Vamos apenas ondas mecânicas (precisa de um meio material para se propagar)

2) Equação da onda no caso geral (1D):

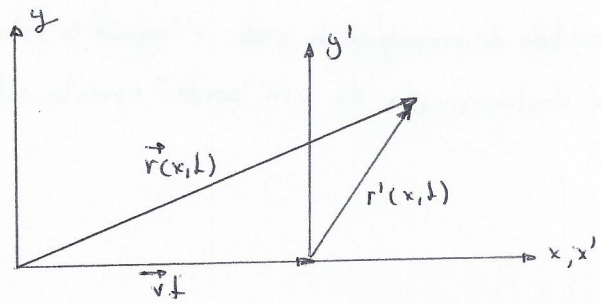


Em $t=0$: $O \equiv O'$

No referencial S':

$y'(x',0) = y'(x',t) = f(x')$

No referencial S:



$\vec{r}(x,t) = \vec{r}'(x,t) + \vec{v}t \Rightarrow \vec{r}'(x,t) = \vec{r}(x,t) - \vec{v}t$

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y = y' \Rightarrow y(x,t) = f(x') \Rightarrow \boxed{y(x,t) = f(x-vt)} \end{cases}$$

Representa uma onda progressiva no sentido + x

(caso tivessem $y(x,t) = f(x+vt)$ a onda progressiva teria sentido $-x$)

Dedução da equação geral da onda:

- Velocidade transversal e aceleração de um ponto qualquer: $V_y = \frac{\partial y}{\partial t}$ e $a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial^2 t}$

Tomando uma onda $y(x,t) = f(x') = f(x-vt)$:

$$V_y = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial t} = \frac{df}{dx} \cdot (-v) = h(x')$$

$$a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial V_y}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial t} = \frac{dh}{dx'} \cdot (-v) = -v\frac{d^2 f}{dx^2} \cdot (-v) = v^2 \cdot \frac{d^2 f}{dx'^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{df}{dx'} \cdot 1 = \frac{df}{dx'} = z(x')$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{dz}{dx'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{d^2 f}{dx'^2} \quad (2)$$

de (1) e (2):

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$ é a equação geral da onda

Solução mais geral:

$y(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt)$

3) Ondas harmônicas

$$\boxed{y(x,t) = A\cos(kx \mp \overset{\omega}{kvt} + \delta)}$$, A = amplitude da onda , δ = constante de fase , k = número de ondas ($k > 0$)

• Fixando $t = 0$:

$y(x,0) = A\cos(kx + \delta) \Rightarrow$ função periódica em x

Seja λ um período espacial. $y(x,0) = y(x+\lambda,0) \Rightarrow \cancel{A}\cos(kx+\delta) = \cancel{A}\cos(k(x+\lambda)+\delta) \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos(kx+\delta) = \cos(kx+\delta+k\lambda) \therefore k\lambda = 2\pi \Rightarrow \boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$, λ = comprimento de onda

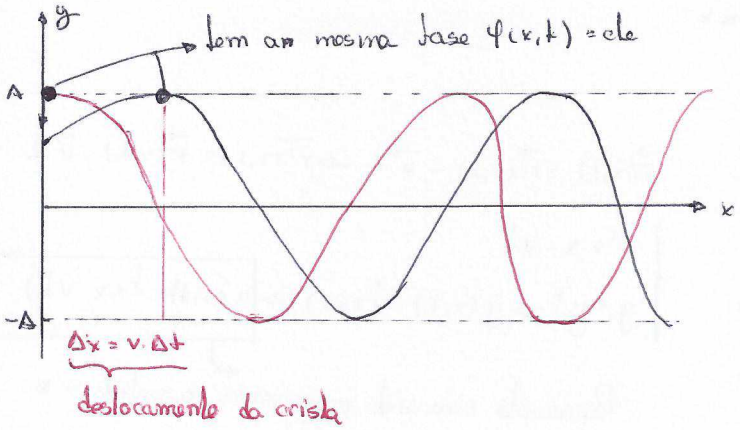
• Fixando $x = 0$:

$y(0,t) = A\cos(\mp kvt + \delta) \Rightarrow$ função periódica em t

Seja τ um período temporal. $y(0,t) = y(0,t+\tau) \Rightarrow \cancel{A}\cos(\mp kvt+\delta) = \cancel{A}\cos(\mp kvt + \delta \mp kv\tau) \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos(\mp kvt+\delta) = \cos(\mp kvt+\delta\mp kv\tau) \therefore kv\tau = 2\pi \Rightarrow \frac{\cancel{2\pi}}{\lambda}\cdot v\cdot\tau = \cancel{2\pi} \Rightarrow v = \frac{\lambda}{\tau} \Rightarrow \boxed{v = \lambda f}$

Como $\omega = \frac{2\pi}{\tau} \Rightarrow kv\cdot\frac{\cancel{2\pi}}{\omega} = \cancel{2\pi} \Rightarrow \boxed{\omega = kv}$



$\varphi(x,t) = kx \mp \omega t + \delta$

$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \Rightarrow k\frac{dx}{dt} \mp \omega = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \mp\frac{\omega}{k} \therefore$

a velocidade de propagação da onda é igual a velocidade do deslocamento de um "ponto" (crista, vale, ...)

4) Velocidade da propagação de onda em uma corda.

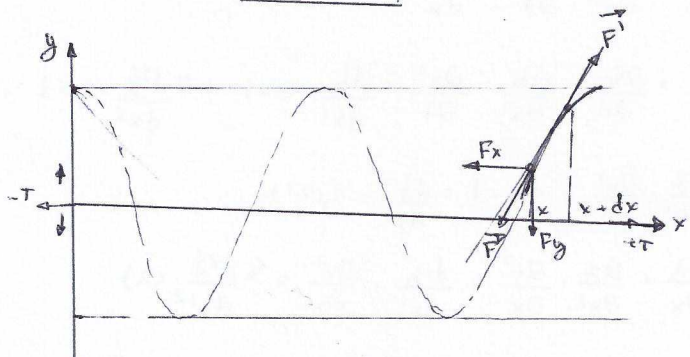
A velocidade de propagação da onda não depende da fonte (define apenas a frequência) mas sim do meio em que está inserido.

Corda $\Rightarrow \begin{cases} \text{Tensão } T \\ \text{Densidade (linear)}: \mu = \frac{m}{L}, \ m = \text{massa da corda}, \ L = \text{comprimento} \end{cases}$

Esperamos: $\uparrow T \longrightarrow \uparrow v$, $\uparrow \mu \longrightarrow \downarrow v$ $\therefore \boxed{v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}}$

5) Energia no movimento ondulatório

Dado uma corda esticada sob tensão T, geramos ondas transversais.



Sabemos $\frac{F_y}{F_x}$ representa a inclinação da curva no ponto x e no instante t tq. $\frac{F_y}{F_x} = \frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{(x,t)}$. Como o movimento de cada partícula é transversal então não alteramos nada no eixo x, portanto, $F_x \cong -T$. Assim $\frac{F_y(x,t)}{F_x(x,t)} = \frac{\partial y}{\partial x} \Rightarrow$

$\Rightarrow F_y(x,t) = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot F_x(x,t) \Rightarrow F_y(x,t) = -T \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$. O ponto x tem uma velocidade transversal $V_y = \frac{\partial y}{\partial t}\vec{j}$ e, portanto, a força F_y realiza trabalho. Conclui-se que a potência associada a $\vec{F}$ é $\vec{F_y}\vec{V_y} = -T\frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$.

No caso da onda harmônica temos que $y(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \delta)$ $\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial x} = +Ak\,\text{sen}(kx - \omega t + \delta) \\ \frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega\,\text{sen}(kx - \omega t + \delta) \end{cases}$, portanto,

$P(x,t) = -T \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = +TA^2k\omega\,\text{sen}^2(kx - \omega t + \delta)$

atenção aos sinais $\Rightarrow$ energia é transmitida na direção da onda

Por definição a intensidade é o valor médio de P em um tempo τ: $\boxed{I = \langle P \rangle = \frac{1}{2} \cdot Tk\omega A^2}$

Mas $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow T = v^2 \cdot \mu \Rightarrow T = v\mu \cdot \frac{\omega}{k}$, portanto, $\boxed{I = \frac{1}{2} v\mu\omega^2 A^2}$

6) Interferência

$\rightsquigarrow$ superposição de ondas na mesma região

$\rightsquigarrow$ onda resultante $\Rightarrow$ princípio de superposição

a) 2 ondas: mesma frequencia e sentido de propagação ($\Rightarrow$ mesmo número de ondas)

$y_1(x,t) = A_1\cos(kx - \omega t + \delta_1)$
$y_2(x,t) = A_2\cos(kx - \omega t + \delta_2)$ $\Rightarrow y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \delta_{12})$, onde

$\boxed{A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta_{12}}$ e $\boxed{\delta_{12} = \delta_1 - \delta_2}$

$I \propto A^2 \Rightarrow \boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1}\sqrt{I_2}\cos\delta_{12}}$

Caso ~~$\delta_{12} = 1$~~ $\cos\delta_{12} = 1$, $\delta_{12} = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Então $\begin{cases} A_{max} = A_1 + A_2 = A \\ I = I_{max} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2 \\ \Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \delta_{12} = 2\pi n \end{cases}$

Interferência Construtiva $\Rightarrow$ ondas estão em fase: cristas (e vales) de y_1 estão alinhados com cristas (e vales) de y_2

Caso ~~$\delta_{12} = 1$~~ $\cos\delta_{12} = -1$, $\delta_{12} = (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Então $\begin{cases} A = A_{min} = (A_1 - A_2) \\ I = I_{min} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2 \\ \Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = (2n+1)\pi = \delta_{12} \end{cases}$

Interferência destrutiva $\Rightarrow$ oposição de fase: cristas (e vales) de y_1 estão alinhados com vales (e cristas) de y_2.

b) 2 ondas: mesma frequência e sentidos opostos de propagação

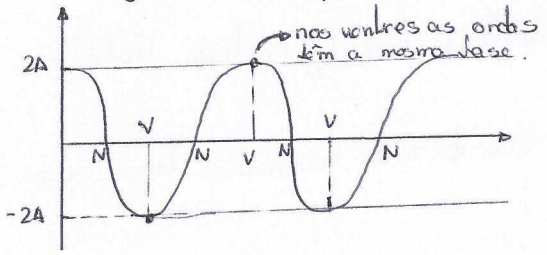
Ondas em op. de fase podem ter $\delta = 0$ devido a diferença de sinais

$y_1(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$

$y_2(x,t) = A\cos(kx + \omega t)$

$\therefore\ y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = 2A\cos(kx)\cos(\omega t)$

- Não é uma onda ~~é uma onda~~ progressiva porque há valores de x onde $y(x,t) = 0$ para qualquer t $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ onda estacionária



- Taxa de transferência de energia é zero

c) 2 ondas: frequências diferentes, mesmo sentido de propagação

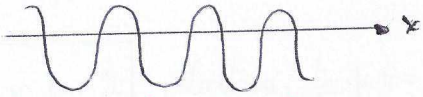
$y_1(x,t) = A\cos(-\omega_1 t + k_1 x) \Rightarrow v_1 = \omega_1/k_1$

$y_2(x,t) = A\cos(-\omega_2 t + k_2 x) \Rightarrow v_2 = \omega_2/k_2$

$\therefore\ y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = 2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t)$

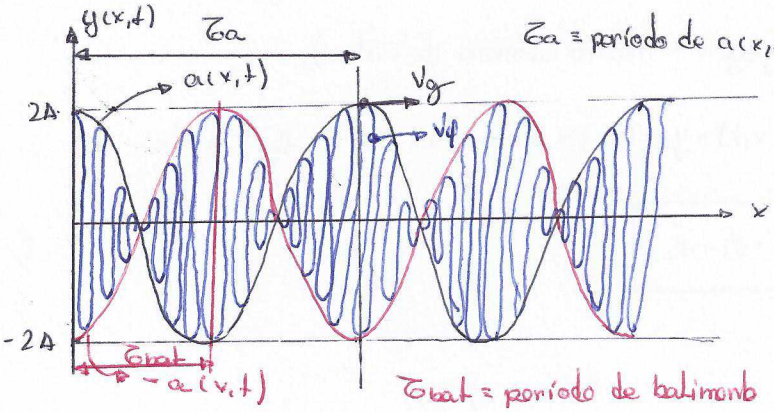
Caso $k_1 > k_2$ e $k_1 \sim k_2$: $\Delta k \ll \bar{k}$, $\Delta\omega \ll \bar{\omega}$:

$\Rightarrow \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)$: $v_g = \dfrac{\frac{\Delta\omega}{2}}{\frac{\Delta k}{2}} = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta k}$ $\rightarrow$ velocidade do grupo $\Rightarrow$ vel. de translação do envelório



$\Rightarrow \cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t)$: $v_\varphi = \dfrac{\bar{\omega}}{\bar{k}}$ $\rightarrow$ velocidade de fase $\Rightarrow$ vel. de translação de um ponto onde $\varphi(x,t) = cte$

$y(x,t) = a(x,t)\cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t)$, com $a(x,t) = 2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2} - \frac{\Delta\omega t}{2}\right)$



τ_a = período de $a(x,t)$

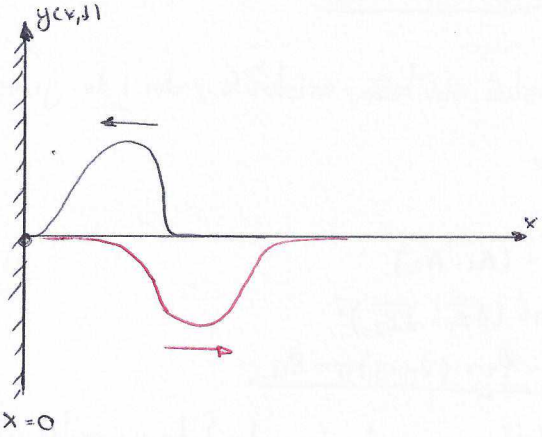
- se $v_g \neq v_\varphi \Rightarrow$ meio é dispersivo
- temos batimento

$\tau_{bat} = \dfrac{\tau_a}{2}$, onde $\tau_a = \dfrac{2\pi}{\frac{\Delta\omega}{2}} = \dfrac{4\pi}{\Delta\omega}$

$\tau_{bat} = \dfrac{2\pi}{\Delta\omega} = \dfrac{2\pi}{2\pi(f_1 - f_2)} = \dfrac{1}{f_1 - f_2} = \dfrac{1}{f_{bat}}$

7) Reflexão de Ondas:

a) Extremidade Fixa:



Antes de chegar a $x = 0$: $y(x,t) = g(x + vt)$

Onda chega em $x = 0$: $y(x,t) = g(x + vt) + f(x - vt)$ (1)

Condição de Contorno: extremidade $x = 0$ é fixa $y(0,t) = 0, \forall t$ (2)

De (1) e (2): $0 = g(vt) + f(-vt) \Rightarrow f(-vt) = -g(vt)$

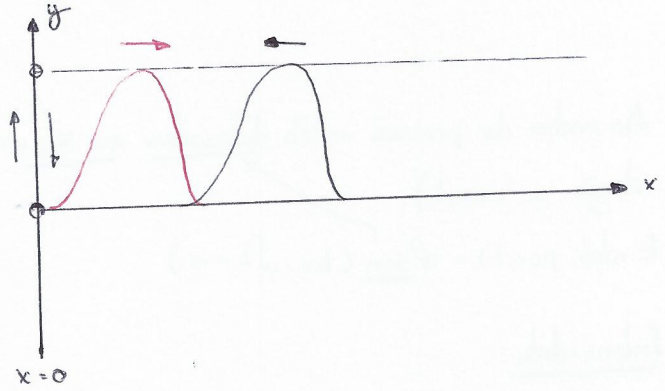
Para onda f, $-vt$ é $x' = x - vt$ em $x = 0 \Rightarrow f(-x') = -g(-x')$

$\Rightarrow f(x - vt) = -g(vt - x)$

Assim, $y(x,t) = g(vt + x) - g(vt - x)$ $\rightarrow$ mesma forma, sent. oposto de prop.

$\rightarrow$ há inversão

b) Extremidade livre



Antes de chegar a $x=0$: $y(x,t) = g(x+vt)$

Onda chega a $x=0$, $y(x,t) = g(x+vt) + f(x-vt)$

Condição de contorno: extremidade livre em $x=0$,

$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{(0,t)} = 0, \forall t$ (anel só sobe e desce).

Como $y(x,t) = g(x+vt) + f(x-vt)$, se $f' = \frac{\partial f}{\partial x}$, $g' = \frac{\partial g}{\partial x}$

$g'(vt) + f'(-vt) = 0 \Rightarrow f'(-vt) = -g'(vt)$

Para f, $-vt$ é $x' = x - vt$ em $x=0$, $f'(x') = -g'(-x')$

$\Rightarrow f(x') = g(-x')$

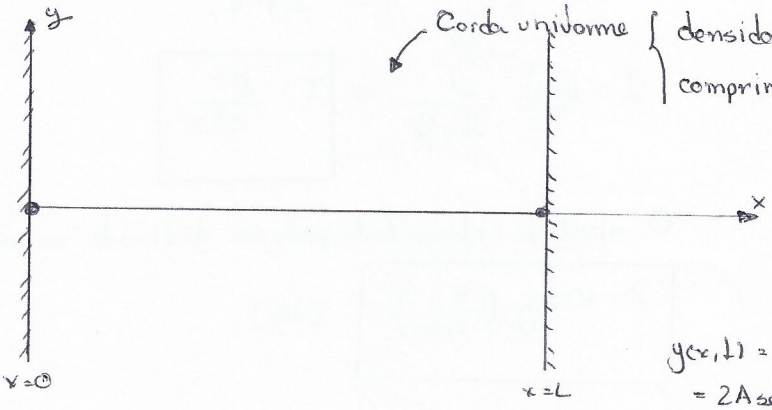
Então $f(x-vt) = g(vt-x)$. Assim $y(x,t) =$

$= g(x+vt) + g(x+vt)$

mesma forma, sent. oposto de propagação

não há inversão

8) Modos Normais de Vibração:



Corda uniforme $\left\{\begin{array}{l}\text{densidade } \mu \\ \text{comprimento } L\end{array}\right\}$ fixada nas duas extremidades

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Extremidades fixas} \Rightarrow \text{reflexão com inversão} \\ \text{Superposição de ondas} \Rightarrow \text{ondas estacionárias}\end{array}\right.$

$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t) - A\cos(kx + \omega t) =$

$= 2A\,\text{sen}(kx)\,\text{sen}(\omega t)$

Condição de contorno: extremidades fixas

$y(x,t) \longrightarrow y(0,t) = y(L,t) = 0, \forall t$

Assim $y(0,t) = 0 \Rightarrow 0 = 0$

$y(L,t) = 0 \Rightarrow 2A\,\text{sen}(kL)\,\text{sen}(\omega t) = 0$

Então $kL = n\pi$, $n = 1, 2, \ldots$ Temos ondas estacionárias tq. $\boxed{k_n = \frac{n\pi}{L}, \; n \in \mathbb{N}^*}$

n representa o número de ventres (ou anti-nós) em ambas as extremidades fechadas. Se as extremidades forem abertas n é o número de nós

$k_n = \frac{2\cancel{\pi}}{\lambda_n} = \frac{n\cancel{\pi}}{L} \Rightarrow \boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n}} \Rightarrow \boxed{L = \frac{n\lambda_n}{2}}$

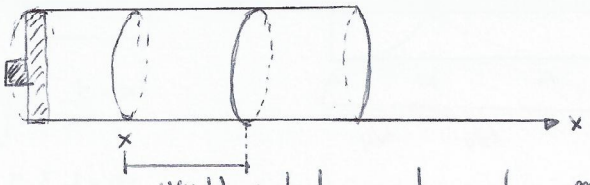
Obs: a distância entre dois anti-nós é $\boxed{\frac{\lambda_n}{2}}$

$\omega_n = k_n \cdot v = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{k_n \cdot v}{2\pi} \Rightarrow f = \frac{n\cancel{\pi}}{L} \cdot \frac{1}{2\cancel{\pi}} \cdot v \Rightarrow \boxed{f = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}}$

$2\pi f = k_n v \Rightarrow 2\pi f = \frac{2\cancel{\pi}}{\lambda_n} v \Rightarrow f = \frac{n}{2L} \cdot v$

9) Ondas Sonoras

• São ondas longitudinais!!!



Valores de Equilíbrio

variações

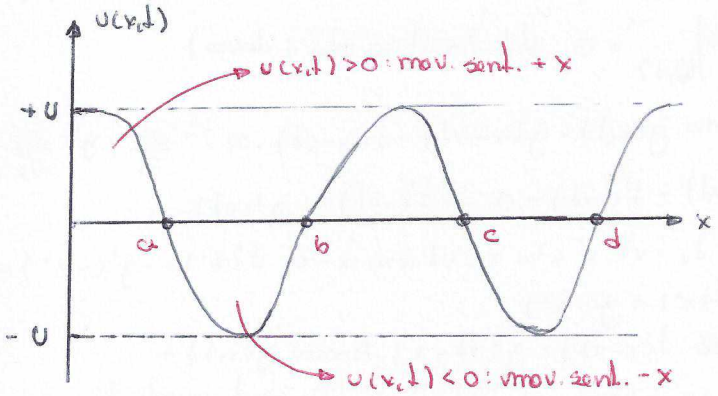
$\left\{\begin{array}{l}\text{Pressão: } P(x,t) = P_0 + p(x,t) \\ \text{Densidade: } \rho(x,t) = \rho_0 + \delta(x,t)\end{array}\right.$

$u(x,t) \Rightarrow$ deslocamento: produz mudanças na densidade e na pressão do fluído

$u(x,t)$, $p(x,t)$ e $\delta(x,t)$ satisfazem a equação de ondas com velocidade de propagação $v = v_{som}$ no meio

deslocamento longitudinal

• Caso Ondas Harmônicas: $u(x,t) = U\cos(kx - \omega t + \alpha)$



As ondas de pressão estão defasadas em $\pi/2$ em relação a $u(x,t)$.

Então $p(x,t) = iP\,\text{sen}(kx - \omega t + \alpha)$

Intensidade:

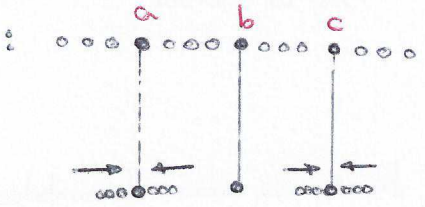
$$I = \left\langle \frac{\text{Potência}}{\text{Superfície}} \right\rangle = \left\langle \frac{F(x,t)}{A} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle =$$

$$= \left\langle p(x,t) \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle = \langle iP\omega U \cdot \text{sen}^2(kx - \omega t + \alpha) \rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{P\omega U}{2}, \text{ onde } U = \frac{iP}{\rho_0 v^2 k} \therefore$$

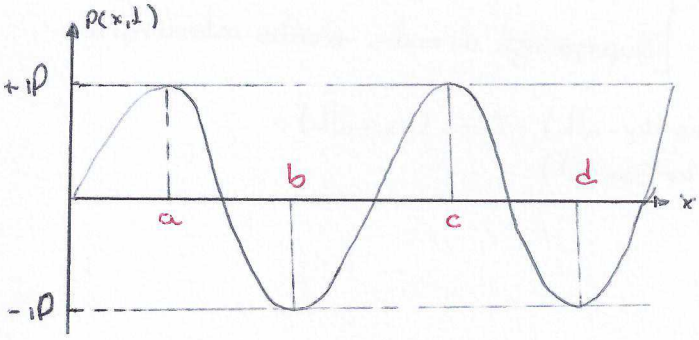
$$I = \frac{iP\omega}{2} \cdot \frac{iP}{\rho_0 v^2 k} \Rightarrow \boxed{I = \frac{iP^2}{2\rho_0 v}}$$

Antes de gerar a onda:



pressão e densidade grandes

pressão e densidade bem menores



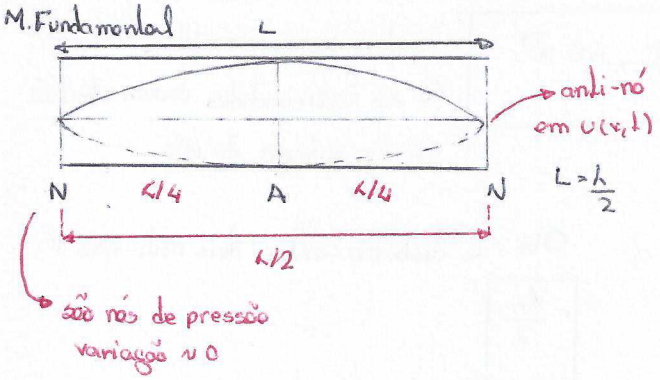
O nível de intensidade pode ser definido como:

$$\boxed{\beta = 10 \log\left(\frac{I}{I_{min}}\right)} \quad [dB]$$

O intervalo audível pelos humanos é: $\beta \sim 0 - 120$ dB

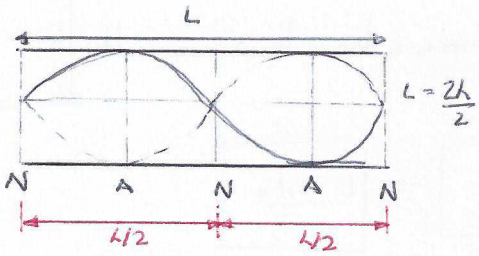
Caso: tubo com extremidades abertas

M. Fundamental



n° de nós = n + 1

n° de anti-nós = n



$L = \frac{2\lambda}{2}$

Em geral:

$$\boxed{L = n\frac{\lambda_n}{2}}, \; n = 1, 2, \ldots$$

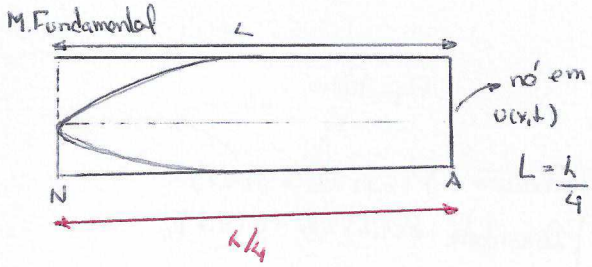
$$\omega_n = k_n v \Rightarrow k_n v = \frac{2\pi}{\lambda_n} \cdot v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi v}{\lambda_n} = 2\pi f_n \Rightarrow$$

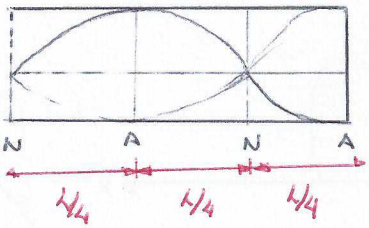
$$\Rightarrow \boxed{f_n = \frac{n}{2L} \cdot v}$$ na vibração em uma corda

Caso: uma extremidade fechada

M. Fundamental



n° de nós = n° de anti-nós = $\frac{(n+1)}{2}$



$L = \frac{3\lambda}{4}$

Em geral:

$$\boxed{L = \frac{n\lambda_n}{4}}, \; n = 1, 3, 5, \ldots$$

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} \Rightarrow \boxed{f_n = \frac{n}{4L} \cdot v}$$

$n = 1, 3, 5, \ldots$