Lista 3 Paulo Akira 2016.2

1) Trabalhando-se de uma onda harmônica sabemos que $y(x,t) = A\cos(k(x \mp vt) + \delta)$. Fixando $t=0$, temos

$y(x,0) = A\cos(kx + \delta) \therefore y(x,0) = y(x+\lambda,0) \Rightarrow$

$\Rightarrow y(x,0) = A\cos(kx + k\lambda + \delta) = A\cos(kx + 2\pi + \delta)$

$\therefore k\lambda = 2\pi \Rightarrow k = 2\pi/\lambda$ (1)

Agora, fixando $t=0$, temos $y(0,t) = A\cos(\mp kvt + \delta)$

$\therefore y(0,t) = y(0,t+\tau) \Rightarrow y(0,t) = A\cos(\mp kvt \mp kv\tau + \delta)$

$\therefore kv\tau = 2\pi$ (2)

De (1) em (2):

$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot v\tau = 2\pi \Rightarrow v = \frac{\lambda}{\tau} \Rightarrow v = \lambda \cdot \nu$, ν = frequencia $= \frac{1}{\tau}$

Consideramos que a onda segue o sentido positivo:

$v = 800 \cdot 1 = 800$ km/h $\cong 222$ m/s

2) a) Fixando x, observamos que a primeira crista demorou 0,5 s para se mover 1m. Para que se mova o valor do comprimento de onda $\lambda = 4$m deverá demorar $\tau = 2$s

$v = \frac{\lambda}{\tau} = \frac{4}{2} = 2$ m/s

b) $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 0{,}5\pi\ m^{-1}$, k = número de ondas

$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ rad/s, ω = frequência angular

Do gráfico, $A = 0{,}1$m, A = amplitude

$y(0,0) = A\cos(\delta) \Rightarrow \cancel{A} = \cancel{A} \cdot \cos(\delta) \Rightarrow \delta = 0$,

δ = constante de fase

A equação da onda será:

$y(x,t) = 0{,}1 \cdot \cos(0{,}5x - \pi t)$m, sabendo que a onda se propaga no sentido +x.

c) A equação da velocidade transversal será dada por:

$\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = -0{,}1 \cdot (-\pi) \cdot \text{sen}(0{,}5x - \pi t) = 0{,}1\pi\,\text{sen}(0{,}5x - \pi t)$

A velocidade v_y será máxima quando $\text{sen}(0{,}5x - \pi t) = 1$

$v_y^{máx} = 0{,}1\pi$ m/s

3) a) A equação geral da onda será:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) - v\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = kv \therefore \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) = k \therefore \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = 0 \quad (3)$$

As equações (2) e (3) satisfazem (1), portanto y é solução da equação.

b) $\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = -v \cdot Ae^{i(x-vt)} \therefore \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \cdot Ae^{i(x-vt)}$ (4)

$\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) = Ae^{i(x-vt)} \therefore \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = Ae^{i(x-vt)}$ (5)

As equações (4) e (5) satisfazem a equação (1) portanto, y é solução da equação.

4) a) A onda se desloca no sentido negativo do eixo x

$v = -\frac{\omega}{k} \Rightarrow v = -\frac{314}{62{,}8} \Rightarrow v = -5$ m/s

b) $\lambda = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{62{,}8} \Rightarrow \lambda \cong 0{,}1$m, λ = comprimento da onda

$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{314} \cong 0{,}02$ s, τ = período

$\nu = \frac{1}{\tau} \cong 50\ s^{-1}$, ν = frequência

c) $y(x,t) = 0{,}001\,\text{sen}(62{,}8x - 314t)$

$\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = 0{,}001 \cdot 314 \cos(62{,}8x - 314t)$

$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = -0{,}001 \cdot 314^2\,\text{sen}(62{,}8x - 314t)$

A aceleração transversal máxima $a_{máx}$ será dada quando $\text{sen}(62{,}8x - 314t) = 1$:

$a_{max} = -1 \cdot 10^{-3} \cdot 314^2 = 98{,}596$ m/s^2

5) a) Pela equação dada sabemos que $A = 2 \cdot 10^{-2}$m

b) Sabemos que $k = 2\pi \cdot 0{,}5\,m^{-1}$ e $\omega = 2\pi 10$ rad/s

$\lambda = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{2\pi \cdot 1/2} \Rightarrow \lambda = 2$m

$\tau = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow \nu = \frac{2\pi \cdot 10}{2\pi} = 10$ Hz

c) O sentido será −x com velocidade $v = \lambda \cdot \nu = 20$m/

d) $2\pi 0{,}5x_2 - 2\pi 0{,}5x_1 + 2\pi 10t - 2\pi 10t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cancel{\pi} 0{,}5\Delta x = \frac{\cancel{\pi}}{6} \Rightarrow \Delta x \cong 0{,}17$m

6) a) $V = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{TL}{m}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 20}{2}} = 10\ m/s$

$\nu = 5\,Hz \Rightarrow \lambda = \frac{V}{\nu} \Rightarrow \lambda = \frac{10}{5} \Rightarrow \lambda = 2m$

b) $y(x,t) = A\cos(kx - kvt + \delta)$

$y(0,0) = 3 \cdot 10^{-2} \cos\delta \Rightarrow 1{,}5\ 10^{-2} = 3 \cdot 10^{-2} \cos\delta \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\delta = \frac{1}{2}$ $\delta = \frac{\pi}{3}$ (para cima)

$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow k = \frac{2\pi}{2} \Rightarrow k = \pi\ m^{-1}$

$\omega = kv \Rightarrow \omega = \pi \cdot 10 \Rightarrow \omega = 10\pi\ rad/s$

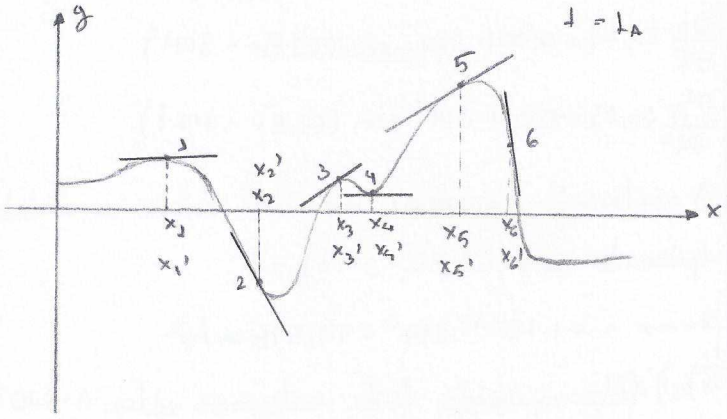
$y(x,t) = 3 \cdot 10^{-2} \cdot \cos(\pi x - 10\pi t + \pi/3)\ m$

c) $\mathcal{E} = \frac{1}{2}\mu \cdot V \cdot \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{1}{10} \cdot 100\pi^2 \cdot \frac{9}{100} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{E} = \frac{9\pi^2}{200}\ W$

7) a) Onda no sentido $+x$: a função de onda é $y(x,t) = f(x') = f(x - vt)$. Daí, sabemos que: $V_y = \frac{\partial y}{\partial t} = -v\frac{df}{dx'}$, e $a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \cdot \frac{d^2 f}{dx'^2}$, $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{df}{dx'}$ e $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{d^2 f}{dx'^2}$

Para achar o sentido da velocidade basta analisar a inclinação da reta tangente em cada ponto, dado por $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{df}{dx'}$.



Ponto 1: $\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{(x_1,t_A)} = \left.\frac{df}{dx'}\right|_{(x_1')} = 0 \Rightarrow V_y(x_1,t_A) = 0$

Analogamente, para o ponto 4, $V_y(x_4,t_A) = 0$

Ponto 2: $\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{(x_2,t_A)} = \left.\frac{df}{dx'}\right|_{(x_2')} < 0 \Rightarrow V_y(x_2,t_A) > 0$

Analogamente, para o ponto 6, $V_y(x_6,t_A) > 0$

Ponto 3: $\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{(x_3,t_A)} = \left.\frac{df}{dx'}\right|_{(x_3')} > 0 \Rightarrow V_y(x_3,t_A) < 0$

Analogamente, para o ponto 5, $V_y(x_5,t_A) < 0$

b) Para verificar o sentido da aceleração, basta analisar a concavidade de cada ponto, ou seja, a segunda derivada $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{dx'^2}$

Ponto 1: $\left.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_{(x_1,t_A)} = \left.\frac{d^2 f}{dx'^2}\right|_{(x_1')} < 0 \Rightarrow a_y(x_1,t_A) < 0$

Analogamente, para os pontos 3 e 5, $a_y(x_3,t_A) < 0$ e $a_y(x_5,t_A) < 0$.

Ponto 2: $\left.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_{(x_2,t_A)} = \left.\frac{d^2 f}{dx'^2}\right|_{(x_2')} > 0 \Rightarrow a_y(x_2,t_A) > 0$

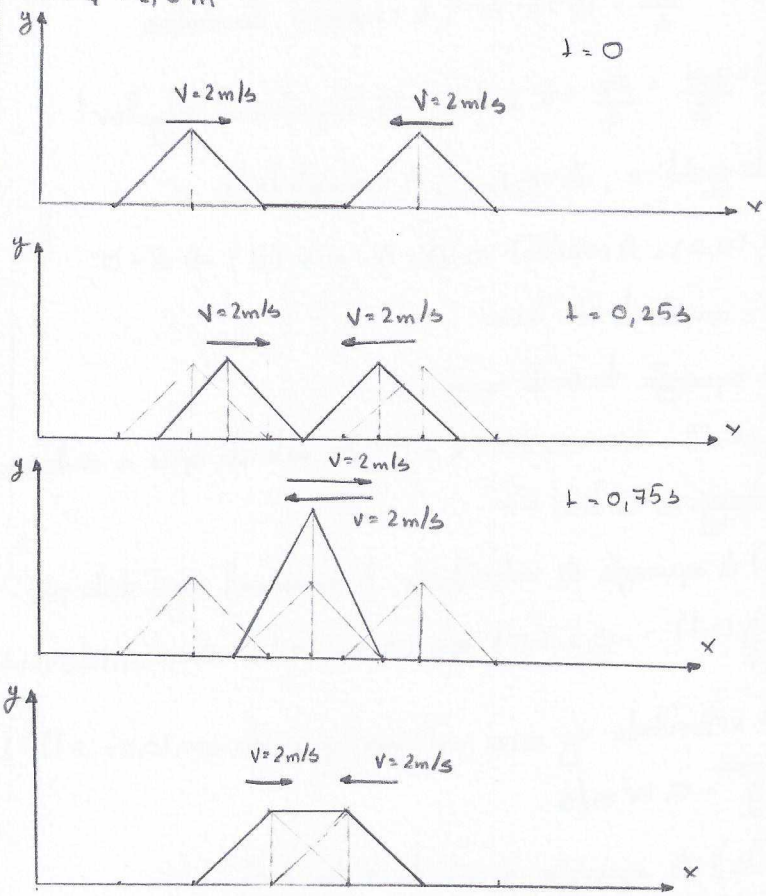
Analogamente, para o ponto 4, $a_y(x_4,t_A) > 0$

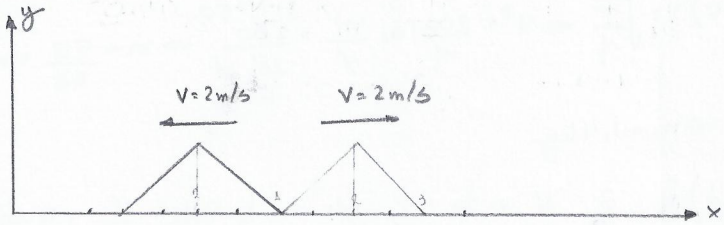
Ponto 6: $\left.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_{(x_6,t_A)} = \left.\frac{d^2 f}{dx'^2}\right|_{(x_6')} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_y(x_6,t_A) = 0$ (ponto de inflexão)

c) No sentido $x-$ a expressão da velocidade será $V_y(x,t) = v \cdot \frac{df}{dx'}$, então bastaria trocar os sinais em a). Já a expressão da aceleração seria $a_y = (-v)^2 \frac{d^2 f}{dx'^2} = v^2 \frac{d^2 f}{dx'^2}$ então os sinais de b) se manterão.

9) Como a velocidade de propagação é constante, teremos $\Delta x_1 = 2 \cdot 0{,}25 = 0{,}5m$, $\Delta x_2 = 1{,}5m$, $\Delta x_3 = 2m$ e $\Delta x_4 = 2{,}5m$



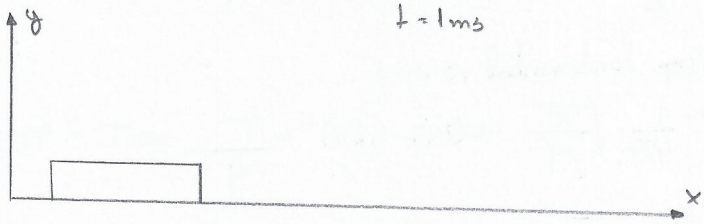


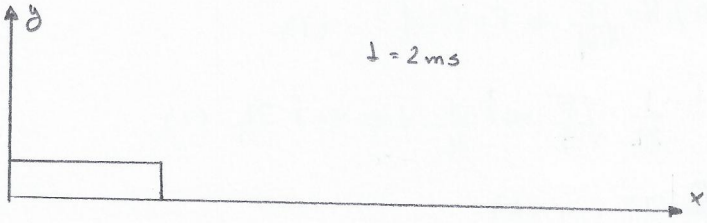
10) a) $\Delta x_1 = 5 \cdot 10^{-3} = 5\,mm$ $\Delta x_5 = 5 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 25\,mm$

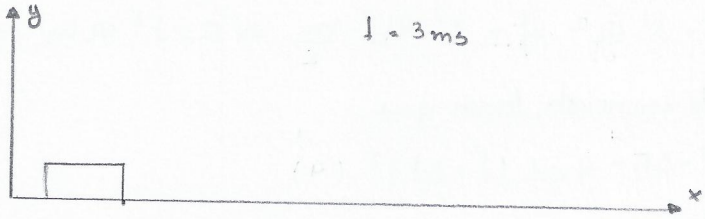
$\Delta x_2 = 5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 10\,mm$ $\Delta x_6 = 5 \cdot 6 \cdot 10^{-3} = 30\,mm$

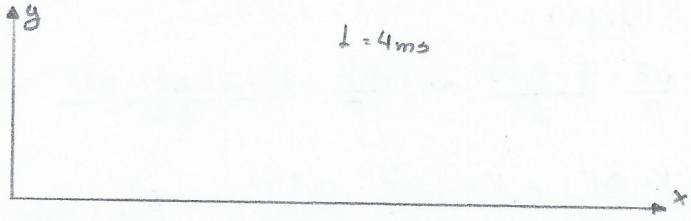
$\Delta x_3 = 5 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 15\,mm$ $\Delta x_7 = 5 \cdot 7 \cdot 10^{-3} = 35\,mm$

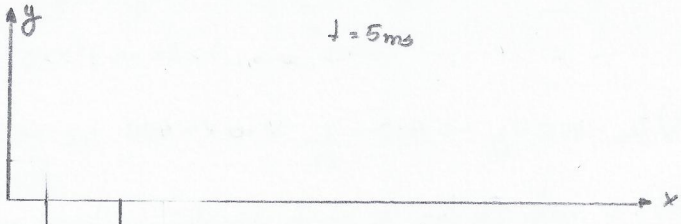
$\Delta x_4 = 5 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 20\,mm$

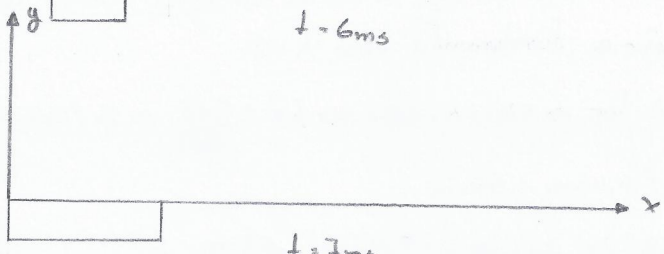


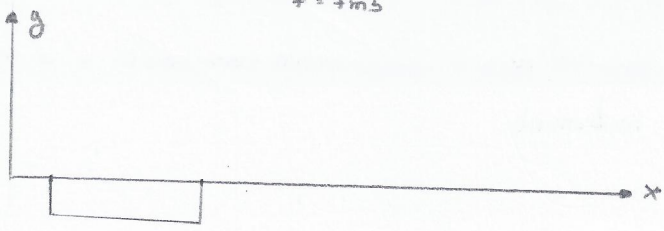




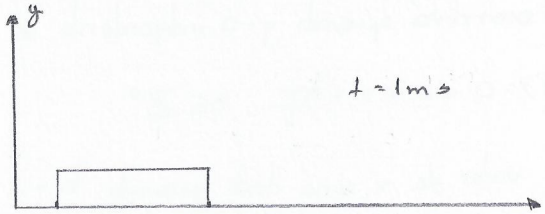


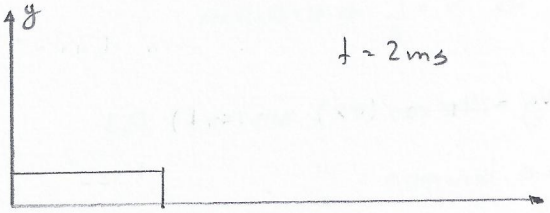


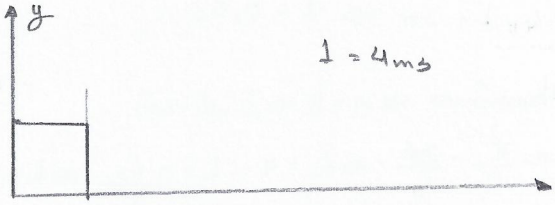


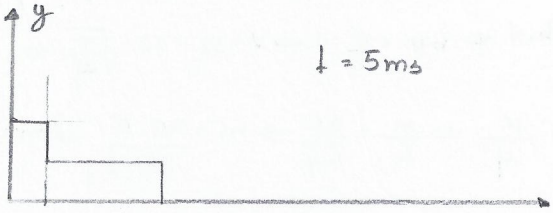


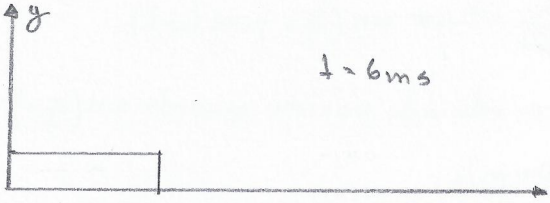
b)

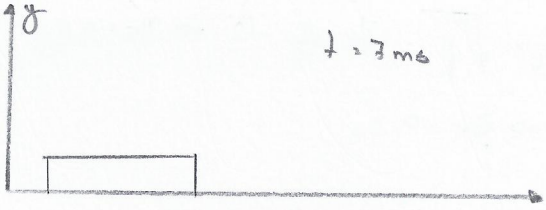












8) Tratando-se de duas ondas progressivas que se propagam no mesmo sentido e tem a mesma frequência:

$\delta_{12} = \delta_1 - \delta_2 \Rightarrow \delta_{12} = (\delta + \pi/2) - \delta = \pi/2$

$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta_{12} \Rightarrow A^2 = A_1^2 + A_2^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow A = 5\,cm$

11) a) $y_1 = 0{,}5\,[\cos(\pi x)\cos(4\pi t) + \text{sen}(\pi x)\,\text{sen}(4\pi t)]$

$y_2 = 0{,}5\,[\cos(\pi x)\cos(4\pi t) - \text{sen}(\pi x)\,\text{sen}(4\pi t)]$

$y = y_1 + y_2 = 2 \cdot 0{,}05\cos(\pi x) \cdot \cos(4\pi t)$

Um nó ocorrerá quando $y=0$ independente do t dado:

$\cos(\pi x)=0 \Leftrightarrow \pi x = \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}^*$

O menor valor de x será dado quando $n=1$:

$\pi x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 0,5m$

b) $y' = v_y = -4\pi \cos(\pi x) \cdot \text{sen}(4\pi t) \cdot 0,1$

Para $x=0$ teremos:

$v_y = 0 \Rightarrow 0 = -4\pi \ \text{sen}(4\pi t) \Leftrightarrow \text{sen}(4\pi t) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\pi t = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

$n=0$: $4\pi t = 0 \Rightarrow t = 0s$

$n=1$: $4\pi t = \pi \Rightarrow t = 0,25s$

$n=2$: $4\pi t = 2\pi \Rightarrow t = 0,5s$

12) a) 3º harmônico $\Rightarrow n=3 \Rightarrow$ 3 anti-nós

$k_3 = \frac{2\pi}{\lambda_3} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\lambda_3} \Rightarrow \lambda_3 = 4 \therefore L = \frac{n \cdot \lambda_3}{2} \Rightarrow L = 6m$

b) $\omega_3 = k_3 V \Rightarrow 6\pi = \frac{\pi}{2} V \Rightarrow V = 12 \therefore 12 = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 144 = \frac{96}{\mu} \Rightarrow \frac{m}{L} = \frac{96}{144} \Rightarrow m = \frac{96 \cdot 6}{12 \cdot 12} \Rightarrow m = 4kg$

c) $v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = 5 \cdot 6\pi \ \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cos(6\pi t)$

Teremos a velocidade máxima quando $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos(6\pi t)=1$

$v_y^{max} = 30\pi \ m/s$

d) $\nu_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \therefore \nu_5 = \frac{5}{12} \cdot 12 \Rightarrow \nu_5 = 5Hz$

$\frac{1}{\tau_5} = 5 \Rightarrow \tau_5 = 0,2s$

14) a) $f_3 = \frac{3}{2L}\sqrt{\frac{T_i}{\mu}}$, se aumentarmos a tensão para $4T_i$ de forma que ainda oscile no terceiro harmônico:

$f_3' = \frac{3}{2L}\sqrt{\frac{4T_i}{\mu}} \Rightarrow f_3' = \frac{3}{2L} \cdot 2\sqrt{\frac{T_i}{\mu}} \Rightarrow f_3' = 2f_3$

b) $\lambda_3 = \frac{2L}{3} \therefore \lambda_3 = \lambda_3'$ (o comprimento da onda não depende da tensão).

15) a) 2º harmonico $\Rightarrow n=2 \Rightarrow$ 3 anti-nós

$k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lambda_2 = 4 \therefore \lambda_2 = \frac{2L}{2} \Rightarrow L = 4m$

b) $\omega_2 = k_2 V \Rightarrow 12\pi = \frac{\pi}{2} \cdot V \Rightarrow V = 24 m/s$

c) $V = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow V^2 = \frac{200}{\mu} \Rightarrow \frac{m}{4} = \frac{200}{24 \cdot 24} \Rightarrow m = \frac{50}{36} \Rightarrow$

$\Rightarrow m = 1,4kg$

d) $f_3 = \frac{3}{8} V \Rightarrow f_3 = \frac{3}{8} \cdot 24 \Rightarrow f_3 = 9Hz \therefore \frac{1}{\tau_3} = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow \tau_3 = \frac{1}{9} \Rightarrow \tau_3 \simeq 0,11s$

16) a) $d = 7800 kg/m^3 \Rightarrow 7800 = \frac{m}{\underbrace{0,635\pi}_{L}(0,203)^2 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{m}{L} = 1009 \cdot 10^{-6} = 0,001009 = \mu$

freq. fundamental $\Rightarrow n=1$

$f = \frac{1}{1,27} \cdot \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow (247 \cdot 1,27)^2 = \frac{T}{\mu} \Rightarrow T \simeq 99,3N$

b) $V = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow F = V^2 \cdot \mu$ (1)

$f = \frac{1}{2L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow f = \frac{1}{2L} \cdot V \Rightarrow V = f \cdot 2L$ (2)

De (2) em (1):

$F = f^2 \cdot 4L^2 \cdot \mu = f^2 \cdot 4L^2 \cdot \frac{m}{L} \Rightarrow F = f^2 \cdot 4Lm$ (3)

Do enunciado, temos que:

$F + \Delta F = 4mL(f + \Delta f)^2$ (4)

De (4)/(3):

$1 + \frac{\Delta F}{F} = \frac{(f+\Delta f)^2}{f^2} \Rightarrow 1 + \frac{\Delta F}{F} = \frac{f^2 + 2f\Delta f + \Delta f^2}{f^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{1} + \frac{\Delta F}{F} = \cancel{1} + \frac{2\Delta f}{f} + \left(\frac{\Delta f}{f}\right)^2 \Rightarrow \frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta F}{2F}$

$\rightarrow 0$, pois, $f > \Delta f \Rightarrow f^2 >> \Delta f^2$

13) a) $f_{A4} = 440Hz \Rightarrow 440 = \frac{1}{2L} \cdot V \Rightarrow V = 440 \cdot 1,2 = 528 m/s$

Como a nota D_5 faz a corda também vibrar na frequência fundamental então $\lambda = 2x$:

$V = \lambda \cdot f_{D5} \Rightarrow 528 = \lambda \cdot 587 \Rightarrow 2x = \frac{528}{587} \Rightarrow 2x \simeq 0,9 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \simeq 0,45m = 45cm$

b) $528 = 2x' \cdot 392 \Rightarrow x' \simeq 0,67m = 67cm$

Não é possível pois o comprimento necessário x' é maior que o instrumento.

18) a) Os topos do montículos representam áreas onde a pressão é maior. Portanto, são os anti-nós da onda de pressão e os nós da onda de deslocamento.

b) Como trata-se de um tubo fechado nas duas extremidades, o comportamento é análogo a vibração em uma corda.

Para que $L = \Delta L$ devemos considerar o primeiro harmônico tal que $n = 1$:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \therefore \lambda = \frac{2\Delta L}{1} \Rightarrow V = \lambda \cdot \gamma \Rightarrow V = 2\Delta L \cdot \gamma$$

19) Considerando a velocidade do som $v = 343\,m/s$:

$$V = f_i \cdot \lambda_i \Rightarrow \begin{cases} f_1 = \frac{V}{\lambda_1} = \frac{343}{0{,}065} \cong 5277\,Hz \\ f_2 = \frac{V}{\lambda_2} = \frac{343}{0{,}0652} \cong 5261\,Hz \end{cases}$$

$i = 1, 2$

$$f_{bat} = f_1 - f_2 \cong 5277 - 5261 \cong 16\,Hz$$

20) $L = 1{,}14\,m$, $L' = 1{,}16\,m$

Tratando-se de tubos que tem uma extremidade aberta e a outra fechada:

$$\lambda_n = \frac{4L}{n}, \quad n = 1, 3, 5, \ldots$$

, Tratando-se da frequência

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} \Rightarrow f_n = \frac{n}{4L} \cdot V_{som}$$

fundamental temos que $n = 1$:

$$f_1 = \frac{V_{som}}{4L} = \frac{343}{4 \cdot 1{,}14} \cong 75{,}2\,Hz$$

$$f_1' = \frac{V_{som}}{4L'} = \frac{343}{4 \cdot 1{,}16} \cong 74\,Hz$$

$$\therefore f_{bat} = f_1 - f_1' \cong 1{,}2\,Hz$$

21) a) Se eu variar a tensão em ΔF então a frequência vai sofrer uma variação Δf que, por definição, é a frequência de batimento.

$$\Delta f = f' - f \Rightarrow f' = \Delta f + f$$

$$\Delta F = F' - F \Rightarrow F' = \Delta F + F$$

, $n = 1$

$$V = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow \frac{F}{\mu} = v^2 \Rightarrow F = \mu v^2$$

$$v = \lambda \cdot f \therefore F = \mu \cdot \lambda^2 \cdot f^2 \Rightarrow F = \mu \cdot (2L)^2 \cdot f^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = \mu \cdot 4L^2 f^2 \Rightarrow F = \frac{m}{L} 4L^2 f^2 \Rightarrow F = 4mLf^2 \quad (1)$$

$$F' = 4mLf'^2 \Rightarrow \Delta F + F = 4mL \cdot (f + \Delta f)^2 \quad (2)$$

Dividindo (2) por (1):

$$\frac{\Delta F + F}{F} = \frac{4mL(f + \Delta f)^2}{4mLf^2} \Rightarrow 1 + \frac{F}{\Delta F} = \frac{f^2 + 2f \cdot \Delta f + \Delta f^2}{f^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{\Delta F}{F} = 1 + \frac{2\Delta f}{f} + \underbrace{\frac{\Delta f^2}{f^2}}_{0} \Rightarrow \Delta f = \frac{f}{2} \cdot \frac{\Delta F}{F} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_{bat} = \frac{f}{2} \cdot \frac{\Delta F}{F}$$

b) Substituindo os valores na fórmula acima:

$$1{,}5 = \frac{440}{2} \cdot \frac{\Delta F}{F} \Rightarrow \frac{\Delta F}{F} = \frac{1{,}5}{220} = 0{,}007$$

A tensão variou em 0,7%

17) a) Como as fontes emitem ondas com a mesma freq. e estas se propagam no mesmo meio então os comprimentos de onda serão iguais.

$$d = 4 - 3 = 1\,m$$

$$V_{som} = 344 \Rightarrow 344 = 172 \cdot \lambda \Rightarrow \lambda = 2\,m$$

A diferença de fase será:

$$\delta_{AB} = \frac{d \cdot 2\pi}{\lambda} \Rightarrow \delta_{AB} = \frac{1 \cdot 2\pi}{2} \Rightarrow \delta_{AB} = \pi\,m$$

(como $\cos \delta_{AB} = -1$ então a interferência é destrutiva

b) As fontes emitem sons uniformemente em todas as direções, portanto, tratam-se de ondas esféricas.

$$I_A = \frac{8^2 \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 4^2} = \frac{10^{-4}}{8\pi} \cong 3{,}98 \cdot 10^{-6}\,W/m^2$$

$$I_B = \frac{6 \cdot 10^{-5}}{4\pi \cdot 3^2} = \frac{10^{-5}}{6\pi} \cong 5{,}31 \cdot 10^{-7}\,W/m^2$$

$$\beta_A = \log\left(\frac{I_A}{I_{min}}\right)^{10} = 10 \log\left(\frac{3{,}98 \cdot 10^{-6}}{10^{-12}}\right) \cong 66\,dB$$

$$\beta_B = \log\left(\frac{I_B}{I_{min}}\right)^{10} = 10 \log\left(\frac{5{,}31 \cdot 10^{-7}}{10^{-12}}\right) \cong 57{,}3\,dB$$

c) Tratam-se de ondas que se propagam na mesma direção com a mesma frequência:

$$I_C = \left(\sqrt{I_A} - \sqrt{I_B}\right)^2 = \left(\sqrt{3{,}96 \cdot 10^{-6}} - \sqrt{5{,}31 \cdot 10^{-7}}\right)^2 \cong$$

$$\cong 1{,}6 \cdot 10^{-6}\,W/m^2$$

$$\beta_C = \log\left(\frac{I_C}{I_{min}}\right)^{10} = 10 \log\left(\frac{1{,}6 \cdot 10^{-6}}{10^{-12}}\right) \cong 62\,dB$$

Prova de 2011:

1) a) $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{4}{0,01}} \Rightarrow v = 20 m/s$

b) $y(0,t) = y(0,t+\tau) \Rightarrow 0,1 \operatorname{sen}(2\pi t) = 0,1 \operatorname{sen}(2\pi t + 2\pi\tau) \therefore 2\pi\tau = 2\pi \Rightarrow \tau = 1s \therefore f = 1Hz$

c) $v = \lambda \cdot f \Rightarrow 20 = \lambda 1 \Rightarrow \lambda = 20 m$

d) $y(x,t) = A \operatorname{sen}(kx - kvt)$

$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow k = \frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10}$ $\Rightarrow y(x,t) = A \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{10} - 2\pi t\right)$. Do enunciado sabemos que $A = 0,1$

$y(x,t) = 0,1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{10} - 2\pi t\right) = 0,1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{10} - 2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$

e) $\mathcal{P} = \langle P \rangle = \frac{T k \omega A^2}{2} = \frac{4}{2} \cdot \frac{\pi}{10} \cdot 2\pi \cdot 10^{-2} = 4\pi^2 10^{-2} W$

2) a) Primeiro harmônico $\Rightarrow n = 1$

Da equação geral sabemos que: $k = 4\pi$, $\omega = 8\pi$ e que as ondas estavam em fase

$y_1 = A \operatorname{sen}(4\pi x - 8\pi t)$ e $y_2 = A \operatorname{sen}(4\pi x + 8\pi t)$

$2A = 0,3 \Rightarrow A = 0,15 \therefore y(x,t) = 0,15 \operatorname{sen}(4\pi x - 8\pi t) + 0,15 \operatorname{sen}(4\pi x + 8\pi t)$

b) $\omega = kv \Rightarrow v = \frac{\omega}{k}$ $\begin{cases} v_1 = \frac{8\pi}{4\pi} \\ v_2 = \frac{8\pi}{4\pi} \end{cases} \Rightarrow v_1 = v_2 = 2 m/s$

c) $\lambda = 2L \Rightarrow L = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow L = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{k} \Rightarrow L = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} m$

$D = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow D = \frac{2\pi}{k} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow D = \frac{1}{4} m$

d) $\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = -0,3 \cdot 8\pi \cdot \operatorname{sen}(4\pi x) \cdot \operatorname{sen}(8\pi t) \therefore$ a velocidade máxima será $v_y^{max}(x,t) = 0,3 \cdot 8\pi = 2,4\pi m/s$

Que ocorrerá no primeiro (e único) ventre

e) Segundo harmônico $\Rightarrow n = 2$

O comprimento da corda continua sendo $L = 0,25m$: $\lambda_2 = \frac{2L}{2} \Rightarrow \lambda_2 = 0,25 m$

A velocidade de propagação na corda também se mantém $f_2 = \frac{v}{\lambda_2} = \frac{2}{1/4} \Rightarrow f_2 = 8Hz$

Prova de 2010:

1) a) A amplitude decorrerá de y máximo $\Rightarrow \cos(2\pi(0,5x + 10t)) = 1$: $A = 2 \cdot 10^{-2}$

b) Sabemos que $k = \pi$ e $\omega = 20\pi$: $\cancel{\pi} = \frac{2\cancel{\pi}}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 2m$ e $\tau = \frac{2\cancel{\pi}}{\cancel{20}_{10}\cancel{\pi}} \Rightarrow f = 10Hz$

c) $v = \lambda \cdot f \Rightarrow v = 2 \cdot 10 = 20 m/s$. O sentido de propagação será no sentido negativo do eixo x

d) $\underbrace{(\pi x_1 + 20\pi t)}_{\varphi_1} - \underbrace{(\pi x_2 + 20t)}_{\varphi_2} = \underbrace{\pi/6}_{\Delta\varphi} \Rightarrow \pi \Delta x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{6}\,m$

Exercício (Sala 1):

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{500}{5}} = 10\,m/s \;,\; \omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 5{,}25 = 10{,}5\pi = \frac{21}{2}\pi \;,\; kv = \omega \Rightarrow k \cdot 10 = \frac{21}{2}\pi \Rightarrow k = k = \frac{21}{20}\pi$$

As ondas tem a mesma frequencia ($\Rightarrow$ mesmo número de ondas) e estão em fases opostas.

$$y_1(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \delta_1) \qquad \frac{\partial y_1}{\partial t}(x,t) = \omega A \,\text{sen}(kx - \omega t + \delta_1) = v_1(x,t)$$

$$y_2(x,t) = A\cos(kx + \omega t + \delta_2) \qquad \frac{\partial y_2}{\partial t}(x,t) = -\omega A \,\text{sen}(kx + \omega t + \delta_2) = v_2(x,t)$$

Devido ao fato das ondas estarem em oposição de fase as seguintes condições de contorno devem ser satisfeitas

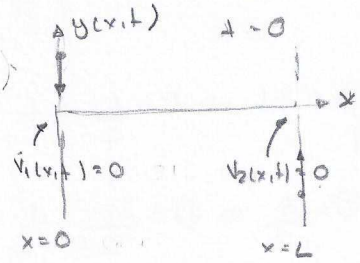
$$\begin{cases} y_1(0,0) = -y(L,0) \\ v_1(0,0) = -v_2(L,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{A}\cos(\delta_1) = -\cancel{A}\cos(kL + \delta_2) \\ \cancel{\omega A}\,\text{sen}(\delta_1) = -\cancel{\omega A}\,\text{sen}(kL + \delta_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos(\delta_1) = -\cos(21\pi + \delta_2) \\ \text{sen}(\delta_1) = -\text{sen}(21\pi + \delta_2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(\delta_1) = -[\underbrace{\cos(21\pi)}_{20\pi + \pi}\cos(\delta_2) - \overset{0}{\cancel{\text{sen}(21\pi)}}\,\text{sen}(\delta_2)] \\ \text{sen}(\delta_1) = [\overset{0}{\cancel{\text{sen}(21\pi)}}\cos(\delta_2) + \text{sen}(\delta_2)\cos(21\pi)] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos(\delta_1) = \cos(\delta_2) & (1) \\ \text{sen}(\delta_1) = -\text{sen}(\delta_2) & (2) \end{cases}$$

As equações (1) e (2) devem ser satisfeitas simultaneamente. Para isso vamos escolher $\delta_1 = \delta_2 = 0$ (*).

$$y_1(x,t) = A\cos(kx - \omega t) \qquad y_1(x,t) = 5 \cdot 10^{-3}\cos\left(\frac{21\pi}{20}x - \frac{21\pi}{2}t\right)$$

$$y_2(x,t) = A\cos(kx + \omega t) \Rightarrow y_2(x,t) = 5 \cdot 10^{-3}\cos\left(\frac{21\pi}{20}x + \frac{21\pi}{2}t\right)$$



No ponto médio da corda há uma superposição das fases:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = A\cos(kx - \omega t) + A\cos(kx + \omega t) =$$

$$= A\cos(kx)\cos(\omega t) + \cancel{A\,\text{sen}(kx)\,\text{sen}(\omega t)} + A\cos(kx)\cos(\omega t) - \cancel{A\,\text{sen}(kx)\,\text{sen}(\omega t)} =$$

$$= 2A\cos(kx)\cos(\omega t) \therefore y(x,t) = 10^{-2}\cos\left(\frac{21\pi}{20}x\right)\cos\left(\frac{21\pi}{2}t\right)$$

$21\pi - \frac{\pi}{2}$

$\frac{42\pi - \pi}{2}$

$\frac{41\pi}{2}$

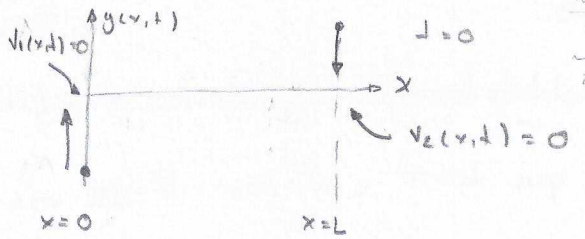
$\underbrace{\frac{40\pi}{2}}_{20\pi} + \frac{\pi}{2}$

(*) Note que poderíamos escolher outros δ_1 e δ_2 que satisfazem (1) e (2).

- se $\delta_1 = n\pi$, $n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$ teremos $\delta_2 = n\pi$, $n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$

$$y_1(x,t) = -A\cos(kx - \omega t) \qquad y_1(0,0) = -A$$

$$y_2(x,t) = -A\cos(kx - \omega t) \qquad y_2(L,0) = A$$



• se $\delta_1 = \frac{n\pi}{2}$, $n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$ temos $\delta_2 = \frac{n\pi}{2}$, $n = \mp 1, \mp 3, \mp 5, \ldots$

se $\delta_1 = \frac{\pi}{2}$

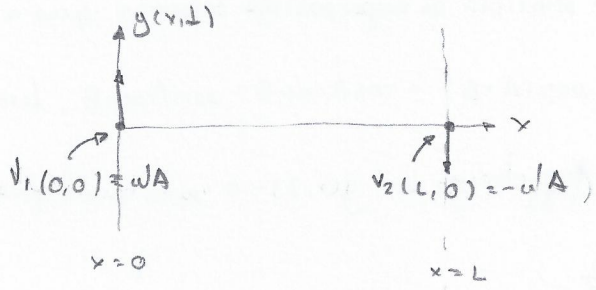
$$y_1(x,t) = -A \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

$$y_2(x,t) = A \operatorname{sen}(kx + \omega t)$$

se $\delta_2 = -\frac{\pi}{2}$

$$y(0,0) = 0$$

$$y(L,0) = 0$$



Exercício (5ba 2):

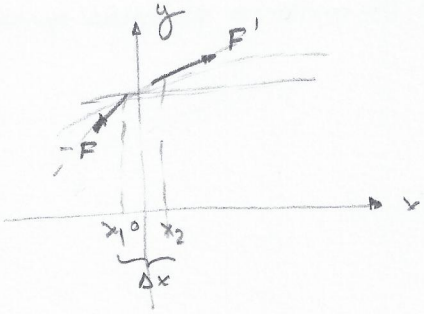
a) A velocidade de propagação na corda depende exclusivamente da tensão e da densidade: $v_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}}$ e $v_2 = \sqrt{\frac{T}{\mu_2}}$

Sabendo que as frequencias são as mesmas: $k_1 \cdot v_1 = \omega \Rightarrow k_1 = \omega\sqrt{\frac{\mu_1}{T}}$ e $k_2 v_2 = \omega \Rightarrow k_2 = \omega\sqrt{\frac{\mu_2}{T}}$

b) Do princípio da superposição, a equação da onda na corda 1 será $y(x,t) = y_i(x,t) + y_r(x,t)$.

Por definição de onda transversal, para garantir a transmissão contínua de uma corda para outra devemos ter na junção: $y(0,t) = y_t(0,t) \Rightarrow y_i(0,t) + y_r(0,t) = y_t(0,t)$. (1)

c)



Imediatamente à esquerda da junção temos que $\frac{F_y}{F_x}$ é a inclinação da reta tangente. Note que no eixo x nada foi alterado, portanto,

$$F_x = -T: \quad F_y = F_x \cdot \frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x_1} \Rightarrow F_y = -T\frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_y = -T\left[\frac{\partial y_i}{\partial x}\Big|_{x_1} + \frac{\partial y_r}{\partial x}\Big|_{x_1}\right]$$

Imediatamente à direita da junção, vamos usar um raciocínio análogo ao anterior.

$$F'_y = T\frac{\partial y_t}{\partial x}\Big|_{x_2}$$

Quando $\Delta x \to 0$ temos da Terceira Lei de Newton que $\lim_{\Delta x \to 0} F_y = -\lim_{\Delta x \to 0} F'_y \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(y_i + y_r)\Big|_{x=0} = \frac{\partial y_t}{\partial x}\Big|_{x=0}$ (2)

Exercício 5 (prova de 20xx)

Para $f = 10^3\,Hz$ temos $I_0 = 10^{-12}\,W/m^2$ e $I_m = 1\,W/m^2$

Onda esférica $\Rightarrow A = 4\pi r^2$

$$I = \frac{\text{Potência}}{\text{Área}} \therefore I_m = \frac{\text{Potência}}{\text{Área}} \Rightarrow 1 = \frac{100}{4\pi r^2} \Rightarrow r = \frac{5}{\sqrt{\pi}}$$

Exercício 11 da Lista 3:

a) Pelo princípio da superposição sabemos que a onda será dada por: $y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$.

Usando $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$, temos: $y(x,t) = 0{,}05 \cos(\pi x) \cos(4\pi t)$.

O nó se caracteriza por $y(x,t) = 0$ para qualquer t então: $\cos(\pi x) = 0 \Leftrightarrow \cancel{\pi} x = \frac{n\cancel{\pi}}{2}$, com $n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$

$\Rightarrow x = \frac{n}{2}$

Para $n = 1$ teremos $x = \frac{1}{2} = 0{,}5\,m$

b) A velocidade será dada por $V_y(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t}(x,y) = -4\pi \cdot 0{,}05 \cdot \cos(\pi x) \operatorname{sen}(4\pi t)$. Portanto, $V_y(0,t) = 0$,

se $\operatorname{sen}(4\pi t) = 0 \Leftrightarrow 4\cancel{\pi} t = n\cancel{\pi}$, com $n = 0, 1, 2, \ldots \therefore t = \frac{n}{4}$ $\begin{cases} n = 0 \Rightarrow t = 0 \\ n = 1 \Rightarrow t = 0{,}25 \\ n = 2 \Rightarrow t = 0{,}5 \end{cases}$

Exercício 15 da Lista 3:

a) A corda está fixa nas extremidades então, aplicando as condições de contorno obtemos que

$\lambda_n = \frac{2L}{n} \therefore v = \lambda_n f_n \Rightarrow f_n = \frac{v}{\lambda_n} \Rightarrow f_n = \frac{n}{2L} \cdot v \Rightarrow f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$

Da equação do segundo harmônico $(n=2)$ temos que: $k = \frac{\pi}{2}$ e $\omega = 12\pi$

$k = \frac{2\pi}{\lambda_2} \Rightarrow \frac{2\cancel{\pi}}{\lambda_2} = \frac{\cancel{\pi}}{2} \Rightarrow \lambda_2 = 4 \therefore 4 = \frac{2L}{2} \Rightarrow L = 4m$

b) Sabemos que $\omega_n = k_n v \Rightarrow \cancel{2\pi} f_n = \frac{\cancel{2\pi} v}{\lambda_n} \Rightarrow v = f_n \cdot \lambda_n$

$\omega_2 = 12\pi \Rightarrow 2\cancel{\pi} f_2 = 12\cancel{\pi} \Rightarrow f_2 = 6\,Hz \therefore v = f_2 \lambda_2 \Rightarrow v = 6 \cdot 4 = 24\,m/s$

c) Sabemos que a velocidade de propagação na corda não depende da fonte que gera a onda mas sim de sua densidade e a tensão aplicada:

$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow v^2 = \frac{T}{\mu} \Rightarrow \mu = \frac{T}{v^2} \Rightarrow \frac{m}{L} = \frac{T}{v^2} \Rightarrow \frac{m}{\cancel{4}} = \frac{\overset{50}{\cancel{200}}}{\underset{6}{\cancel{24}} \cdot \underset{6}{\cancel{24}}} \Rightarrow m = \frac{50}{36}\,kg$

d) No terceiro harmônico teremos: $f_3 = \frac{3}{8} \cdot 24 \Rightarrow f_3 = 9\,Hz \Rightarrow \frac{1}{\tau_3} = 9 \Rightarrow \tau_3 = \frac{1}{9}\,s$

Exercício 20 da Lista 3:

Tratando-se de tubos abertos em uma das extremidades podemos aplicar as condições de contorno e obter

$\lambda_n = \frac{4L}{n} \therefore v = f_n \cdot \lambda_n \Rightarrow f_n = \frac{v}{\lambda_n} \Rightarrow f_n = \frac{n}{4L} \cdot v$, com $n = 1, 3, 5, \ldots$

$\lambda_1 = \frac{4 \cdot 1{,}14}{1} = 4{,}56 \therefore f_1 = \frac{343}{4{,}56} \simeq 75{,}2\,Hz$ $\quad \lambda_1' = \frac{4 \cdot 1{,}16}{1} = 4{,}64 \therefore f_1' = \frac{343}{4{,}64} \simeq 74$ $\quad f_{bat} = f_1 - f_1' = 1{,}2\,Hz$

Testes P3 de 2014:

1) $y(x,t) = \log(x^2 - t^2) - \log(x - t) \Rightarrow y(x,t) = \log\left(\frac{x^2 - t^2}{x - t}\right) \Rightarrow y(x,t) = \log\left(\frac{(x+t)\cancel{(x-t)}}{\cancel{x-t}}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow y(x,t) = \log(x+t)$ ∴ é uma onda progressiva

2) $v_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, $v_2 = \sqrt{\frac{2T}{\mu}}$ ∴ $\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\cancel{T}}{\cancel{\mu}} \cdot \frac{\cancel{\mu}}{2\cancel{T}}} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}$

5) Entre A e C podem haver diversos nós então a escolha da distância entre esses pontos não seria adequado. Vamos escolher $\overline{CD} = \frac{17}{2} \Rightarrow \frac{\lambda}{\cancel{2}} = \frac{17}{\cancel{2}} \Rightarrow \lambda = 17 \cdot 10^{-2}\,m$

$v = \lambda \cdot f \Rightarrow 340 = 17 \cdot 10^{-2} \cdot f \Rightarrow f = \frac{20}{10^{-2}} \Rightarrow f = 2 \cdot kHz$

6) Ondas com o mesmo sentido de propagação e de mesma frequência:

$\delta_1 - \delta_2 = \frac{\pi}{3}$ ∴ $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\frac{\pi}{3} = 2 + 1 \Rightarrow A^2 = 3 \Rightarrow A = \sqrt{3}$

7) $\mu = 50\,g/cm = \frac{50 \cdot 10^{-3}}{10^{-2}}\,kg/m = 5\,kg/m$ ∴ $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{500}{5}} \Rightarrow v = 10\,m/s$ ∴ $t = \frac{10}{10} = 1\,s$

Testes P3 de 2015:

1) $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \sqrt{\frac{LT}{m}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

2) Corda presa nas extremidades ⇒ n = número de anti-nós ∴ $f_0 = \frac{4}{2L} \cdot v \Rightarrow 2f_0 = \frac{8}{2L} v$

4) $\omega_g = \frac{\Delta\omega}{2} \Rightarrow \omega_g = \frac{2\pi f_1 - 2\pi f_2}{2} \Rightarrow \cancel{2\pi} f_g = \frac{\cancel{2\pi}(f_1 - f_2)}{2} \Rightarrow f_g = \frac{10}{2} = 5\,Hz$

5) $I = \frac{\text{Potência}}{\text{Área}} \Rightarrow I = \frac{100}{4\pi r^2}$ $\begin{cases} \text{se } r = 10\,m \Rightarrow I \simeq 0{,}08\,m, & \text{se } r = 1 \Rightarrow I \simeq 8 > 1 \\ \text{se } r = 100\,m \Rightarrow I << 1, & \text{se } r = 0 \Rightarrow I \to \infty > 1 \end{cases}$