Lista 2 | Akira - 2016.2

1) A solução da equação diferencial para um oscilador harmonico amortecido em um estado subcrítico será $x(t) = e^{-\frac{\mu}{2}t} \cdot A_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Portanto, a amplitude será dada quando $\cos(\omega t + \varphi) = 1$ (valor máximo):

$A(t) = e^{-\mu/2\, t} A_0$

Em $t = 0s$: $A(0) = 15 \Rightarrow 15 = A_0$

Em $t = 1000s$: $A(1000) = 5{,}5 \Rightarrow 5{,}5 = e^{-500\mu} \cdot 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{500\mu} = \frac{150}{55} \Rightarrow 500\mu = \ln\left(\frac{150}{55}\right) \Rightarrow \mu = \frac{1}{500} \ln\left(\frac{150}{55}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu \cong 0{,}002\, s^{-1}$

2) a) $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{5}$

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\mu}{2}\right)^2} = \sqrt{5 - \left(\frac{\mu}{2}\right)^2}$

$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{5 - \left(\frac{\mu}{2}\right)^2}} \therefore t_f = \frac{8\pi}{\sqrt{5 - (\mu/2)^2}}$

$x(t) = e^{-\frac{\mu}{2}t} A_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow A(t) = e^{-\mu/2\, t} A_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{A(t_f)}_{\frac{4}{3}A_0} = e^{-\mu/2\, t_f} \cdot A_0 \Rightarrow e^{\frac{\mu}{2} t_f} = \frac{4}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\mu}{2} \cdot \frac{8\pi}{\sqrt{\frac{20 - \mu^2}{4}}} = \ln\left(\frac{4}{3}\right) \Rightarrow \mu\, 4\pi \cdot \sqrt{\frac{4}{20 - \mu^2}} = \ln\left(\frac{4}{3}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{4\mu^2}{20 - \mu^2}} = \frac{1}{4\pi} \cdot \ln\left(\frac{4}{3}\right) \Rightarrow \frac{4\mu^2}{20 - \mu^2} = \left[\frac{1}{4\pi} \ln\left(\frac{4}{3}\right)\right]^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4\mu^2 = (20 - \mu^2)(0{,}023)^2 \Rightarrow 4\mu^2 = 0{,}01058 - 0{,}000529\mu^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3{,}999471\, \mu^2 = 0{,}01058 \Rightarrow \mu \cong 0{,}051\, s^{-1}$

Sabemos que pela definição de μ temos: $\rho = \mu \cdot m \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho = 0{,}102\, kg/s$

b) $x(t) = A_0 e^{-\mu/2\, t} \cos(\omega t + \varphi)$

$\dot{x}(t) = -A_0 e^{-\mu/2\, t}\left[\frac{\mu}{2} \cos(\omega t + \varphi) + \omega \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)\right]$

Em $t = 0$: $\begin{cases} \cos\varphi = 1 \therefore \varphi = 0 \\ x(0) = A_0 \\ \dot{x}(0) = -A_0 \cdot \frac{\mu}{2} \end{cases}$

Em $t_f = \frac{8\pi}{\omega}$: $\begin{cases} x(t_f) = A_0 \cdot e^{-\frac{4\pi\mu}{\omega}} \\ \dot{x}(t_f) = -A_0 \cdot e^{-\frac{4\pi\mu}{\omega}} \cdot \frac{\mu}{2} \end{cases}$

$E(0) = \frac{k A_0^2}{2} + \frac{m \mu^2 A_0^2}{8}$

$E(t_f) = \frac{k A_0^2 e^{-\frac{8\pi\mu}{\omega}}}{2} + \frac{m \mu^2 A_0^2 e^{-\frac{8\pi\mu}{\omega}}}{8}$

$\Delta E = E(0) - E(t_f) \cong 0{,}137\, J$

3) $x(0) = 0$ e $v(0) = v_0$

Resolvendo a Segunda Lei de Newton temos que:

$M \cdot \ddot{x} = -kx - \rho \dot{x} \Rightarrow M\ddot{x} + \rho\dot{x} + kx = 0$ (1)

A solução da equação diferencial será da forma $x(t) = e^{pt}$, então:

$\dot{x}(t) = p e^{tp} = px$ e $\ddot{x}(t) = p^2 \cdot e^{pt} = p^2 x$

Substituindo em (1):

$Mp^2 x + \rho p x + kx = 0 \Rightarrow p^2 x + \mu p x + \omega_0^2 x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (p^2 + \mu p + \omega_0^2) x = 0$, com $\mu = \frac{\rho}{M}$ e $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$

Como x é uma função variável, ela nem sempre é zero, então:

$p^2 + \mu p + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow p = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4\omega_0^2}}{2} =$

$= p = -\frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$

Tratando-se de um regime subcrítico temos $\frac{\mu}{2} < \omega_0$:

$p = -\frac{\mu}{2} \pm \sqrt{-\left(\omega_0^2 - \left(\frac{\mu}{2}\right)^2\right)} = -\frac{\mu}{2} \pm i\omega$, com

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\mu}{2}\right)^2}$

Assim, sendo $p_+ = -\frac{\mu}{2} + i\omega$ e $p_- = -\frac{\mu}{2} - i\omega$ devemos ter $x(t) = C_+ e^{p_+ t} + C_- e^{p_- t} \Rightarrow x(t) = e^{-\frac{\mu}{2}t}(C_+ e^{i\omega t} + C_- e^{-i\omega t})$.

Escolhendo $C_+ = \frac{A_0}{2} e^{i\varphi}$ então $C_- = C_+^* = \frac{A_0}{2} e^{-i\varphi}$, sendo A_0 = amplitude inicial. Note que $C_+, C_- \in \mathbb{C}$, pois, $p_+, p_- \in \mathbb{C}$ e a utilização do complexo conjugado se deve ao fato de $x \in \mathbb{R}$.

$x(t) = \frac{A_0}{2} e^{-\mu/2\, t}\left(e^{i(\omega t + \varphi)} + e^{-i(\omega t + \varphi)}\right) =$

$= \frac{A_0}{2} e^{-\mu/2\, t}\left[\cos(\omega t + \varphi) + i \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) + \cos(\omega t + \varphi) - i \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)\right] = A_0 \cdot e^{-\frac{\mu}{2}t} \cos(\omega t + \varphi)$ (2)

$\begin{cases} x(0) = 0 \Rightarrow A_0 \cos\varphi = 0 \Rightarrow \cos\varphi = 0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \Rightarrow -A_0\left[\frac{\mu}{2}\cos(\varphi) + \omega \operatorname{sen}(\varphi)\right] = v_0 \end{cases}$

$\cos\varphi = 0$ e $\operatorname{sen}\varphi < 0 \therefore \varphi = -\pi/2$

$$-A_0\left[\frac{\mu}{2}\cos(-\pi/2)+\omega\,\text{sen}(-\pi/2)\right]=V_0 \Rightarrow -A_0\cdot\omega(-1)=V_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_0=\frac{V_0}{\omega}$$

Substituindo em (2):

$$x(t)=\frac{V_0}{\omega}\cdot e^{-\mu/2\,t}\cdot\cos(\omega t-\pi/2)$$

Note que $\cos(\omega t-\pi/2)=\cos\omega t\cdot\cos\pi/2+\text{sen}\,\omega t\cdot\text{sen}\,\pi/2=$ $=\text{sen}\,\omega t$. Assim $x(t)=\frac{V_0}{\omega}e^{-\frac{\rho t}{2m}}\cdot\text{sen}(\omega t)$

4) a) ω_0 = frequência natural do sistema

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega_0=\sqrt{\frac{100}{40\cdot10^{-3}}}=\sqrt{\frac{10000}{4}}=50\,\text{rad/s}$$

b) Sabendo que a força de resistência pode ser definida como $F=-\rho\cdot v=-\rho\cdot\dot{x}$. Podemos resolver a Segunda Lei de Newton:

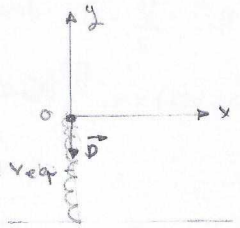
$$m\cdot\ddot{x}=-\rho\dot{x}-kx \Rightarrow m\ddot{x}+\rho\dot{x}+kx=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{x}+\mu\dot{x}+\omega_0^2x=0,\ \text{com}\ \mu=\frac{0{,}08}{40\cdot10^{-3}}=2\,s^{-1}\ \text{e}$$

$\omega_0=50\,\text{rad/s}$

c) Comparando ω_0 e μ concluímos que $\omega_0>\mu$ e, portanto, o regime é subcrítico com frequência de oscilação $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\frac{\mu^2}{4}}=\sqrt{2499}\,\text{rad/s}$

6)



Pela Segunda Lei de Newton

$$m\ddot{x}+\rho\dot{x}+kx+mg=0$$

Na posição x_{eq} de equilíbrio:

$$kx=-mg \Rightarrow k=\frac{-mg}{-0{,}1} \Rightarrow k=5\cdot10^4\,\frac{N}{m}$$

A equação diferencial pode ser reescrita como:

$$\ddot{x}'+\mu\dot{x}'+\omega_0^2x'=0,\ \text{com}\ x'=x-x_0,\ \mu=\frac{\rho}{m},\ \omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}},\ x_0=\frac{-mg}{k}$$

A solução será $x(t)=A_0\cdot e^{-\mu/2\,t}\cos(\omega t+\varphi)+\underbrace{x_{eq}}_{\text{pos de eq. não é a origem}}$

Como se trata da amplitude temos:

$$A(t)=A_0\cdot e^{-\mu/2\,t} \Rightarrow A\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)=\frac{A_0}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}=e^{-\frac{\mu}{2}\frac{2\pi}{\omega}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\mu}{2}\cdot\frac{2\pi}{\omega}=\ln 2 \Rightarrow \mu\cdot\frac{2\pi}{\omega}=\ln 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\mu^2}{\omega_0^2-\frac{\mu^2}{4}}=\left(\frac{\ln 4}{2\pi}\right)^2 \Rightarrow \mu^2\simeq0{,}05\left(\omega_0^2-\frac{\mu^2}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}9875\,\mu^2=0{,}05\,\omega_0^2 \Rightarrow \mu=\sqrt{\frac{0{,}05\,\omega_0^2}{0{,}9875}}$$

$$\therefore \rho=m\cdot\mu=1{,}1\cdot10^3\,\text{kg/s}$$

10) Considerando que o ponto de partida seja $x(0)=0$ e a velocidade inicial seja $\dot{x}(0)=0$:

$$x(t)=\frac{(F_0/m)}{\omega_0^2-\omega^2}\,\text{sen}(\omega t)+\underbrace{a\cos(\omega_0 t+\phi)}_{\text{solução homogênea } x_h}$$

$$\dot{x}(t)=\frac{\omega(F_0/m)}{\omega_0^2-\omega^2}\cos(\omega t)-a\,\omega_0\,\text{sen}(\omega_0 t+\phi)$$

$$x(0)=0 \Rightarrow a\cos\phi=0 \qquad (1)$$

$$\dot{x}(0)=0 \Rightarrow \frac{\omega(F_0/m)}{\omega_0^2-\omega^2}=a\,\omega_0\,\text{sen}\,\phi \qquad (2)$$

$$x_h=a\cos\omega_0 t\cdot\cos\phi-a\,\text{sen}\,\omega_0 t\,\text{sen}\,\phi \qquad (3)$$

De (1) em (3):

$$x_h=-a\,\text{sen}\,\omega_0 t\cdot\text{sen}\,\phi$$

De (2) em (3):

$$x_h=-\frac{\omega}{\omega_0}\cdot\frac{(F_0/m)}{\omega_0^2-\omega^2}\,\text{sen}\,\omega_0 t$$

Então o deslocamento será dado por:

$$x(t)=\frac{(F_0/m)}{\omega_0^2-\omega^2}\,\text{sen}(\omega t)-\frac{\omega}{\omega_0}\cdot\frac{(F_0/m)}{\omega_0^2-\omega^2}\,\text{sen}(\omega_0 t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t)=\frac{(F_0/m)}{\omega_0^2-\omega^2}\left(\text{sen}(\omega t)-\frac{\omega}{\omega_0}\cdot\text{sen}(\omega_0 t)\right)$$

7) a) A solução para um oscilador criticamente amortecido será $x(t)=e^{-\mu/2\,t}(a+bt)$

$$\dot{x}(t)=-\frac{\mu}{2}e^{-\mu/2\,t}(a+bt)+e^{-\mu/2\,t}\cdot b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t)=e^{-\mu/2\,t}\left(-\frac{\mu}{2}(a+bt)+b\right)$$

$$x(t)=0 \Rightarrow a=0 \qquad \therefore\ x(t)=V_0 t\cdot e^{-\frac{\mu}{2}t}\ (1)$$

$$\dot{x}(0)=V_0 \Rightarrow b=V_0$$

O seu deslocamento máximo será quando $x(t_0)=3{,}68\,m$:

$$\dot{x}(t_0)=0 \Rightarrow 0=V_0\cdot e^{-\frac{\mu}{2}t}+V_0 t_0\cdot\left(-\frac{\mu}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_0\cdot e^{-\frac{\mu}{2}t}\left(1-\frac{\mu}{2}t\right)=0 \Rightarrow \frac{\mu}{2}t=1 \Rightarrow \mu=\frac{2}{t_0}$$

Sabemos que $t_0=1 \therefore \mu=2$.

De (1) temos que:

$$x(1)=3{,}68\,m \Rightarrow V_0\cdot e^{-1}=3{,}68 \Rightarrow V_0=3{,}68\ \text{e} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_0\simeq10\,m/s$$

b) $x(0)=2\,m \Rightarrow a=2$

$$\dot{x}(0)=-\mu+b \Rightarrow V_0=-\mu+b \Rightarrow b=12$$

$$x(t)=e^{-t}(2+12t)$$

8) a) A velocidade será nula quando o deslocamento for máximo que será em $t_1 = 3s$

b) $\begin{cases} x(0) = 0,5 \\ \dot{x}(1) = 0 \end{cases}$, $x(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}}(A + Bt)$

$x(0) = 0,5 \Rightarrow A = 0,5$

$\dot{x}(1) = 0 \Rightarrow e^{-\frac{\gamma}{2}}(A+B) = 0 \Rightarrow B = -0,5$

$\therefore x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(0,5 - 0,5t)$

c) $\dot{x}(t) = -\frac{\gamma}{2} \cdot e^{-\frac{\gamma t}{2}}(A+Bt) + B \cdot e^{-\frac{\gamma t}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dot{x}(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}}\left(-\frac{\gamma}{2}(0,5 - 0,5t) - 0,5\right)$

Sabemos que $\dot{x}(3) = 0$:

$-\frac{\gamma}{2}(0,5 - 1,5) - 0,5 = 0 \Rightarrow \frac{\gamma}{2} = 0,5 \Rightarrow \gamma = 1 s^{-1}$

Pela definição de γ temos que:

$\gamma = \frac{\rho}{m} \Rightarrow \rho = m \cdot \gamma \Rightarrow \rho = 1 kg s^{-1}$

Tratando-se de um regime crítico temos que $\omega_0 = \frac{\gamma}{2}$:

$\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\gamma}{2} \Rightarrow k = \frac{\gamma^2}{4} \Rightarrow k = 0,25 N/m$

d) $\dot{x}(t) = e^{-t/2}\left(-\frac{1}{2}(0,5 - 0,5t) - 0,5\right)$

$\dot{x}(0) = -0,25 - 0,5 = -0,75 m/s$

9) a) No equilíbrio as únicas forças atuantes serão o peso e a força elástica:

$kx = mg \Rightarrow k = \frac{1000 \cdot 10}{2} = 5000 N/m$

Tratando-se de um regime crítico:

$\frac{\gamma}{2} = \omega_0 \Rightarrow \frac{\rho}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \rho = 2000\sqrt{5}\ kg \cdot s^{-1}$

b) A solução para a equação diferencial será da forma $x(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}}(a + bt) + x_{eq}$

$\dot{x}(t) = -\frac{\gamma}{2} e^{-\frac{\gamma t}{2}}(a+bt) + b \cdot e^{-\frac{\gamma t}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dot{x}(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}}\left(-\frac{\gamma}{2}(a+bt) + b\right)$

Como há conservação de energia (tomando a plataforma como referencial)

$E_m^i = E_m^f \Rightarrow \cancel{m}gH = \frac{\cancel{m}v_0^2}{2} \Rightarrow v_0 = \pm\sqrt{2gH} \Rightarrow$

$\Rightarrow v_0 = -2\sqrt{5}\ m/s$

$x(0) = 0 \Rightarrow a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$

$\dot{x}(0) = -2\sqrt{5}\ m/s \Rightarrow -2\sqrt{5} = -2\sqrt{5} + b \Rightarrow b = 0$

$x(t) = 2e^{-\frac{\gamma}{2}t} - 2\ m$

Exercício 1 (rejeito):

Como o problema não diz qual a amplitude inicial a priori não podemos adotá-la como 15°. Vamos utilizar as condições iniciais para deduzir esta amplitude.

Tratando-se de um regime subcrítico podemos afirmar que a solução para a eq diferencial será: $\theta(t) = A_0 \cdot e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos(\omega t + \varphi)$

$\dot{\theta}(t) = -\frac{\gamma}{2} A_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \varphi) - \omega A_0 \cdot e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dot{\theta}(t) = A_0 \cdot e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(-\frac{\gamma}{2}\cos(\omega t + \varphi) - \omega \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)\right)$,

com $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$ e $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$\begin{cases} \theta(0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) = 0 \end{cases}$

$\theta(0) = \theta_0 \Rightarrow A_0 \cos\varphi = \theta_0$ (1) $\Rightarrow \cos\varphi > 0$

$\dot{\theta}(0) = 0 \Rightarrow -\frac{\gamma}{2}\cos\varphi = \omega \operatorname{sen}\varphi$ (2) $\Rightarrow \operatorname{sen}\varphi < 0$

$\frac{\gamma^2}{4}\cos^2\varphi = \omega^2 \cdot \operatorname{sen}^2\varphi \Rightarrow \frac{\gamma^2}{4}\cos^2\varphi = \omega_0^2 \operatorname{sen}^2\varphi - \frac{\gamma^2}{4}\operatorname{sen}^2\varphi$

$\Rightarrow \frac{\gamma^2}{4} = \omega_0^2 \cdot \operatorname{sen}^2\varphi \Rightarrow \operatorname{sen}\varphi = -\frac{\gamma}{2\omega_0}$

De (2): $-\frac{\cancel{\gamma}}{\cancel{2}}\cos\varphi = \omega \cdot \left(-\frac{\cancel{\gamma}}{2\omega_0}\right) \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\omega}{\omega_0}$

De (1): $A_0 \cdot \cos\varphi = \theta_0 \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\omega_0}{\omega} \cdot \theta_0$

$\therefore x(t) = \frac{\omega_0}{\omega} \cdot \theta_0 \cdot e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos(\omega t + \varphi)$

Na amplitude temos $\cos(\omega t + \varphi) = 1$:

$A(t) = \frac{\omega_0}{\omega} \cdot \theta_0\ e^{-\frac{\gamma}{2}t}$

Por ser um amortecimento fraco $\omega_0 >>> \frac{\gamma}{2} \Rightarrow \omega \cong \omega_0$:

$A(t) = \theta_0 \cdot e^{-\gamma t}$

11) a) Pela Segunda Lei de Newton, temos:

$m\ddot{x} + \rho\dot{x} + kx = F_0 \cdot \cos(\Omega t) \Rightarrow$

$\Rightarrow \ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$, sendo $\gamma = \frac{\rho}{m}$ e $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Tomamos $z(t) = x(t) + i\,y(t)$ e $\cos(\Omega t) = e^{i\Omega t}$

Então ao fazer a devidas substituições na eq. diferencial teremos que a parte real, ou seja, $x(t) = \mathrm{Re}\{z(t)\}$.

$$\ddot{z} + \gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} \cdot e^{i\Omega t} \quad (2)$$

A solução da equação diferencial será da forma $z = z_0 \cdot e^{i\Omega t}$, com $z_0 \in \mathbb{C}$ e, portanto, $z_0 = A e^{i\varphi} = A\cos\varphi + iA\,\mathrm{sen}\,\varphi$. (3)

$$\dot{z} = i\Omega z_0 \cdot e^{i\Omega t} \quad \text{e} \quad \ddot{z} = -\Omega^2 z_0\, e^{i\Omega t}$$

Substituindo em (2):

$$-\Omega^2 z_0 \cdot \cancel{e^{i\Omega t}} + \gamma(i\Omega z_0 \cancel{e^{i\Omega t}}) + \omega_0^2 (z_0 \cancel{e^{i\Omega t}}) = \frac{F_0}{m} \cancel{e^{i\Omega t}}$$

$$\Rightarrow -\Omega^2 z_0 + \gamma(i\Omega z_0) + \omega_0^2 \cdot z_0 = \frac{F_0}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_0(-\Omega^2 + i\gamma\Omega + \omega_0^2) = \frac{F_0}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_0 = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2 + i\gamma\Omega} \Rightarrow z_0 = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \Omega^2 - i\gamma\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2\Omega^2} \quad (4)$$

Comparando (3) e (4):

$$A e^{i\varphi} = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{\omega_0^2 - \Omega^2 - i\gamma\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2}$$

$\mathrm{Re}\{z_0\}$: $A\cos\varphi = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2}$ (5)

$\mathrm{Img}\{z_0\}$: $A\,\mathrm{sen}\,\varphi = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{-\gamma\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2}$ (6)

De $(5)^2 + (6)^2$:

$$A^2 = \left(\frac{F_0}{m}\right)^2 \left\{ \frac{\cancel{[(\omega_0^2 - \Omega^2) + (\gamma\Omega)^2]}}{[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2]^{\cancel{2}}} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2 = \left(\frac{F_0}{m}\right)^2 \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{(F_0/m)^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2}}$$

De (6)/(5):

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{-\gamma\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2} \cdot \frac{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2}{\omega_0^2 - \Omega^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{tg}\,\varphi = -\frac{\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \Rightarrow \varphi = -\mathrm{arctg}\left(\frac{\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$$

Como $x(t) = \mathrm{Re}\{z(t)\}$:

$$z = z_0 \cdot e^{i\Omega t} = A \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{i\Omega t} = A e^{i(\varphi + \Omega t)}$$

$x(t) = A \cdot \cos(\varphi + \Omega t)$, com $A = \sqrt{\frac{(F_0/m)^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2}}$ e

$\varphi = -\mathrm{arctg}\left(\frac{\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$.

b) $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5000}{50}} = 10\ s^{-1}$

$Q = \frac{\omega_0}{\gamma} = \frac{10}{500/50} = 1$

c) Como $\frac{dA}{d\omega} = 0$ e $\frac{d^2A}{d\omega^2} < 0$ então a frequência de ressonância (dará a máxima amplitude) será:

$$\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}} = \sqrt{100 - \frac{100}{2}} = \sqrt{50}\ s^{-1}$$

d) $A = \frac{F_0}{m} \cdot \sqrt{\frac{1}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2}} = \sqrt{\frac{1}{(100-50)^2 + (10\sqrt{50})^2}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2500 + 5000}} = \frac{1}{50\sqrt{3}}\ m$$

12) a) Considerando o sistema massa-mola:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20}{50 \cdot 10^{-3}}} = \sqrt{\frac{2000}{5}} = 20\ s^{-1}$$

b) $\gamma = \frac{\rho}{m} = \frac{0,9}{5 \cdot 10^{-2}} = \frac{90}{5} = 18\ s^{-1}$

Como $\omega_0 > \frac{\gamma}{2}$ então o regime é subcrítico

c) $A = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2}} = \frac{180}{18 \cdot 20} = 0,5\ m$

d) $\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}} = \sqrt{400 - 162} = \sqrt{238}\ s^{-1}$

13) Vamos verificar que (4.2.17) satisfaz (4.1.2) para $\gamma = 2\omega_0$:

$$x_1(t) = t e^{-\gamma t/2}$$

$$\dot{x}_1(t) = e^{-\gamma t/2} - \frac{t\gamma}{2} e^{-\gamma t/2} = e^{-\gamma t/2}\left(1 - \frac{t\gamma}{2}\right)$$

$$\ddot{x}_1(t) = -\frac{\gamma}{2} e^{-\gamma t/2} - \left(\frac{\gamma}{2} \cdot e^{-\gamma t/2} - \frac{t\gamma^2}{4} \cdot e^{-\gamma t/2}\right) =$$

$$= e^{-\gamma t/2}\left(-\frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma}{2} + \frac{t\gamma^2}{4}\right) = e^{-\gamma t/2}(-2\gamma + t\gamma^2/4)$$

De (4.1.2):

$$t\omega_0^2 + 2\omega_0\left(1 - \frac{t\gamma}{2}\right) + (-2\gamma + t\gamma^2/4) = 0$$

$$t\omega_0^2 + 2\omega_0 - 2\omega_0^2 t - 2\omega_0 + t\omega_0^2 = 0$$

Portanto (4.2.17) é solução.

$\dot{z} = b\,\omega_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \phi) + A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$.

Em $t=0$ sabemos que a mola se encontrava parada no equilíbrio:

$z(0) = 0 \Rightarrow 0 = b \cdot \operatorname{sen}\phi \Rightarrow \operatorname{sen}\phi = 0 \therefore \phi = 0$

$\dot{z}(0) = 0 \Rightarrow b\,\omega_0 = -A\omega \Rightarrow b\,\omega_0 = -\dfrac{k \cdot A}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cdot \omega \Rightarrow$

$$\Rightarrow b = -\frac{kA_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \quad (1)$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow m = \frac{k}{\omega_0^2} \quad (2)$$

De (2) em (1):

$$b = -\frac{\cancel{k}A_0}{\frac{\cancel{k}}{\omega_0^2}(\omega_0^2 - \omega^2)} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} = -\frac{\omega_0^2 \cdot A_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} =$$

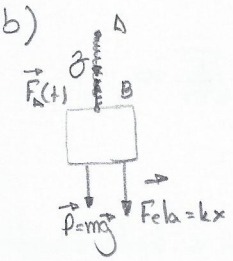
$$= -a \cdot \frac{\omega}{\omega_0}$$

Na equação geral:

$$z(t) = -a\frac{\omega}{\omega_0} \cdot \operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi) - a\operatorname{sen}(\omega t)$$

$$z(t) = a\left[-\frac{\omega}{\omega_0}\operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi) - \operatorname{sen}(\omega t)\right]$$

b)



$\vec{R} = -\vec{F}_A(t) + \vec{P} + \vec{F}ela$

$\vec{R} = mg\hat{z} + k(z - A\operatorname{sen}\omega t)\hat{z}$

$\vec{F}(t) = mg\hat{z} + k(z - A\operatorname{sen}\omega t)\hat{z}$

Agora vamos verificar que (4.3.20) satisfaz (4.3.4)

$$x(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} \cdot t \cdot \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

$$\dot{x}(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0}\left[\operatorname{sen}(\omega_0 t) + t\omega_0 \cdot \cos(\omega_0 t)\right]$$

$$\ddot{x}(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0}\left[\omega_0 \cdot \cos(\omega_0 t) + \omega_0 \cos(\omega_0 t) - t\omega_0^2 \operatorname{sen}(\omega_0 t)\right]$$

De (4.3.4)

$$\frac{1}{2\omega_0}\left[\omega_0 \cdot \cos(\omega_0 t) + \omega_0 \cos(\omega_0 t) - t\omega_0^2 \cancel{\operatorname{sen}(\omega_0 t)}\right] +$$

$$+ \frac{t \cancel{\operatorname{sen}(\omega_0 t)} \cdot \omega_0^2}{2\omega_0} = \cos(\omega_0 t) \Rightarrow 2\omega_0 \cos(\omega_0 t) =$$

$$2\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$x(0) = \frac{F_0}{2m\omega_0} \cdot 0 \cdot \operatorname{sen}(0) = 0$$

$$\dot{x}(0) = \frac{F_0}{2m\omega_0}\left[\operatorname{sen}(0) + 0 \cdot \omega_0 \cos(0)\right] = 0$$

Portanto, conclui-se que (4.3.20) é uma solução para (4.3.4) e que as condições iniciais são respeitadas.

15) a) $x(t) = Ae^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos(\omega t + \varphi)$

$$x(t+\tau) = A_0 e^{-\frac{\gamma}{2}(t+\tau)} \cos(\omega(t+\tau) + \varphi)$$

$$r = \frac{x(t)}{x(t+\tau)} = \frac{\cancel{A_0}}{\cancel{A_0}} \cdot e^{-\frac{\gamma t}{2} + \frac{\gamma t}{2} + \frac{\gamma \tau}{2}} \cdot \frac{\cos(\cancel{\omega t} + \varphi)}{\cos(\cancel{\omega t} + \tau) + \varphi)}$$

como trata-se de máximos então $\cos(\omega t + \varphi) =$

$= \cos(\omega(t+\tau) + \varphi) = 1$.

$$r = e^{\frac{\gamma \tau}{2}} \Rightarrow \ln r = \underbrace{\frac{\gamma \tau}{2} \cdot 1}_{>0} \Rightarrow \delta = \frac{\gamma \tau}{2}$$

b) $r = \frac{A(t)}{A(t_1)} \Rightarrow r = \frac{A(t)}{\frac{A(t)}{2}} \Rightarrow r = 2 \quad (1)$

$\ln r = \frac{\gamma \tau'}{2}$, sendo $\tau' = n\tau \therefore \ln r = \frac{n\tau\gamma}{2} \quad (2)$

Substituindo (1) em (2):

$$\ln 2 = \frac{n\tau\gamma}{2} \Rightarrow \frac{\tau\gamma}{2} = \frac{\ln 2}{n} \Rightarrow \delta = \frac{\ln 2}{n}$$

16) a) Sabemos que a potência máxima ocorrerá em $\omega = \omega_0$. Do gráfico, $\omega_0 = 40 \text{ rad/s}$.

A semilargura com altura $\frac{P_{máx}}{2}$ nos dará a γ que é $2s^{-1}$

Como $\gamma \ll \omega_0$ então:

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma} \Rightarrow Q = \frac{40}{2} = 20$$

b) Sem a ação da força dissipativa temos que:

$$\frac{1}{e^5} E(0) = E(0) \cdot e^{-\gamma t} \Rightarrow \frac{1}{e^5} = \frac{1}{e^{\gamma t}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{2t} = e^5 \Rightarrow 2t = 5 \Rightarrow t = 2{,}5 \text{ s}$$

η = número de ciclos

$$\eta = \frac{t}{\tau} = \frac{2{,}5 \cdot \omega_0}{2\pi} = \frac{2{,}5 \cdot \cancel{40}^{20}}{\cancel{2}\pi} \cong 16 \text{ ciclos}$$

17) a) Tratando-se de um sistema amortecido em regime subcrítico (oscila), devemos encontrar a frequência natural ω_0, onde a potência será máxima:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \Rightarrow \omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{\omega_1^2}{100}$$

$$\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{101 \cdot \omega_1^2}{100} \Rightarrow \omega_0 = \omega_1 \sqrt{\frac{101}{100}} \Rightarrow \omega_0 \cong 1{,}005\,\omega_1$$

b) Considerando que $\gamma \ll \omega_0$ então:

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma} \Rightarrow Q = \frac{1{,}005\,\cancel{\omega_1}}{\cancel{\omega_1}/5} \Rightarrow Q \cong 5$$

c) $m\gamma = \rho \Rightarrow \rho = m \cdot \frac{\omega_0}{Q} \Rightarrow \rho = \frac{1}{5} \cdot m\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \rho = 0{,}2 \cdot \sqrt{m^2 \frac{k}{m}} \Rightarrow \rho = 0{,}2 \cdot \sqrt{mk}$$

19) a) Em $t > 0$ a força que causou a deformação na mola é a força externa realizada pela pessoa:

$F_{ela} = F(t) \Rightarrow kz = F_0 \cdot \operatorname{sen}(\omega t)$.

Vamos tomar o valor da amplitude da oscilação:

$$kA = F_0 \cdot 1 \Rightarrow F_0 = k \cdot A_0$$

Calculando a frequencia e a frequência de oscilação:

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = 2\pi \text{ rad/s} \quad e \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 4\sqrt{10} \text{ rad/s}$$

Como $\omega_0 > \omega$ então o angulo de fase φ é igual a zero.

$$A = \frac{(F_0/m)}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{kA_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

A solução da equação diferencial será:

$$z(t) = b\operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi) + A\operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

Exercício 10 (L2):

Como o oscilador não é amortecido e da Segunda Lei de Newton:

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cdot \text{sen}(\omega t) \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cdot \text{sen}(\omega t), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1)$$

Devemos expandir (1) para o plano complexo tal que $\begin{cases} z(t) = x(t) + iy(t) \\ \text{sen}(\omega t) = e^{i\omega t} \end{cases}$:

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} \cdot e^{i\omega t} \quad (2)$$

A solução para (2) será do tipo $z = z_0 \cdot e^{i\omega t} = z = Ae^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t}$, pois, $z_0 \in \mathbb{C}$: $\ddot{z} = -i^2 \omega^2 \cdot z_0 \cdot e^{i\omega t} = -\omega^2 z_0 \cdot e^{i\omega t}$

Substituindo em (2):

$$-\omega^2 z_0 \cdot e^{i\omega t} + \omega_0^2 \cdot z_0 \cdot e^{i\omega t} = \frac{F_0}{m} \cdot e^{i\omega t} \Rightarrow \cancel{e^{i\omega t}} \cdot z_0(-\omega^2 + \omega_0^2) = \frac{F_0}{m} \cdot \cancel{e^{i\omega t}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_0 = \frac{(F_0/m)}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \Rightarrow A \cdot e^{i\varphi} = \frac{(F_0/m)}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \Rightarrow A\cos\varphi + iA\,\text{sen}\,\varphi = \frac{(F_0/m)}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (3)$$

Estudando a igualdade de (3): $\begin{cases} A\cos\varphi = \dfrac{(F_0/m)}{(\omega_0^2 - \omega^2)} & (4) \\ A\,\text{sen}\,\varphi = 0 \Rightarrow \text{sen}\,\varphi = 0 & (5) \end{cases}$

De (5): $\cos^2\varphi + \cancelto{0}{\text{sen}^2\varphi} = 1 \Rightarrow \cos^2\varphi = 1 \Rightarrow \cos\varphi = \pm 1$

De (4), temos dois casos:

- $\omega_0 > \omega$: $\begin{cases} \text{sen}\,\varphi = 0 \\ \cos\varphi = 1 \end{cases} \therefore A = \dfrac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2}$
- $\omega_0 < \omega$: $\begin{cases} \text{sen}\,\varphi = 0 \\ \cos\varphi = -1 \end{cases} \therefore A = \dfrac{F_0/m}{\omega^2 - \omega_0^2} = \dfrac{F_0/m}{|\omega_0^2 - \omega^2|}$

Da solução $z = Ae^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t} = Ae^{i(\varphi + \omega t)} = A\cos(\omega t + \varphi) + iA\,\text{sen}(\omega t + \varphi)$, devemos pegar a parte imaginária devido a função que quantifica a força externa:

$$x(t) = \text{Img}\{z(t)\} \Rightarrow x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi) = A(\text{sen}\,\omega t \cdot \cos\varphi + \cancelto{0}{\text{sen}\,\varphi \cos\omega t}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{(F_0/m)}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \text{sen}(\omega t)}.$$

Como não se trata de uma equação diferencial homogênea (além de $x(t)$ há outra função que depende do tempo) então: $x_f(t) = x_h(t) + x_p(t)$

A solução da equação diferencial $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ vai me dar x_h $\therefore$ $x_h(t) = a \cdot \cos(\omega_0 t + \phi)$

A solução geral será: $x_f(t) = \dfrac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \text{sen}(\omega t) + a\cos(\omega_0 t + \phi)$

Para achar a velocidade devemos derivar x_f: $\dot{x}_f(t) = \omega \cdot \left(\dfrac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \cdot \cos(\omega t) - a\omega_0\,\text{sen}(\omega_0 t + \phi)$

Das condições iniciais temos que: $\begin{cases} x_f(0) = 0 \\ \dot{x}_f(0) = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} a\cos(\phi) = 0 \Rightarrow \cos\phi = 0 \quad (6) \\ \omega_0 \cdot \operatorname{sen}\phi = \dfrac{\omega(F_0/m)}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \dfrac{1}{a} \Rightarrow \operatorname{sen}\phi = \dfrac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \dfrac{\omega}{\omega_0} \cdot \dfrac{1}{a} \quad (7) \end{cases}$$

Da solução homogênea: $\underbrace{a\cos(\omega_0 t + \phi)}_{x_h(t)} = a\cos(\omega_0 t)\cdot\cancelto{0}{\cos\phi} - a\operatorname{sen}(\omega_0 t)\cdot\operatorname{sen}\phi = -a\operatorname{sen}(\omega_0 t)\cdot\operatorname{sen}\phi \quad (8)$

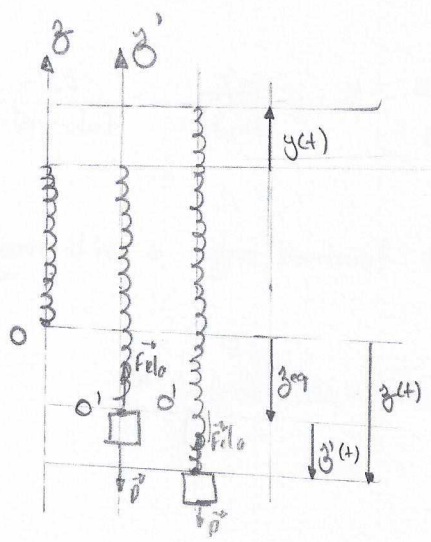
Substituindo (7) em (8): $x_h(t) = -\cancel{a}\cdot\dfrac{(F_0/m)}{\omega_0^2-\omega^2}\,\dfrac{\omega}{\omega_0}\,\dfrac{1}{\cancel{a}}\cdot\operatorname{sen}(\omega_0 t) = -\dfrac{(F_0/m)}{\omega_0^2-\omega^2}\cdot\dfrac{\omega}{\omega_0}\cdot\operatorname{sen}(\omega_0 t)$

Da solução geral: $x_f(t) = \dfrac{(F_0/m)}{\omega_0^2-\omega^2}\cdot\operatorname{sen}(\omega t) - \dfrac{(F_0/m)}{\omega_0^2-\omega^2}\cdot\dfrac{\omega}{\omega_0}\cdot\operatorname{sen}(\omega_0 t)$

$$x_f(t) = \frac{(F_0/m)}{\omega_0^2-\omega^2}\left[\operatorname{sen}(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_0}\cdot\operatorname{sen}(\omega_0 t)\right]$$

Exercício 1a (L2):

a)



O deslocamento produzido pela pessoa no ponto A é $\vec{y}(t) = A\operatorname{sen}(\omega t)\vec{k}$

A deformação da mola após o início da oscilação será:

$\vec{x}(t) = \vec{y}(t) - \vec{z}(t) = y(t)\vec{k} - z(t)\vec{k} \therefore x = y - z$

Da Segunda Lei de Newton temos que:

$m\vec{a} = k\vec{x} + m\vec{g} \Rightarrow m\ddot{z}\,\vec{k} = k(y-z)\vec{k} - mg\vec{k}$

$\therefore m\ddot{z} = ky - kz - mg \Rightarrow m\ddot{z} = k\cdot A\operatorname{sen}(\omega t) - kz - mg \Rightarrow$

$\Rightarrow \ddot{z} = \dfrac{kA}{m}\operatorname{sen}(\omega t) - \omega_0^2 z - g \Rightarrow \ddot{z} + \omega_0^2 z + g = \dfrac{kA}{m}\operatorname{sen}(\omega t)$

Até agora tomamos O como origem. Vamos transpor a origem para O': $z(t)\vec{k} = z_{eq}\vec{k} + z'(t)\vec{k} \Rightarrow$

$\Rightarrow z(t)\vec{k} = z'(t)\vec{k} - \dfrac{mg}{k}\vec{k} \therefore z = z' - \dfrac{mg}{k}$.

As derivadas permanecem constantes, pois, $\ddot{z} = \ddot{z}' - \cancelto{0}{\left(\dfrac{mg}{k}\right)''} \Rightarrow \ddot{z} = \ddot{z}'$ Assim;

$\ddot{z}' + \dfrac{k}{m}\cdot\left(z' - \dfrac{mg}{k}\right) + g = \dfrac{kA}{m}\operatorname{sen}(\omega t) \Rightarrow \ddot{z}' + \omega_0^2 z' - g + g = \dfrac{kA}{m}\operatorname{sen}(\omega t) \Rightarrow$

$\Rightarrow \ddot{z}' + \omega_0^2 z' = \dfrac{kA}{m}\operatorname{sen}(\omega t) \Rightarrow \ddot{z}' + \omega_0^2 z' = \dfrac{F_0}{m}\operatorname{sen}(\omega t)$, com $F_0 = kA$

Tratando-se de um oscilador forçado já sabemos (dedução no exercício 10) que:

$$z'(t) = a \cdot \cos(\omega_0 t + \phi) + \frac{(F_0/m)}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$\dot{z}'(t) = -a\omega_0 \cdot \operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi) + \omega \cdot \frac{(F_0/m)}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t)$$

Cálculos: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{80}{0,5}} = 4\sqrt{10}$ rad/s

$\omega = \frac{2\pi}{6} \Rightarrow \omega = 2\pi$ rad/s

$F_0 = 80 \cdot 5 \cdot 10^{-2} = 4N$

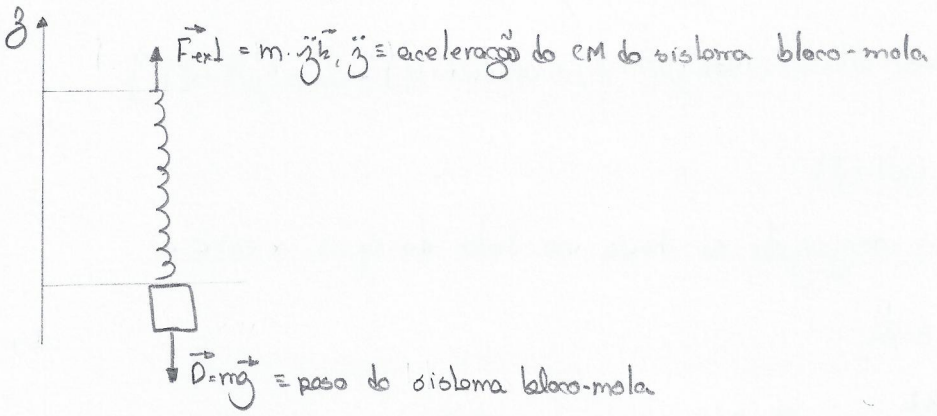
Das condições iniciais temos que:

$$\begin{cases} z'(0) = 0 \Rightarrow a\cos\phi = 0 \Rightarrow \cos\phi \\ \dot{z}(t) = 0 \Rightarrow -a\omega_0 \operatorname{sen}\phi + \omega \frac{(F_0/m)}{\omega_0^2 - \omega^2} = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\phi = \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \frac{(F_0/m)}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \frac{1}{a} \end{cases}$$

$$z'_h(t) = a\cos(\omega_0 t) \cdot \cancel{\cos\phi}^{\,0} - a\operatorname{sen}(\omega_0 t) \cdot \operatorname{sen}\phi = -a\operatorname{sen}(\omega_0 t) \cdot \operatorname{sen}\phi$$

$$z'_h(t) = \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \frac{(F_0/m)}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \operatorname{sen}(\omega_0 t) \therefore z'(t) = \frac{(F_0/m)}{\omega_0^2 - \omega^2}\left[\operatorname{sen}(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_0}\operatorname{sen}(\omega_0 t)\right]$$

b) Devemos considerar o sistema como um corpo só. Assim a força elástica passa a ser uma força interna.



$$\vec{F}(t) = \vec{F}_{ext} + \vec{P} \Rightarrow F(t)\vec{k} = m\ddot{z}\vec{k} - mg\hat{k} \therefore F(t) = Ak\operatorname{sen}(\omega t) - kz' - mg$$

$$F(t) = k(A\operatorname{sen}(\omega t) - z') - mg \therefore \vec{F}(t) = [k(A\operatorname{sen}(\omega t) - z') - mg]\vec{k}$$

Exercício 5 (L2):

Da Segunda Lei de Newton temos que a equação diferencial será:

$$m\ddot{x} + \rho\dot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1), \text{ com } \gamma = \frac{\rho}{m} \text{ e } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

A solução da equação diferencial será do formato $x(t) = e^{pt}$, portanto, $\dot{x}(t) = pe^{pt} = px(t)$ e $\ddot{x}(t) = p^2e^{pt} = p^2x($

Substituindo em (1):

$$p^2 \cdot x + \gamma p \cdot x + \omega_0^2 x = 0 \Rightarrow (p^2 + \gamma p + \omega_0^2)\, x = 0$$

Como x nem sempre é zero então:

$$p^2 + \gamma p + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow p = -\frac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} \quad (2)$$

Assim, $\begin{cases} p_+ = -\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} \\ p_- = -\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} \end{cases}$

De (2), teremos três casos distintos:

- regime subcrítico: $\frac{\gamma}{2} < \omega_0$

$$\sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-\left(\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2\right)} = i\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} = i\omega, \text{ com } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$$

A solução geral será dada por uma combinação linear de p_+ e p_-.

$$x(t) = C_+ e^{p_+ t} + C_- e^{p_- t}, \text{ com } C_+, C_- \in \mathbb{C} \text{ tal que } C_+ = \frac{A}{2} e^{i\varphi} \text{ e } C_- = C_+^* = \frac{A}{2} e^{-i\varphi}$$

$$x(t) = C_+ e^{-\frac{\gamma}{2}t + i\omega t} + C_- \cdot e^{-\frac{\gamma}{2}t - i\omega t} = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(C_+ e^{i\omega t} + C_- \cdot e^{-i\omega t}\right)$$

$$x(t) = \frac{A}{2} \cdot e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(e^{i(\omega t + \varphi)} + e^{-i(\omega t + \varphi)}\right)$$

$$x(t) = \frac{A}{2} \cdot e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[\cos(\omega t + \varphi) + i\,\text{sen}(\cancel{\omega t + \varphi}) + \cos(\omega t + \varphi) - i\,\text{sen}(\cancel{\omega t + \varphi})\right]$$

$$x(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \varphi)$$

A utilização do complexo conjugado se deve ao fato de que $x(t) \in \mathbb{R}$.

- regime supercrítico: $\frac{\gamma}{2} > \omega_0$

$$x(t) = a e^{-\frac{\gamma}{2}t + \beta t} + b e^{-\frac{\gamma}{2} - \beta t}, \text{ com } \beta = \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} \text{ e } a, b \in \mathbb{R}$$

- regime crítico: $\frac{\gamma}{2} = \omega_0$

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(A + Bt), \text{ com } A, B \in \mathbb{R}$$

a) $\gamma = \frac{\rho}{m} = \frac{2\sqrt{3}}{1} = 2\sqrt{3}\ s^{-1}$ e $\omega_0 = 2\,rad/s \therefore \omega = \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} = \sqrt{3 - 2} = 1\ rad/s$

Como $\frac{\gamma}{2} < \omega_0$ então trata-se de um regime subcrítico:

$$\begin{cases} x(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \varphi) \\ \dot{x}(t) = A\left(-\frac{\gamma}{2}\right) \cdot e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \varphi) - A\omega e^{-\frac{\gamma}{2}t}\,\text{sen}(\omega t + \varphi) \\ \dot{x}(t) = -A e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[\frac{\gamma}{2} \cos(\omega t + \varphi) + \omega\,\text{sen}(\omega t + \varphi)\right] \end{cases} \xrightarrow{t=0} \begin{cases} A\cos\varphi = \frac{1}{2} \quad (1) \\ -A\left[\frac{\gamma}{2}\cos\varphi + \omega\,\text{sen}\,\varphi\right] = 0 \quad (2) \end{cases}$$

De (2)/(1):

$$-\left[\sqrt{3} + \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi}\right] = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = -\sqrt{3} \therefore \varphi = -\frac{\pi}{3}$$

Substituindo em (1):

$$A\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow A\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 1$$

Portanto, $x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t+\varphi) \Rightarrow x(t) = e^{-\sqrt{3}t}\cos(t-\pi/3)$

b) A amplitude será dada por:

$$A(t) = A\cdot e^{-\sqrt{3}t} \Rightarrow \frac{\cancel{A}}{e} = \cancel{A}\cdot e^{-\sqrt{3}t} \Rightarrow \frac{1}{e} = \frac{1}{e^{\sqrt{3}t}} \Rightarrow e^{\sqrt{3}t} = e^1 \therefore t = \frac{\sqrt{3}}{3}\,s$$

Exercício 11 (P3-2014):

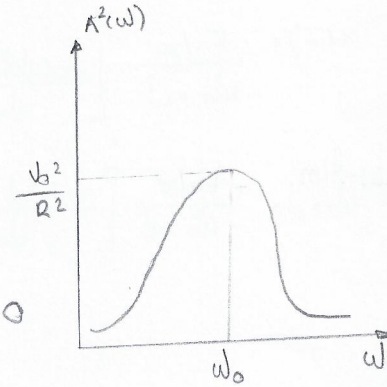
a) $L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}\cdot q = \omega V_0\cdot\cos(\omega t) \Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \gamma\frac{dq}{dt} + \omega_0^2\cdot q = \frac{\omega\cdot V_0}{L}\cdot\cos(\omega t)$, com $\gamma = \frac{R}{L}$ e $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

b) Consideremos $F_0 = \omega\cdot V_0$, então:

$$A^2(\omega) = \frac{F_0^2}{L^2}\cdot\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2} = \frac{\omega^2V_0^2}{L^2}\cdot\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\frac{R^2\omega^2}{L^2}}$$

Considerando que $\gamma \ll \omega_0$, então: $A^2(\omega) = \frac{\cancel{\omega^2}V_0^2}{\cancel{L^2}}\cdot\frac{\cancel{L^2}}{R^2\cancel{\omega^2}} = \frac{V_0^2}{R^2}$

$$\lim_{\omega\to 0} A^2 = \lim \frac{\omega^2V_0^2}{L^2}\cdot\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2} = 0 \quad e \quad \lim_{\omega\to\infty}\frac{\omega^2V_0^2}{L^2}\cdot\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)+(\gamma\omega)^2} = 0$$



c) Como $\gamma < \omega_0$ então trata-se de um regime subcrítico. Como há outra função, além de q e suas derivadas que dependem do tempo, então a equação diferencial não é homogênea:

$$q(t) = q_h(t) + q_p(t)$$

$$\begin{cases} q_h(t) = a\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}\cdot\cos(\omega' t+\phi) = a\,e^{-\frac{R}{2L}t}\cos(\omega' t+\phi), \text{ sendo que } a \text{ e } \phi \text{ são dados pelas condições iniciais} \\ q_p(t) = A\cdot\cos(\omega t+\varphi) = \frac{\omega V_0}{L}\cdot\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\frac{R^2\omega^2}{L^2}}\cos(\omega t+\varphi),\ \varphi = -\operatorname{arctg}\left(\frac{(R/L)\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right) \end{cases}$$

d) $q(0) = 0 \Rightarrow a\cdot\cos\phi + A\cos\varphi = 0 \Rightarrow a\cos\phi = -A\cos\varphi$.

$$\dot{q}(t) = -a\cdot\frac{R}{2L}\cdot e^{-\frac{R}{2L}t}\cos(\omega' t+\phi) - a\,e^{-\frac{R}{2L}t}\operatorname{sen}(\omega' t+\phi) - A\omega\operatorname{sen}(\omega t+\varphi)$$

$$\dot{q}(0) = 0 \Rightarrow -a\frac{R}{2L}\cdot\cos\phi - a\operatorname{sen}\phi - A\omega\operatorname{sen}\varphi = 0 \Rightarrow a\frac{R}{2L}\cdot a\,A\cos\varphi - a\operatorname{sen}\phi - A\omega\operatorname{sen}\varphi = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\operatorname{sen}\phi = a^2\frac{R}{2L} - A\omega\operatorname{sen}\varphi$$

Basta utilizar a relação fundamental da trigonometria para achar a e ϕ.

Exercício 4 (P_2 de 2015):

Consideremos que $\frac{\gamma}{2} << \omega_0$: $E = E_0 \cdot e^{-\gamma t}$

$$E = \frac{1}{4} E_0 \Rightarrow \frac{\cancel{E_0}}{4} = \cancel{E_0} \cdot e^{-\gamma t} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{e^{\gamma t}} \Rightarrow e^{\gamma t} = 4 \Rightarrow \gamma t = \ln 4 \Rightarrow \frac{\rho}{m} t = \ln 4 \Rightarrow t = \frac{m \ln 4}{\rho}$$

O maior tempo para que $E = \frac{E_0}{4}$ ocorrerá quando ρ for o menor possível e m o maior possível, isso ocorrerá no experimento 4.

Exercício 3 (P_3 de 2014):

$$x(t) = a\cos(\omega_0 t + \phi) + \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \cos(\omega t) \therefore \dot{x}(t) = -a\omega_0 \cdot \operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi) - \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \omega \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow a\cos\phi + \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} = 0 \Rightarrow a\cos\phi = -\frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow -a \operatorname{sen}\phi = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\phi = 0$$

$$x(t) = a\cos(\omega_0 t) \cdot \cos\phi + \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos(\omega t) = -\frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \cos(\omega_0 t) + \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\omega t = -\frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2}\left[\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega t)\right]$$

$$x(t) = -\frac{F_0/m}{\omega_0 + \omega}\left[\frac{\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega t)}{\omega_0 - \omega}\right]$$

$$x(t) = \lim_{\omega \to \omega_0} -\frac{F_0/m}{\omega_0 + \omega}\left[\frac{\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega t)}{\omega_0 - \omega}\right] \overset{LH}{=} \lim_{\omega \to \omega_0} -\frac{F_0/m}{\omega_0 + \omega}\left[\frac{t \operatorname{sen}(\omega t)}{-1}\right] = \frac{F_0/m}{2\omega_0} \cdot t \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$