Lista 1

1) a) Sabemos que $x(t) = x(t+\tau) \Rightarrow A\cos(\omega t + \varphi) = A\cos(\omega(t+\tau)+\varphi) = A\cos(\omega t + \omega\tau + \varphi)$, sendo τ = período do movimento. Podemos concluir assim que $\omega\tau = 2\pi$. Como $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, com k = cte elástica, temos:

$$\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \frac{2\cancel{\pi}}{10} = \cancel{2\pi} \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{0,5}} = 10 \Rightarrow k = 100 \cdot 0,5 \Rightarrow$$

$\Rightarrow k = 50$ N/m.

b) De acordo com o gráfico sabemos que $x_0 = 5\sqrt{2}$ cm e sabemos que $x(t) = 10 \cdot 10^{-2}\cos(\omega t + \varphi)$, sendo φ a constante de fase. Então:

$$5\sqrt{2} \cdot \cancel{10^{-2}} = 10 \cdot \cancel{10^{-2}} \cos(\varphi) \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

A equação que descreve o movimento será:

$$x(t) = 0,1 \cos(10t - \pi/4) \text{ m}$$

2) a) Sabendo que a equação da velocidade é dada por $v(t) = -A\omega \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi)$ temos que $\omega = 4,71\ s^{-1}$, portanto, o período será $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4,71} = \frac{200\pi}{471}$ s

b) A amplitude será dada por $A\omega = 3,6 \Rightarrow$

$$\Rightarrow A \cdot 4,71 = 3,6 \Rightarrow A = \frac{36}{471} \text{ m}$$

c) A aceleração máxima $a_{máx}$ será dada por:

$$a_{máx} = \frac{dv}{dt} = 3,6 \cdot 4,71 \cdot \cos[(4,71) \cdot t - \pi/2] =$$

$$= 16,956 \cos[(4,71)t - \pi/2] \text{ m/s}^2$$

d) Sabemos que $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ então:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow k = \omega^2 \cdot m \Rightarrow k = (4,71)^2 \cdot 0,5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = 11,09205 \text{ N/m}$$

1) c) A energia potencial da mola será:

$$U(t) = \frac{k\,x(t)^2}{2} = \frac{50 \cdot 0,01 \cdot \cos^2(10t + \pi/4)}{2} =$$

$$= \frac{\cos^2(10t - \pi/4)}{4} \text{ J}$$

A energia cinética será dada por $T(t) = \frac{mv^2}{2}$ mas a velocidade é: $v = \frac{dx(t)}{dt} = \text{sen}(10t - \pi/4)$.

Então: $T(t) = \frac{0,5 \cdot \text{sen}^2(10t - \pi/4)}{2} =$

$$= \frac{\text{sen}^2(10t - \pi/4)}{4} \text{ J}$$

Por fim, a energia mecânica será:

$$\mathcal{E}_M = U(t) + T(t) = \frac{1}{4} \cdot \cos^2(10t - \pi/4) + \frac{1}{4}\text{sen}^2(10t - \pi/4) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cos^2(10t - \pi/4) + \text{sen}^2(10t - \pi/4)\right) = \frac{1}{4} \text{ J}$$

3) No primeiro caso as forças elásticas têm mesmo módulo, direção e sentido, portanto, aplicando a Segunda Lei de Newton no bloco temos:

$$-kx - kx = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow -2kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{2k}{m}x = \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega x = 0, \text{ sendo}$$

$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ a frequência angular.

O período do movimento será dado por $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$

Pela definição de frequência temos que

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{m}} \text{ Hz}$$

No segundo caso quando o bloco se desloca x m cada mola sofrerá uma deformação de x/2. Aplicando a Segunda Lei de Newton no bloco temos que: $-k\frac{x}{2} = m \cdot \frac{d^2x}{dt}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow -\frac{k}{2m} \cdot x = \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega x = 0, \text{ sendo}$$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{2m}}$ a frequência angular. Pela definição de frequência temos que $f = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{2m}}$ Hz

5) a) Como há o equilíbrio entre a força peso e a força elástica temos que:

$m \cdot g = k x_0 \Rightarrow 0,1 \cdot 9,8 = k \cdot 0,25 \cdot 10^{-2} \Rightarrow$

$\Rightarrow k = \frac{98}{0,25} \Rightarrow k = 392\ N/m$

b) Como há conservação da energia mecânica então: $\cancel{M} \cdot g \cdot h = \frac{\cancel{M} \cdot v^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 0,05^2}$

$\simeq 1\ m/s$

Sabendo que o momento linear se conserva devido a ausência de forças externas, então:

$P_{antes} = P_{depois} \Rightarrow M \cdot v = v_f (M+m) \Rightarrow$

$\Rightarrow v_f = \frac{Mv}{M+m} = \frac{1,5 \cdot 1}{1,6} \simeq 0,93\ m/s$

c) A deformação da mola após a colisão será dado por:

nova deformação no equilíbrio em relação ao comprimento inicial

$(M+m) \cdot g = k x \Rightarrow x = \frac{1,6 \cdot 9,8}{392} = 0,04\ m$

Como a mola inicialmente não se encontra relaxada: $\Delta x = 0,0375\ m$

Após a colisão há conservação da energia então:

$\frac{kA^2}{2} = \frac{k \Delta x^2}{2} + \frac{(M+m) v_f^2}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \sqrt{\Delta x^2 + \frac{(M+m) v_f^2}{k}} \simeq 0,08\ m$

d) O período de oscilação será dado por:

$T = 2\pi \sqrt{\frac{M+m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{1,6}{392}} \simeq 0,4\ s$

e) Sabendo que $x(0) = 0,25 \cdot 10^{-2}$ temos que

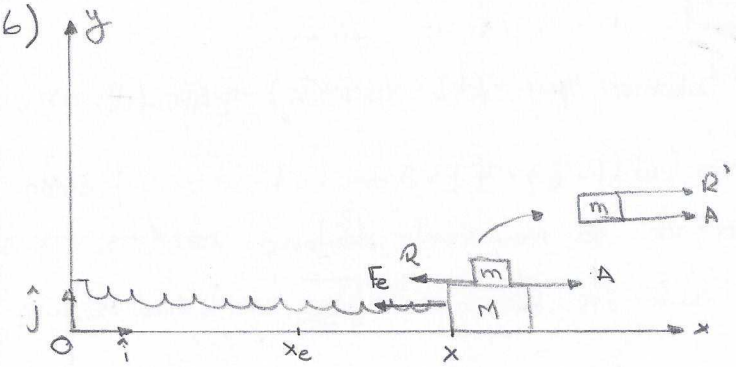
$0,25 \cdot 10^{-2} = 0,7 \cdot \cos(\varphi) \Rightarrow \cos(\varphi) = \frac{0,025}{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{25}{7000}\right)$

Portanto, a função que descreve a posição vertical do prato é:

$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) = 0,07 \left(\sqrt{\frac{3920}{16}}\, t + \arccos\left(\frac{25}{7000}\right)\right) m$

6)



x = amplitude máxima

x_e = ponto de equilíbrio

F_e = força elástica

R = resultante

A = atrito

R' = resultante no bloquinho

No sistema como um todo temos que:

$-R\hat{i} = -F_e \hat{i} \therefore -(m+M) \cdot a = -kx \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \frac{kx}{m+M}$

No bloco menor temos que:

$R'\hat{i} = A\hat{i} \therefore \cancel{m} \cdot a = \mu \cdot \cancel{m} \cdot g \Rightarrow \frac{kx}{m+M} = \mu g \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{\mu \cdot g (m+M)}{k} \Rightarrow x = \frac{0,42 \cdot 9,8 (1,22 + 8,73)}{344} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \simeq 0,119\ m$

7) Sabemos que há a conservação do momento linear

$P_{antes} = P_{depois} \Rightarrow m \cdot v = (m+M) \cdot v_f \Rightarrow v_f = \frac{mv}{m+M}$

Do impacto até a deformação máxima, há a conservação de energia:

$T = U \Rightarrow \frac{(m+M) v_f^2}{\cancel{2}} = \frac{kA^2}{\cancel{2}} \Rightarrow A^2 = \frac{(m+M)}{k} \cdot \frac{(mv)^2}{(m+M)^{\cancel{2}}} \Rightarrow$

$\Rightarrow A^2 = \frac{(mv^2)}{k(m+M)} \Rightarrow A = \frac{mv}{\sqrt{k(m+M)}}$

Resolvendo a Segunda Lei de Newton para a deformação máxima:

$-kA = (m+M) \cdot \ddot{x}(t) \Rightarrow \ddot{x}(t) = \frac{-kA^2}{m+M} \Rightarrow \ddot{x}(t) = -\omega^2 A \Rightarrow$

$\Rightarrow \ddot{x}(t) = -\omega^2 \cdot \frac{mv}{\sqrt{k(m+M)}}$, com $\omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}}$

Sabendo que em $t_0 = 0$ o bloco se encontra em repouso ou seja, $v_0 = 0$ temos:

$v(t_0) = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t_0 + \varphi) \Rightarrow 0 = \operatorname{sen} \varphi \Rightarrow \varphi = 0.$

Assim: $v(t) = \dot{x}(t) = -\frac{mv}{\sqrt{k(m+M)}} \cdot \sqrt{\frac{k}{m+M}} \cdot \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m+M}} \cdot t\right) =$

$= -mv \cdot \sqrt{\frac{1}{(m+M)^2}} \cdot \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m+M}}\, t\right)$

A equação do movimento é dada por:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow x(t) = \frac{mv}{\sqrt{k(m+M)}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m+M}}\,t\right)$$

8) Sabendo-se que se trata de um pendulo simples temos que:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} = \sqrt{\frac{9,8}{1,5}} \cong 2,556\ s^{-1}$$

Sendo τ o período do pendulo:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \tau = \frac{2\pi}{2,556} \Rightarrow \tau \cong 2,458\ s$$

2,458 s ——— 1 oscilação
1 s ——— x $\Rightarrow x = \frac{1}{2,458} \Rightarrow x \cong 0,406$ oscilação

9) Devemos calcular o período:

136 s ——— 100 oscilações
τ ——— 1 oscilação $\Rightarrow \tau = \frac{136}{100} = 0,136\ s$

Como sabemos que o pendulo simples realiza MHS, então:

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{1,36} \Rightarrow \omega = 4,62$$

$$4,62 = \sqrt{\frac{g'}{0,5}} \Rightarrow g' \cong 10,7\ m/s^2$$

11) Devemos calcular o momento de inércia em relação ao gancho:

$$I_{barra} = \frac{mL^2}{12} \therefore I_{sistema} = 4\left(I_{barra} + m\left(L/2\right)^2\right) =$$

$$= \frac{mL^2}{3} + mL^2 = \frac{4mL^2}{3}$$

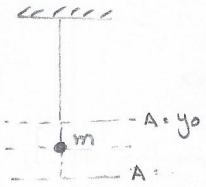
$$I_{gancho} = I_{sistema} + 4m\left(\frac{L\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{4mL^2}{3} + 2mL^2 = \frac{10mL^2}{3}$$

Sabemos que o sistema realiza um movimento harmônico simples, portanto:

$$f = \frac{1}{\tau} \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4mgd}{I_{gancho}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\cancel{4m}^{2}\cdot g\cdot\frac{L\sqrt{2}}{\cancel{2}}\cdot\frac{3}{\cancel{10}_{5}\cancel{m}L^2}} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{5}\frac{g}{L}}$$

4) a) Sabemos que no ponto de equilibrio a mola terá uma deformação $\Delta x_e = \frac{10}{2} = 5\,cm = 0,05\,m$ (deformação no ponto de equilibrio).



No equilíbrio temos que:

$$mg = k\Delta x_e \Rightarrow k = \frac{mg}{\Delta x_e} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{m\cdot 9,8}{0,05}$$

A frequência angular é dada por: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{9,8}{0,05}}$

O período será $\tau = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \tau = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{0,05}{9,8}} \therefore$

$$f = \frac{1}{\tau} \cong 2,2\ Hz$$

b) Tratando-se de um MHS teremos que $v = -A\omega\,\text{sen}(\omega t + \varphi)$. Portanto, a velocidade será máxima quando $\text{sen}(\omega t + \varphi) = -1$

$$v_{máx} = -A\omega \Rightarrow v_{máx} = +5\cdot\sqrt{\frac{9,8}{0,05}} = +70\ m/s$$

c) $$\frac{f}{2} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9,8m}{0,05}\cdot\frac{1}{(m+0,3)}} \Rightarrow$$

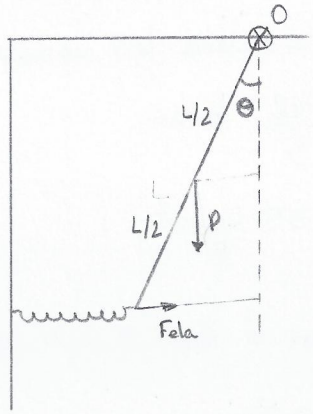
$$\Rightarrow (2,2\pi)^2\cdot 0,05 = \frac{9,8m}{m+0,3} \Rightarrow m = 0,1\,kg = 100\,g$$

d) Na nova posição de equilíbrio teremos uma deformação de (em relação ao comprimento inicial da mola):

$$(m+M)\cdot g = k\cdot\Delta x_{en} \Rightarrow \Delta x_{en} = \frac{0,4\cdot 9,8}{19,6} = 0,2\,m$$

Em relação à antiga posição de equilíbrio teremos 0,15 m.

12) a)



$$\tau_P = -P\cdot\frac{L}{2}\,\text{sen}\,\theta = -\frac{MgL}{2}\,\text{sen}\,\theta$$

$$\tau_{ela} = -F_{ela}\cdot L\cos\theta = -kL\,\text{sen}\,\theta\cdot L\cos\theta$$

$\tau_{peso} + \tau_{ela} = I_o \cdot \alpha_z \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{MgL\,sen\theta}{2} - kL^2 sen\theta\cos\theta = \frac{ML^2}{3}\cdot\ddot{\theta} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{3g\,sen\theta}{2L} - \frac{3k\,sen\theta\cos\theta}{M} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ddot{\theta} + \left(\frac{3g}{2L} + \frac{3k\cos\theta}{M}\right)\cdot sen\theta = 0$

b) Se $\theta << 1$, então $sen\theta \cong \theta$:

$\ddot{\theta} + \left(\frac{3g}{2L} + \frac{3k\cos\theta}{M}\right)\cdot\theta = 0 \therefore \omega = \sqrt{\frac{3g}{2L} + \frac{3k\cos\theta}{M}}$

c) Tomamos a equação do movimento e da velocidade

$$\begin{cases}\theta(t) = A\,sen(\omega t) + B\cos(\omega t)\\ \dot{\theta}(t) = A\cos(\omega t) - B\,sen(\omega t)\end{cases}$$

Em $t = 0$, temos:

$\theta(0) = \theta_0 \Rightarrow B = \theta_0$

$\dot{\theta}(0) = 0 \Rightarrow A = 0$

$\therefore \theta(t) = \theta_0\cos(\omega t)$

13) Considerando o eixo z como sendo perpendicular ao plano do disco:

$I_z = \frac{MR^2}{2} = \frac{2\cdot10^{-3}\cdot(2{,}2\cdot10^{-2})^2}{2} = 2{,}42\cdot10^{-7}\,kgm^2$

Como $\tau = 1\,s$ então:

$1 = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = 2\pi \therefore 2\pi = \sqrt{\frac{K}{2{,}42\cdot10^{-7}}} \Rightarrow$

$\Rightarrow K = (2\pi)^2\cdot 2{,}42\cdot10^{-7} \Rightarrow K = 9{,}553\cdot10^{-6}$

14) Considerando que a esfera tem momento de inércia igual a $I = \frac{2MR^2}{5}$ temos:

$I = \frac{2\cdot95\cdot0{,}12^2}{5} \cong 0{,}55\,kgm^2$

O torque restaurador é $\tau_R = 0{,}02\,N$, portanto:

$0{,}02 = \theta\cdot K \Rightarrow K = \frac{0{,}02}{0{,}85} \Rightarrow K = 0{,}024 \therefore$

$\omega = \sqrt{\frac{K}{I}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{0{,}024}{0{,}55}} \cong 0{,}21\,s^{-1}$

$\tau = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \tau \cong 9{,}6\pi\,s$

10) a) Como se trata de um pêndulo físico sabemos que

$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$

$\tau = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow 0{,}94 = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{I}{mgd}} \Rightarrow I = (0{,}15)^2\cdot1{,}8\cdot10\cdot0{,}$

$\Rightarrow I = 0{,}1007\,kg\cdot m^2$

b) $\theta(0) = 0{,}4\,rad \Rightarrow A = 0{,}4\,rad$

$\dot{\theta} = -A\omega\cdot sen(\omega t) \Rightarrow \dot{\theta} = -0{,}4\cdot\frac{2\pi}{0{,}94}\cdot sen\left(\frac{2\pi}{0{,}94}\cdot\frac{0{,}94}{4}\right) =$

$\cong 2{,}6\,rad/s$

15) a) Como o cilindro rola sem deslizar então há conservação da energia mecânica:

$\frac{kx^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \Rightarrow \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega^2R^2}{2} + \frac{mR^2\omega^2}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{kx^2}{2} = 2\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_c \Rightarrow \mathcal{E}_c = \frac{3\cdot(0{,}25)^2}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{E}_c = 0{,}031\,J \therefore \mathcal{E}_{c_{TRAS}} = 0{,}0625\,J$ e $\mathcal{E}_{c_{rol}} = 0{,}031\,J$

b) $\omega = \frac{2\pi}{\tau} \Rightarrow \frac{V_{MÁX}}{x} = \frac{2\pi}{\tau} \Rightarrow \tau = \frac{2\pi}{4V_{MAX}} \Rightarrow \tau = \frac{\pi}{2V_{MAX}}$

$\frac{mV_{MÁX}^2}{2} = 0{,}0625 \Rightarrow V_{MAX}^2 = \frac{1}{8m} \Rightarrow V_{MAX} = \frac{1}{2\sqrt{2m}}$

$\therefore \tau = \pi\sqrt{2m}$

17) a) $F_{ela} = -\frac{dU}{dx} = -\left(\frac{-2a}{x_{eq}^3} + \frac{b}{x_{eq}^2}\right) = \frac{2a}{x_{eq}^3} - \frac{b}{x_{eq}^2} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow bx = 2a \Rightarrow x_{eq} = \frac{2a}{b}$

b) $k = \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x = x_{eq}} = \frac{d}{dx}\left[\frac{-2a}{x^3} + \frac{b}{x^2}\right]_{x = 2a/b} \Rightarrow$

$\Rightarrow k = \left[\frac{6a}{x^4} - \frac{2b}{x^3}\right]_{x = 2a/b} \Rightarrow k = \left[\frac{\cancel{6}^{3}a}{\cancel{8}_{4}a^4/b^4} - \frac{\cancel{2}^{1}b}{\cancel{8}_{4}a^3/b^3}\right]$

$= \frac{3b^4}{4a^3} - \frac{b^4}{4a^3} = \frac{b^4}{2a^3}$

Pela Segunda Lei de Newton:

$-kx' = m\cdot\frac{d^2x'}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x'}{dt^2} + \frac{kx'}{m} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{d^2x'}{dt^2} + \left(\frac{b^4}{2a^3m}\right)x' = 0$

c) $\tau = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \tau = 2\pi\sqrt{\frac{2a^3m}{b^4}}$

c) $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

Em $t=0$: $5 = -A\omega^2 \cdot \cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = -\frac{1}{2}$: $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ ou $\varphi = \frac{4\pi}{3}$

Em $t=1$: $10 = -10\cos\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) \Rightarrow \frac{\pi}{3} + \varphi = \pi \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}$

$\therefore x(t) = \frac{90}{\pi^2}\cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot t + \frac{2\pi}{3}\right)$ cm

d) $\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\frac{90}{\pi^2} \cdot \frac{\pi}{3} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{30}{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{2\pi}{3}\right)$

Em $t=0$: $\dot{x}(0) = -\frac{30}{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{30}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{15\sqrt{3}}{\pi}$ cm/s

e) $\omega = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{k}{m} = \frac{\pi^2}{9} \Rightarrow k = \frac{\pi^2}{3}$ N/m

$\mathcal{E}_m = \frac{kA^2}{2} = \frac{\pi^{\cancel{2}}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\overset{0,3}{\cancel{0,9}} \cdot 0,9}{\pi^{\cancel{4}}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{0,27}{2\pi^2}$ J

Q5 da Lista 1

a) Como a mola se encontra comprimida em $x = 0,25$ cm temos: $F = kx \Rightarrow m \cdot g = kx \Rightarrow$
$\Rightarrow k = \frac{mg}{x} \Rightarrow k = 392$ N/m

b) Como trata-se de um sistema isolado então há conservação da quantidade de movimento. E devido a ausência de forças externas ou forças não conservativas, a energia mecânica se conserva.

i) $\mathcal{E}_m^{inicio} = \mathcal{E}_m^{final} \Rightarrow \cancel{M}gh = \frac{\cancel{M}V_c^2}{2} \Rightarrow V_c^2 = 2gh \Rightarrow V_c = \sqrt{2gh} \cong 1$ m/s

ii) $P_{inicio} = P_{final} \Rightarrow M \cdot V_c = (M+m) \cdot V_{conjunto} \Rightarrow V_{conjunto} = \frac{M \cdot V_c}{M+m} \Rightarrow V_{conjunto} \cong 0,93$ m/s

c) Devemos calcular a nova posição de equilíbrio da mola:

$P = F' \Rightarrow (M+m) \cdot g = kx' \Rightarrow x' = \frac{(M+m)g}{k} = 0,04$ m

Essa nova posição calculada refere-se ao comprimento natural da mola mas queremos a posição de equilíbrio em relação a posição de equilíbrio anterior: $\Delta x = 0,04 - 0,025 = 0,0375$ m

Não há ação de forças não conservativas e nem de forças externas, então há conservação da energia mecânica:

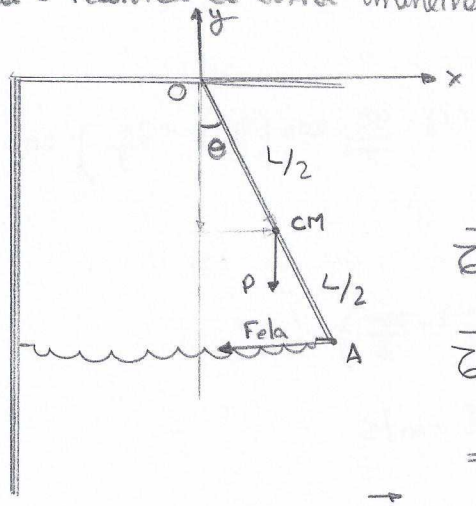
$$\frac{kA^2}{2} = \frac{(M+m)V_{conjunto}^2}{2} + \frac{k\Delta x^2}{2} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{(M+m)V_{conjunto}^2}{k} + \Delta x^2} = 0,07\text{ m} \cong 7\text{ cm}$$

d) A frequência angular ω será: $\omega = \sqrt{\frac{k}{(m+M)}} \cong 16 \therefore T = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8} \cong 0,4$ s

e) $x(0) = 0,0375 \Rightarrow 0,0375 = A\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{0,0375}{0,07} \Rightarrow \varphi \cong \frac{57\pi}{180}$

$x(t) = 0,07\cos\left(16t + \frac{57\pi}{180}\right)$

Q12 da Lista 1 resolvida de outra maneira:



$$\vec{r}_{O,CM} = \frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta\,\hat{i} - \frac{L}{2}\cos\theta\,\hat{j}$$

$$\vec{r}_{O,A} = L\operatorname{sen}\theta\,\hat{i} - L\cos\theta\,\hat{j}$$

$$\vec{\tau}_P = \left(\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta\,\hat{i} - \frac{L}{2}\cos\theta\,\hat{j}\right)\wedge(-mg)\,\hat{j} = -\frac{L}{2}mg\operatorname{sen}\theta\,\hat{k}$$

$$\vec{\tau}_{Fela} = \left(L\operatorname{sen}\theta\,\hat{i} - L\cos\theta\,\hat{j}\right)\wedge(-kL\operatorname{sen}\theta)\,\hat{i} =$$

$$= -L^2k\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta\,\hat{k}$$

$$\vec{\tau}_{TOTAL} = \left(-\frac{L}{2}mg\operatorname{sen}\theta - L^2k\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right)\hat{k}$$

$$\tau_{TOTAL} = -\frac{L}{2}mg\operatorname{sen}\theta - L^2k\operatorname{sen}\theta\cos\theta \Rightarrow \frac{mL^2}{3}\cdot\ddot{\theta} = -\frac{L}{2}mg\operatorname{sen}\theta - L^2k\operatorname{sen}\theta\cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{3g\operatorname{sen}\theta}{2L} - \frac{3k\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{m} \Rightarrow \ddot{\theta} + \left(\frac{3g}{2L} + \frac{3k\cos\theta}{m}\right)\operatorname{sen}\theta = 0$$

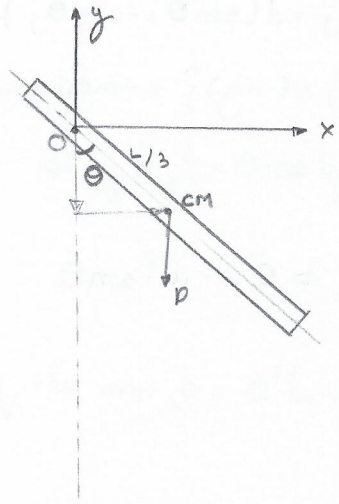
Como $\theta \ll 1$ então: $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$, com $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2L} + \frac{3k}{m}}$

$$\theta(t) = A\cos(\omega t) + B\operatorname{sen}(\omega t) \Rightarrow \theta(0) = \theta_0 \Rightarrow A = \theta_0$$

$$\dot{\theta}(t) = -A\omega\operatorname{sen}(\omega t) + B\omega\cos(\omega t) \Rightarrow \dot{\theta}(0) = 0 \Rightarrow B\omega = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\Rightarrow \theta(t) = \theta_0\cos(\omega t)$$

Q2) a)



$\vec{r}_{CM,O} = \frac{L}{3}\operatorname{sen}\theta\,\hat{i} - \frac{L}{3}\cos\theta\,\hat{j} \therefore \vec{\tau}_{peso} = \vec{r}_{CM,O} \wedge \vec{P} =$

$= \frac{L}{3}\operatorname{sen}\theta\,\hat{i} - \frac{L}{3}\cos\theta\,\hat{j} \wedge (-Mg)\hat{j} = -\frac{L}{3}Mg\operatorname{sen}\theta\,\hat{k} \therefore \tau_{peso} = -\frac{L}{3}Mg\operatorname{sen}\theta$

$I = I_c + Md^2 \Rightarrow I = \frac{ML^2}{12} + \frac{ML^2}{9} = \frac{3ML^2+4ML^2}{36} = \frac{7ML^2}{36}$

Como o peso é a única força atuante na barra temos que:

$\tau_{TOTAL} = \tau_{peso} \Rightarrow I\cdot\alpha = -\frac{L}{3}Mg\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \frac{7\cancel{M}L^{\cancel{2}}}{36}\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\cancel{L}}{3}\cancel{M}g\operatorname{sen}\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{-12}{7L}g\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} - \omega^2\operatorname{sen}\theta = 0$, com $\omega = \sqrt{\frac{12g}{7L}}$

Sendo $\theta << 1$ temos que $\ddot{\theta} - \omega^2\theta = 0$

b) Tratando-se de um MHS: $T_0 = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T_0 = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{7L}{12g}}$ s

c) $\theta(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$
$\dot{\theta}(t) = -A\omega\operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$ $\Rightarrow \begin{cases} \theta(0) = A\cos\varphi = \theta_0 & (1) \\ \dot{\theta}(0) = -A\omega\operatorname{sen}\varphi = 0 & (2) \end{cases} \therefore (1)^2 + (2)^2 = A^2\cos^2\varphi + A^2\operatorname{sen}^2\varphi = \theta_0^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A^2 = \theta_0^2 \Rightarrow A = \theta_0$ (sentido anti-horário) (3)

Substituindo (3) em (1) e em (2): $\begin{cases} \cos\varphi = 1 \\ \operatorname{sen}\varphi = 0 \end{cases} \therefore \theta(t) = A(\cos\omega t\cdot\cos\varphi - \operatorname{sen}\omega t\cdot\operatorname{sen}\varphi) \Rightarrow$
$\Rightarrow \theta(t) = A\cos\omega t \Rightarrow \theta(t) = \theta_0\cos\left(\sqrt{\frac{12g}{7L}}\cdot t\right)$

d) $E_m = \frac{I\cdot\dot{\theta}^2(t)}{2} + Mg\frac{L}{3} - Mg\frac{L}{3}\cos\theta = \frac{7ML^2}{72}\dot{\theta}^2(t) + Mg\frac{L}{3} - Mg\frac{L}{3}\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) =$

$= \frac{7ML^2}{72}\dot{\theta}^2(t) + \frac{MgL\theta^2}{6}$

$\theta(t_1) = \frac{\theta_0}{2} \Rightarrow \cancel{\theta_0}\cos(\omega t) = \frac{\cancel{\theta_0}}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3\omega} \therefore \dot{\theta}(t_1) = -\theta_0\cdot\omega\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$E_m = \frac{7ML^2}{72}\cdot\theta_0^2\omega^2\cdot\frac{3}{4} + \frac{MgL\theta_0^2}{24}$

e) Utilizando o mesmo processo do item a): $I_c = \frac{ML^2}{12} + \frac{ML^2}{4} = \frac{ML^2+3ML^2}{12} = \frac{ML^2}{3} \therefore \omega_e = \sqrt{\frac{MgL}{2I_e}} =$

$= \sqrt{\frac{\cancel{M}g\cancel{L}\cdot 3}{2\cancel{M}L^{\cancel{2}}}} = \sqrt{\frac{3g}{2L}}$

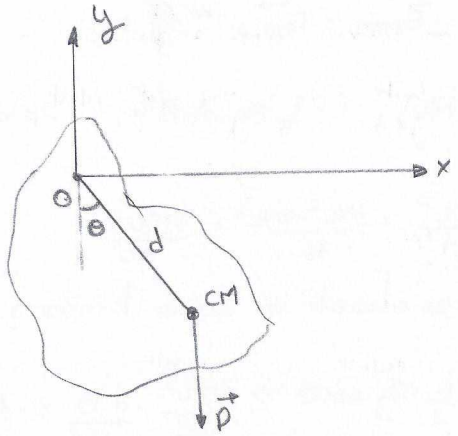
Tratando-se de um MHS: $T_e = \frac{2\pi}{\omega_e} = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{2L}{3g}}$. A razão procurada será dada por: $\frac{T_e}{T_0} = \frac{2\pi}{2\pi}\sqrt{\frac{2\cancel{L}}{3\cancel{g}}\cdot\frac{12\cancel{g}^{4}}{7\cancel{L}}} =$

$= \sqrt{\frac{8}{7}}$

P1 de 2012:

Q1) a) Do gráfico sabemos que: $\tau = 7 - 1 = 6$ s

b) Sabemos que a aceleração máxima é dada por $\ddot{x} = A\omega^2$. Do gráfico $10 = A\left(\frac{2\pi}{6}\right)^2 \Rightarrow A = \frac{90}{\pi^2}$ cm



$$\vec{r}_{CM,O} = d\,\text{sen}\,\theta\,\hat{i} - d\cos\theta\,\hat{j} = d(\text{sen}\,\theta\,\hat{i} - \cos\theta\,\hat{j})$$

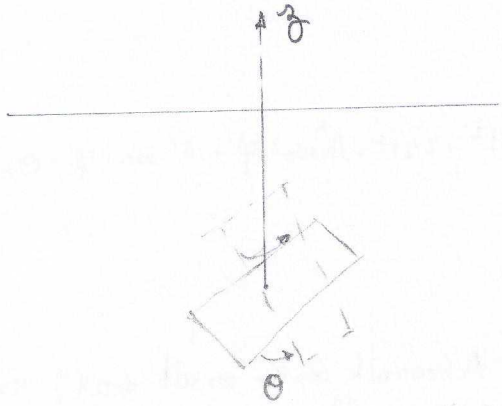
$$\vec{\tau}_z = d(\text{sen}\,\theta\,\hat{i} - \cos\theta\,\hat{j}) \times (-mg)\hat{j} = -mgd\,\text{sen}\,\theta\,\hat{k}$$

$$\tau_z = -mgd\,\text{sen}\,\theta \Rightarrow -mgd\,\text{sen}\,\theta = I_z \alpha_z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgd\,\text{sen}\,\theta}{I_z} \Rightarrow \ddot{\theta} = -\omega^2\,\text{sen}\,\theta$$

Para $\theta << 1$ temos: $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$, com $\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I_z}}$

Equação do MHS para o pêndulo de torsão



$\tau_z = -K\theta$ } torque restaurador exercido pelo fio

$$\tau_z = I_z \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow -K\theta = I_z \cdot \ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{K\theta}{I_z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{K\theta}{I_z} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0, \text{ com } \omega = \sqrt{\frac{K}{I_z}}$$

P1 de 2013

Q1) a) Tratando-se de um movimento harmônico simples

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{72}{8}} \Rightarrow \omega = 3 \therefore f = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3}{2\pi}\ Hz$$

b) Como não há ação de forças externas e nem de forças não conservativas então a energia mecânica se conserva:

$$E_m^{inicial} = E_m^{final} \Rightarrow \frac{kx_0^2}{2} + \frac{mv_0^2}{2} = \frac{kx_{máx}^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{72 \cdot 0{,}01}{2} + \frac{8 \cdot 0{,}27}{2} = 72x_{max}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}01 + 0{,}03 = x_{máx}^2 \Rightarrow x_{máx} = 0{,}2\,m$$

Como consideramos a posição de equilíbrio sendo a origem temos que a amplitude será $A = 0{,}2\,m$

c) $x(t) = a\cos(\omega t) + b\,\text{sen}(\omega t)$
$v(t) = -a\omega\,\text{sen}(\omega t) + b\omega\cos(\omega t)$ $\Rightarrow \begin{cases} x(0) = a = 0{,}1\,m \\ v(0) = b\omega = -0{,}3\sqrt{3} \\ \Rightarrow b = -\frac{0{,}1\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

$$x(t) = 0{,}1\cos(\omega t) - \frac{0{,}1\sqrt{3}}{3}\,\text{sen}(\omega t)$$

Outra solução:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \therefore x(0) = A\cos\varphi = 0{,}1$$

$$v(t) = -A\omega\,\text{sen}(\omega t + \varphi) \therefore v(0) = -A\omega\,\text{sen}\,\varphi = -0{,}3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \text{sen}\,\varphi = \frac{0{,}3\sqrt{3}}{0{,}2 \cdot 3} \Rightarrow \text{sen}\,\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \therefore \varphi > 0$$

$$\cos\varphi = \frac{0{,}1}{0{,}2} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2} \therefore \varphi = \frac{\pi}{3}$$

$$x(t) = 0{,}2 \cdot \cos(3t + \pi/3)\ m$$

d) $v(t) = -A\omega\,\text{sen}(\omega t + \varphi) \Rightarrow$

$$\Rightarrow v(t) = -0{,}2 \cdot 3\,\text{sen}(3t + \pi/3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v(t) = -0{,}6\,\text{sen}(3t + \pi/3)\ m/s$$

e) $U(t) = \frac{kx^2}{2} = k \cdot \frac{0{,}04}{2} \cdot \cos^2(3t + \pi/3) =$

$$= 1{,}44\cos^2(3t + \pi/3)\ J$$

$$K(t) = \frac{mv^2}{2} = 8 \cdot \frac{0{,}36}{2}\,\text{sen}^2(3t + \pi/3) =$$

$$= 8 \cdot 0{,}18\,\text{sen}^2(3t + \pi/3) =$$

$$= 1{,}44\,\text{sen}^2(3t + \pi/3)\ J$$

Note que não há ação de forças não conservativas no sistema e que a única força externa atuante é a reação do teto que não realiza trabalho. Então $W_{TOTAL} = W_c$, portanto, a energia mecânica se conserva.

$$E_m = U_{grav} + U_{ela} + T = -mg\frac{L}{2}\cos\theta + \frac{k}{2}(-L\,\text{sen}\,\theta)^2 + \frac{I\dot{\theta}^2}{2} = -\frac{mgL\cos\theta}{2} + \frac{kL^2\text{sen}^2\theta}{2} + \frac{1}{6}mL^2\cdot\dot{\theta}$$

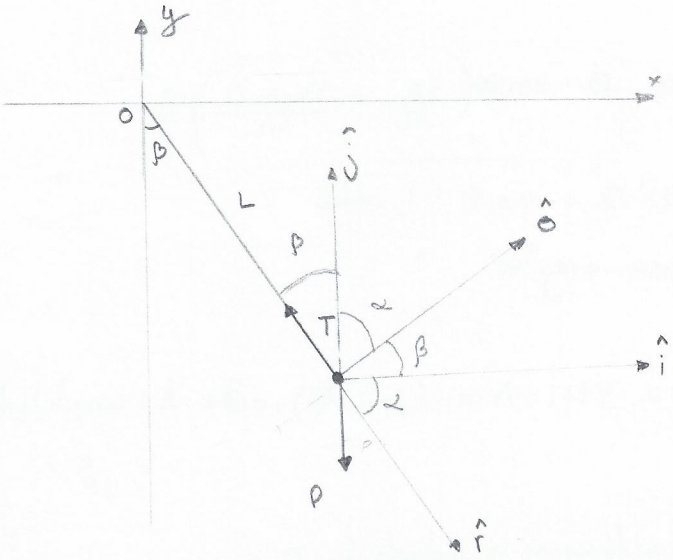
Como a energia mecânica é constante e, portanto, sua derivada será zero:

$$\dot{E}_m = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}mL^2\,2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mLg\,\text{sen}\,\theta\cdot\dot{\theta} + kL^2\cdot 2\,\text{sen}\,\theta\cdot\cos\theta\cdot\dot{\theta}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\dot{\theta}\left(\frac{1}{3}\cdot mL^2\cdot 2\ddot{\theta} + mLg\,\text{sen}\,\theta + kL^2\cdot 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}mL^{\cancel{2}}\cdot 2\ddot{\theta} + m\cancel{L}g\,\text{sen}\,\theta + kL^{\cancel{2}}\cdot 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta = 0 \quad \left(-\frac{2mL}{3}\right) \Rightarrow \ddot{\theta} + \text{sen}\,\theta\left[\frac{3g}{2L} + \frac{3k}{m}\cos\theta\right] = 0$$

Equação do MHS para o pêndulo simples:



$$\boxed{\begin{aligned}\hat{r} &= \text{sen}\,\beta\,\hat{i} - \cos\beta\,\hat{j}\\ \hat{\theta} &= \cos\beta\,\hat{i} + \text{sen}\,\beta\,\hat{j}\end{aligned}}$$

$$\vec{r_0} = L\,\text{sen}\,\beta\,\hat{i} - L\cos\beta\,\hat{j} = L(\text{sen}\,\beta\,\hat{i} - \cos\beta\,\hat{j}) = L\hat{r}$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r_0}}{dt} = L\dot{\beta}(\cos\beta\,\hat{i} + \text{sen}\,\beta\,\hat{j}) = L\dot{\beta}\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = L\ddot{\beta}\hat{\theta} + L\dot{\beta}\frac{d\hat{\theta}}{dt} = L\ddot{\beta}\hat{\theta} - L\dot{\beta}^2\hat{r}$$

$$\vec{P} = mg(\cos\beta\,\hat{r} - \text{sen}\,\beta\,\hat{\theta})$$

$$\vec{T} = |\vec{T}|(-\text{sen}\,\beta\,\hat{i} + \cos\beta\,\hat{j}) = -\underbrace{|\vec{T}|}_{T}\hat{r}$$

$$\vec{F_R} = \vec{P} + \vec{T} \Rightarrow m\cdot\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} \Rightarrow m(L\ddot{\beta}\hat{\theta} - L\dot{\beta}^2\hat{r}) = mg(\cos\beta\,\hat{r} - \text{sen}\,\beta\,\hat{\theta}) - T\hat{r} \Rightarrow$$

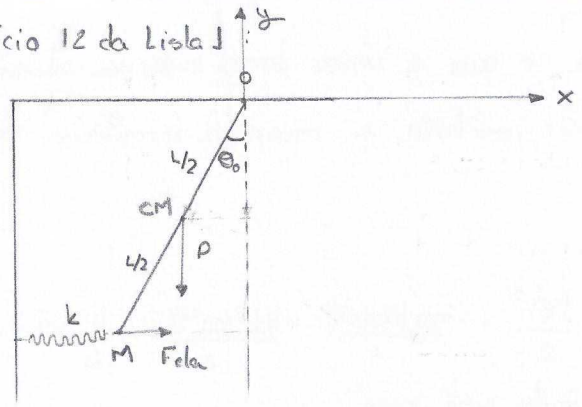
$$\Rightarrow mL\ddot{\beta}\hat{\theta} - mL\dot{\beta}^2\hat{r} = (mg\cos\beta - T)\hat{r} - mg\,\text{sen}\,\beta\cdot\hat{\theta} \quad \begin{cases} mg\cos\beta - T = mL\dot{\beta}^2 \\ -\cancel{m}g\,\text{sen}\,\beta = \cancel{m}L\ddot{\beta} \Rightarrow \ddot{\beta} = -\dfrac{g\,\text{sen}\,\beta}{L}\end{cases}$$

Para $\beta \ll 1$ temos um MHS: $\ddot{\beta} + \omega^2\beta = 0$, com $\omega = \sqrt{g/L}$

Equação do MHS para o pêndulo físico:

Exercício 12 da Lista 1

a)



$\vec{P}$ = força peso $\vec{Fela}$ = força elástica

Note que o ângulo está medido no sentido anti-horário então $\theta_0 < 0$. Lembrar que a função seno é ímpar e a função cossseno é par.

$$\vec{r}_{CM,O} = -\frac{L}{2}\underbrace{\operatorname{sen}\theta\hat{i}}_{\text{ímpar}} - \frac{L}{2}\cos\theta\hat{j} = \frac{L}{2}(\operatorname{sen}\theta\hat{i} - \cos\theta\hat{j})$$

$$\vec{r}_{M,O} = -L\operatorname{sen}\theta\,\hat{i} - L\cos\theta\,\hat{j} = L(\operatorname{sen}\theta\,\hat{i} - \cos\theta\,\hat{j})$$

$$\vec{\tau}_P = \vec{r}_{CM,O} \times \vec{P} = \frac{L}{2}(\operatorname{sen}\theta\,\hat{i} - \cos\theta\,\hat{j}) \times (-mg)\hat{j} = -\frac{mgL}{2}\operatorname{sen}\theta\,\hat{k}$$

$$\vec{\tau}_{Fela} = \vec{r}_{M,O} \times \vec{Fela} = L(\operatorname{sen}\theta\,\hat{i} - \cos\theta\,\hat{j}) \times (kx)\hat{i} = Lkx\cos\theta\,\hat{k} = Lk(-L\operatorname{sen}\theta)\cdot\cos\theta\,\hat{k} = -L^2k\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\hat{k}$$

$$\vec{\tau}_{O,z} = I_z\cdot\vec{\alpha} \therefore \tau_{O,z} = I_z\cdot\alpha = \tau_P + \tau_{Fela} \Rightarrow I_z\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgL\operatorname{sen}\theta}{2} - L^2k\operatorname{sen}\theta\cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}mL^{\cancel{2}}\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mg\cancel{L}\operatorname{sen}\theta}{2} - L^{\cancel{2}}k\operatorname{sen}\theta\cos\theta \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{3g\operatorname{sen}\theta}{2L} - \frac{3\cancel{L}k\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{m\cancel{L}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\operatorname{sen}\theta\left(\frac{3g}{2L} + \frac{3k\cos\theta}{m}\right)$$

Sendo $\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ temos que a equação diferencial será: $\boxed{\ddot{\theta} + \operatorname{sen}\theta\left(\frac{3g}{2L} + \frac{3k\cos\theta}{m}\right) = 0}$

b) Sendo θ muito pequeno ($\theta << 1$) sabemos que $\operatorname{sen}\theta \cong \theta$ e $\cos\theta \cong 1$, então:

$$\ddot{\theta} + \theta\left(\frac{3g}{2L} + \frac{3k}{m}\right) = 0 \therefore \boxed{\omega = \sqrt{\frac{3g}{2L} + \frac{3k}{m}}}, \ \omega = \text{frequência angular}$$

c) Sabemos que o formato da equação do movimento será $\theta(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, onde A = amplitude e φ = ângulo de fase. Portanto:

$\frac{d\theta}{dt} = -A\omega\operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \Rightarrow \dot{\theta} = -A\omega\operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$ Consideremos o instante $t_0 = 0$ em que a barra é largada

$$\begin{cases} \theta(0) = A\cos\varphi = \theta_0 & (1) \\ \dot{\theta}(0) = -A\omega\operatorname{sen}\varphi = 0 & (2) \end{cases} \therefore (1)^2 + (2)^2 \Rightarrow A^2\cos^2\varphi + A^2\operatorname{sen}^2\varphi = \theta_0^2 \Rightarrow A^2 = \theta_0^2 \Rightarrow \underbrace{A = -\theta_0}_{\text{sentido horário}} \quad (3)$$

Substituindo (3) em (1) e (2) temos: $\begin{cases} \cos\varphi = -1 \\ \operatorname{sen}\varphi = 0 \end{cases} \therefore \theta(t) = A(\cos\omega t\cdot\overset{-1}{\cancel{\cos\varphi}} - \operatorname{sen}\omega t\cdot\overset{0}{\cancel{\operatorname{sen}\varphi}}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \theta(t) = -\theta_0(-\cos\omega t) \Rightarrow \boxed{\theta(t) = \theta_0\cos\omega t}$$

Exercício 12a resolvido por energia:

Considerando a imagem anterior e o seu sistema de coordenadas:

W_{TOTAL} = trabalho total do sistema W_c = trabalho das forças conservativas

W_{nc} = trabalho das forças não conservativas W_{ext} = trabalho das forças externas