RESUMO P2 FÍSICA II - 2015 1,65

Por Anthun Salles

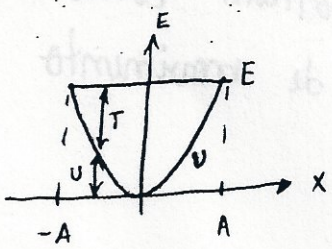
Já estudamos ondas para a primeira prova. Ondas são uma forma de oscilação, mas não são a única. Veremos agora outras formas de oscilação como o pêndulo e o sistema massa - mola.

I - Introdução às Oscilações Harmônicas

Vamos imaginar um corpo de massa m preso a uma mola de constante elástica K. Se não houver dissipação de energia (sem atrito, resistência, etc.), a energia total se conserva.

$$E = U + T$$

Durante a oscilação, teremos energia potencial (U) se transformando em energia cinética (T)



(*) Pequenas oscilações: a força elástica se comporta de forma linear para oscilações pequenas em torno da posição de equilíbrio, quando vale

$$F(x) = -Kx$$

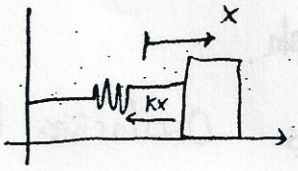
Além disso, para pequenas oscilações, a energia potencial elástica vale:

$$U = \frac{1}{2} K x^2$$

Podemos escrever a <u>equação do movimento</u> do oscilador partindo da 2ª lei de Newton:

$$F = m \cdot a$$

$$-Kx = m \frac{dx^2}{dt^2}$$



ou: $$\boxed{\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{K}{m} \cdot x = 0}$$

Esse é um caso específico de oscilação para pequenos desvios, mas vale para outros caso: qualquer sistema conservativo que se mova com um grau de liberdade e pequena amplitude de movimento se comportam como um oscilador harmônico e sua equação de movimento pode ser escrita como:

$$\frac{dx^2}{dt^2} + w^2 x = 0$$

Ou para rotações

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + w^2 \theta = 0$$

w é a frequência angular de oscilação

No caso do oscilador harmônico:

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \left|\frac{K}{m}\right| x = 0$$

$$w^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow \boxed{w = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

<u>Solução</u>: A solução geral da equação de movimento

$$\frac{dx^2}{dt^2} + w^2 x = 0$$

é da forma:

$$\boxed{x(t) = A\cos(wt + \varphi)}$$

Em que:

- A é a amplitude do movimento
- w é a frequência angular

$$w = \frac{2\pi}{T} = 2\pi F$$

T ← período; F ← frequência

- φ é a constante de fase e pode ser determinada usando as condições iniciais.

II - Aplicações

Vamos ver agora alguns exemplos de oscilação em que, para pequenos desvios em relação ao equilíbrio, o comportamento é similar ao do oscilador harmônico

1. Pêndulo de Torção:

Formado por um corpo apoiado sobre uma superfície plana ou suspenso por um fio. Vamos aplicar um torque nesse fio (τ) de modo que o corpo gira de um ângulo φ

Fig 3.5 Hayse

O torque necessário é dado por: $\boxed{\tau = -K\varphi}$, em que K é o módulo de torção do fio.

O ângulo φ ao longo do tempo será obtido como solução de

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0$$

Em que:

$$\boxed{\omega^2 = \frac{K}{I}}$$

Com I sendo o momento de inércia em relação ao eixo vertical na posição do fio.

A solução será da forma $\varphi(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ e obtemos A e ϕ aplicando às condições iniciais do problema

2. Pêndulo Simples

Para formar um pêndulo simples, colocamos uma massa m presa a um fio rotícado (ou barra sem massa) de comprimento ℓ.

Fig 3.5

A Força resultante tangencial será: $R_\theta = -mg\sin\theta$

De forma que, pela 2ª lei de Newton:

$$m \cdot a_\theta = R_\theta$$

$$mL\frac{d^2\theta}{dt} = -mg\sin\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

Note que essa equação difere da forma que vimos para oscilação harmônica. Contudo, se θ for pequeno ($\theta << 1$), podemos aproximar $\sin\theta \approx \theta$, ficando com:

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0}$$

Que, comparada com o que vimos em oscilação harmônica, mostra uma solução harmônica com:

$$\boxed{\omega^2 = \frac{g}{L}}$$

O período T das pequenas oscilações será

$$T = \frac{2\pi}{w}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$ (período)

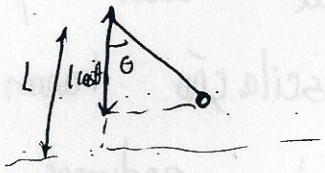
<u>Energia</u>: A energia total (E) se conserva, dividindo-se entre cinética (T) e potencial (U)

$$E = T + U$$

Em que: $$\boxed{T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}$$ (En Cinética)

E a energia potencial é:

$$\boxed{U = mgl\,(1 - \cos\theta)}$$

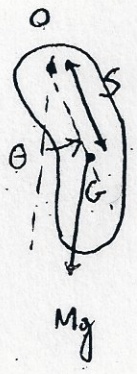


Mas para pequenas oscilações ($\theta << 1$), podemos aproximar: $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$

De modo que $U \approx \frac{mgl\theta^2}{2}$

Observação: Se a oscilação não respeitar $\theta << 1$, ainda podemos usar conservação de energia para resolver questões

3. Pêndulo Físico



Se, ao invés de criarmos um pêndulo com uma massinha m a uma distância l do eixo, fizermos um corpo rígido girar em torno de um eixo passando por O, teremos para pequenos desvios:

$$\boxed{\omega^2 = \frac{K}{L} \quad \text{em que} \quad L = \frac{I}{MS}}$$

Com I sendo o momento de inércia em relação ao eixo ortogonal ao plano, que passa por O; M, a massa do corpo; S a distância entre O e o centro de massa (G)

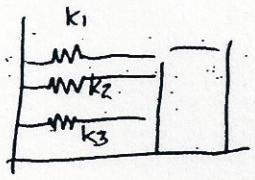
(*) Caso apareça numa questão teste: definimos o raio de giração (K) como:

$$I = MK^2$$

III - Tópicos adicionais

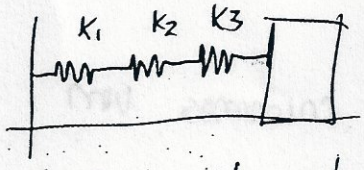
A) Associação de molas : ver questão resolvida da lista de número 8. Em resumo

Paralelo



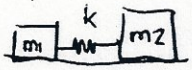
$$k_p = k_1 + k_2 + \cdots$$

Série



$$\frac{1}{k_s} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots$$

B) Oscilação de duas partículas acopladas



Para encontrar a frequência de oscilação, encontramos a massa reduzida (μ) do sistema.

$$\boxed{\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}}$$

Vamos então usar

massa - mola

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

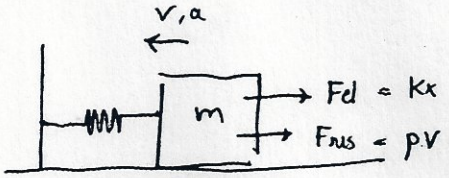
$\Longrightarrow$

duas partículas

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}}$$

IV - Oscilações Amortecidas

Vamos dar um passo adiante e supor que além da força elástica, há uma força resistiva atuando sobre o corpo. Por exemplo, essa força pode ser a resistência do ar.



A força de resistência é calculada de forma simplificada como:

$$F_{res} = -\rho v = -\rho \dot{x}$$

Em que ρ é a constante do amortecimento. A equação do movimento será:

$$m a = F_{res}$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -Kx - \rho \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt} + \frac{\rho}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{K}{m}x = 0$$

Ou: $\boxed{\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$, em que $\gamma = \frac{\rho}{m}$ e $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$

γ: constante de amortecimento

ω_0: Frequência angular natural da mola

A solução dessa equação vai depender da relação entre γ e ω_0

(A) $\frac{\gamma}{2} < \omega_0$ Amortecimento subcrítico

(B) $\frac{\gamma}{2} = \omega_0$ Amortecimento crítico

(C) $\frac{\gamma}{2} > \omega_0$ Amortecimento supercrítico

Ⓐ Amortecimento subcrítico $\left(\frac{\gamma}{2} < \omega_0\right)$

A solução geral será da forma:

$$\boxed{x(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \varphi)}$$

Onde ω é calculada por:

$$\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}}$$

A forma dessa solução é uma oscilação com amplitude caindo exponencialmente

Energia: a energia total instantânea é dada por

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} K x^2$$

Se quisermos a energia média temos:

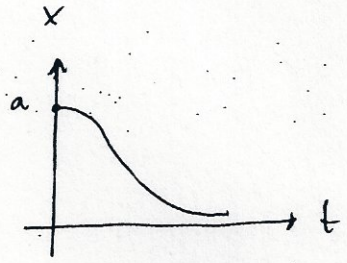
$$\bar{E}(t) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 e^{-\gamma t}$$

Ou seja, a energia média decai exponencialmente com o tempo.

Ⓑ Amortecimento crítico

Se $\boxed{\frac{\gamma}{2} = w_0}$, o corpo vai rapidamente retornar ao equilíbrio. A equação do movimento é da forma

$$\boxed{x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(a+bt)}$$



Ⓒ Amortecimento supercrítico $\left(\frac{\gamma}{2} > w_0\right)$

A solução será da forma:

$$\boxed{x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(a e^{\beta t} + b e^{-\beta t}\right)}$$

Em que:

$$\boxed{\beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - w_0^2}}$$

$x(t)$ será a soma de duas exponenciais decrescentes

Podemos comparar graficamente esses três tipos de solução

Fig + 5 linhas