NUSP:

⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪
①	①	①	①	①	①	①
②	②	②	②	②	②	②
③	③	③	③	③	③	③
④	④	④	④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤
⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

***Instruções:** preencha completamente os círculos com os dígitos do seu número USP (um em cada coluna); na parte de baixo dessa folha, preencha completamente os círculos com as respostas corretas correspondentes a cada questão. Use caneta esferográfica preta ou azul. Escreva apenas nas áreas designadas.*

Nome: .....

Assinatura: .....

Turma: .....

Professor: .....

ESTE ESPAÇO É DE USO EXCLUSIVO DA BANCA DE CORREÇÃO

	1a Avaliação	Revisão
Múltipla-escolha		
Parte discursiva		
Total		

- Esta prova é formada de uma parte objetiva contendo 8 questões de múltipla-escolha (1-8) e uma parte discursiva contendo uma questão (9).
- A parte objetiva corresponde a um total de 6 pontos e a parte discursiva a 4 pontos.

Marque as respostas das questões de múltipla-escolha

(1) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

(2) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

(3) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

(4) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

(5) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

(6) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

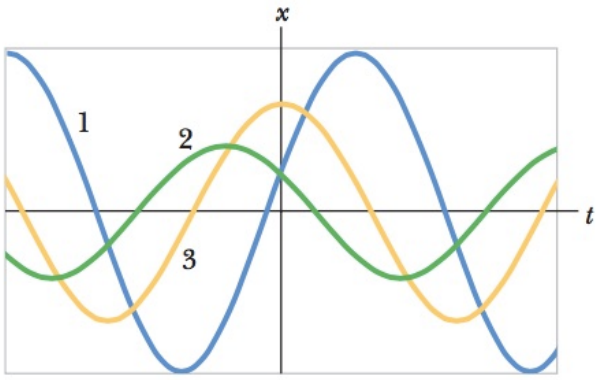
(7) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

(8) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

QUESTÕES DE MÚLTIPLA-ESCOLHA (1-8) - GABARITO
As respostas (a) são as corretas

Quando necessário, use $\pi = 3,14$ e g=10 m/s^2

(1) (0,75 pt) A figura abaixo mostra as curvas $x(t)$ obtidas em três experimentos fazendo um certo sistema bloco-mola oscilar em um movimento harmônico simples. Pode-se dizer que:



☐ ***(a)*** Em $t = 0$, a velocidade do bloco no experimento 1 é maior que no experimento 2 e maior que no experimento 3, sendo a velocidade do bloco nula no experimento 3.

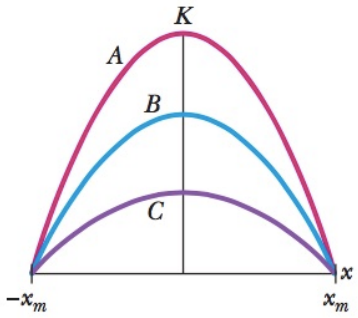
☐ ***(b)*** A freqüência angular do sistema nos três experimentos é diferente.

☐ ***(c)*** Em $t = 0$, a energia potencial da mola no experimento 3 é maior que a energia potencial nos experimentos 1 e 2, sendo a energia potencial no experimento 1 menor que no experimento 2.

☐ ***(d)*** A energia cinética máxima do bloco no experimento 1 é maior que no experimento 3, mas é menor que no experimento 2.

☐ ***(e)*** Em $t = 0$, a energia cinética do bloco no experimento 3 é maior que no experimento 2.

(2) (0,75 pt) A figura a seguir mostra os gráficos da energia cinética K em função da posição x para três osciladores harmônicos que têm a mesma massa. Pode-se dizer que:



☐ ***(a)*** O oscilador A completa uma oscilação em um tempo menor que os outros dois.

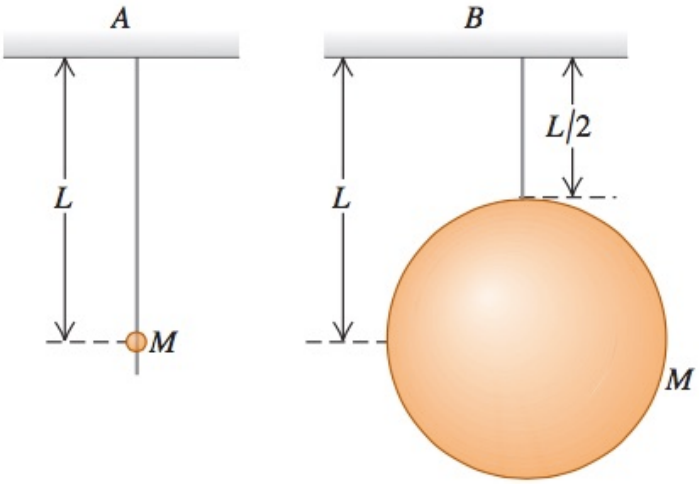
☐ ***(b)*** Os três osciladores tem o mesmo período de oscilação.

☐ ***(c)*** A freqüência de oscilação associada à curva B é menor que aquela da curva C.

☐ ***(d)*** A constante elástica do oscilador A é maior que a dos osciladores B e C, sendo a constante elástica do oscilador B menor que a do oscilador C.

☐ ***(e)*** A constante elástica do oscilador B é maior que a do oscilador A.

(3) (0,75 pt) Cada um dos dois pêndulos mostrados na figura abaixo consiste em uma esfera sólida uniforme de massa M sustentado por uma corda de massa desprezível, porém a esfera do pêndulo A é muito pequena, enquanto a esfera do pêndulo B é bem maior. Sejam τ_A e τ_B os tempos que cada pêndulo demora em completar uma oscilação. Para deslocamentos pequenos, pode-se dizer que:



☐ ***(a)*** O pêndulo B demora mais tempo que o pêndulo A em completar uma oscilação, com $\tau_B/\tau_A = \sqrt{11/10}$.

☐ ***(b)*** Os dois pêndulos levam o mesmo tempo para completar uma oscilação, com $\tau_A = \tau_B = 2\pi\sqrt{L/g}$.

☐ ***(c)*** O pêndulo B demora menos tempo que o pêndulo A em completar uma oscilação, com $\tau_B/\tau_A = 1/\sqrt{2}$.

☐ ***(d)*** O pêndulo B demora mais tempo que o pêndulo A em completar uma oscilação, com $\tau_B/\tau_A = \sqrt{2}$.

☐ ***(e)*** O pêndulo B demora menos tempo que o pêndulo A em completar uma oscilação, com $\tau_B/\tau_A = 1/\sqrt{10}$.

(4) (0,75 pt) Um disco é ligado à massa m e megulhado em um fluido que exerce uma força dissipativa, tal e como mostra a figura. A força restauradora elástica é $-kx$ e a força dissipativa é $-\rho\dot{x}$, com x o deslocamento da massa m em relação à posição de equilíbrio. A tabela abaixo mostra os valores usados em vários experimentos com diferentes

molas, massas e fluidos.

Experimento	k	ρ	m
1	k_0	ρ_0	m_0
2	$3k_0$	$2\rho_0$	m_0
3	$4k_0$	ρ_0	$2m_0$
4	k_0	ρ_0	$10m_0$
5	$k_0/2$	$6\rho_0$	$2m_0$

Em que experimento o tempo no qual a energia mecânica diminui até um quarto do seu valor inicial é maior?

☐ ***(a)*** Experimento 4.

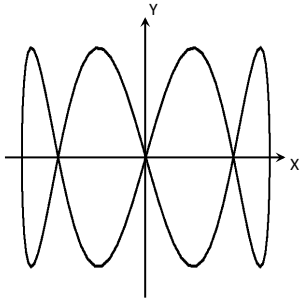
☐ ***(b)*** Experimento 1.

☐ ***(c)*** Experimento 2.

☐ ***(d)*** Experimento 3.

☐ ***(e)*** Experimento 5.

(5) (0,75) A figura de Lissajous abaixo descreve o movimento de uma massa sujeita a duas forças restauradoras perpendiculares, independentes, $F_x = -k_x x$ e $F_y = -k_y y$. Qual é a razão entre as constantes k_x/k_y destas forças restauradoras?



☐ ***(a)*** 1/16

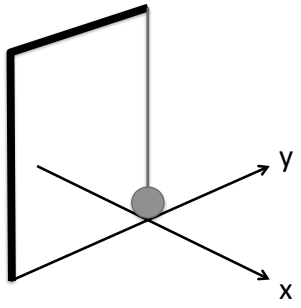
☐ ***(b)*** 4

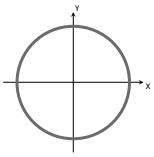
☐ ***(c)*** 2

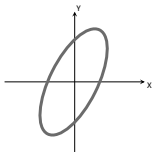
☐ ***(d)*** 1/4

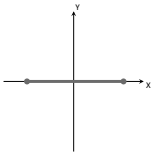
☐ ***(e)*** 16

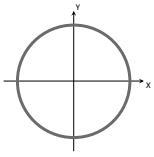
(6) **(0,75)** Um pêndulo simples, como mostrado na figura, é lançado de uma posição $\vec{r} = A\hat{x}$, com uma velocidade $\vec{v} = V_0\hat{y}$. Qual é a trajetória do pêndulo, vista de cima, dados A e V_0 positivos?

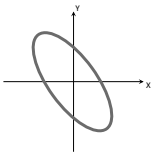


☐ ***(a)***  sentido anti-horário

☐ ***(b)***  sentido horário

☐ ***(c)*** 

☐ ***(d)***  sentido horário

☐ ***(e)***  sentido anti-horário

(7) **(0,75)** Um corpo de massa m está sujeito a um potencial do tipo

$$U(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{2b}{x}.$$

Para pequenas oscilações em torno de sua posição de equilíbrio, a frequência angular de oscilação é igual a

☐ ***(a)*** $\omega = \sqrt{\frac{2b^4}{a^3 m}}$

☐ ***(b)*** $\omega = \sqrt{\frac{b^3}{a^4 m}}$

☐ ***(c)*** $\omega = \sqrt{\frac{2b^3}{3a^4 m}}$

☐ ***(d)*** $\omega = \sqrt{\frac{2a^4}{b^3 m}}$

☐ ***(e)*** $\omega = \sqrt{\frac{b^4}{a^3 m}}$

(8) (0,75) A suspensão de um carro de 700 kg (vazio) foi otimizada para amortecimento crítico quando está com lotação máxima (4 passageiros de 75 kg cada). Quando as pessoas saem do carro, ele se eleva em 6 cm. Qual é o coeficiente de amortecimento do conjunto de amortecedores ligados à suspensão do carro?

☐ ***(a)*** $\sqrt{2} \cdot 10^4 kg/s$

☐ ***(b)*** $2\sqrt{35} \cdot 10^3 kg/s$

☐ ***(c)*** $2\sqrt{5/7} \cdot 10^4 kg/s$

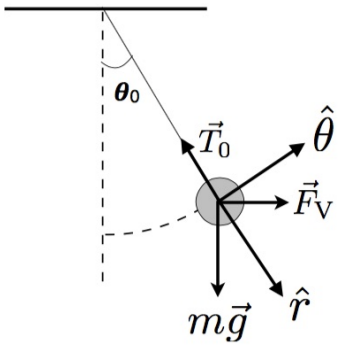
☐ ***(d)*** $2\sqrt{2} \cdot 10^4 kg/s$

☐ ***(e)*** $2\sqrt{5/3} \cdot 10^4 kg/s$

QUESTÃO DISCURSIVA

ATENÇÃO: A solução dessa questão deve ser feita no caderno de provas devidamente identificado com nome, NUSP e turma.

(9) [4,0 pt] Um pêndulo simples, em seu laboratório de física, é composto por um fio de comprimento L e uma bolinha (pontual) de massa m presa à sua ponta. Para iniciar o balanço da bolinha, você coloca um ventilador próximo à ela, soprando uma corrente horizontal de ar de velocidade escalar u, resultando em uma força $\vec{F}_V$ (como mostrado ao lado).
Enquanto o ventilador está ligado, o sistema fica em equilíbrio, com um ângulo θ_0 com a vertical, com $0 < \theta_0 < \pi/2$.



(a) (0,75) Obtenha o módulo do vetor $\vec{F}_V$ para valores gerais de $|\theta| < \pi/2$, em termos do ângulo θ_0, de m e de g.

(b) (1,0) Você desliga o ventilador e deixa que o pêndulo oscile. Supondo que a força de arrasto do ar seja da forma $\vec{F}_A = -\rho\vec{v}$, sendo $\rho > 0$ uma constante e $\vec{v}$ a velocidade da bolinha, deduza a equação diferencial exata que descreve o deslocamento angular $\theta(t)$ do pêndulo para $|\theta| < \pi/2$, justificando de forma sucinta os termos usados na equação.

(c) (1,0) Considere o regime de pequenas oscilações, onde $|\theta| \ll \pi/2$. Dadas as condições iniciais do problema, obtenha a função exata para $\theta(t)$.

(d) (0,5) Determine a constante de decaimento τ deste pêndulo.

(e) (0,75) Quanto tempo levará para a amplitude de oscilação do pêndulo chegar a um valor $\theta_0/5$?

Nota: dê suas respostas em termos dos parâmetros do problema: L, m, g, ρ, θ_0, u.

FORMULÁRIO

Momento de inércia de uma esfera (a partir de um eixo de simetria): $I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2$
Momento de inércia de uma esfera oca (a partir de um eixo de simetria): $I_{CM} = \frac{2}{3}MR^2$
Teorema dos eixos paralelos: $I = Md^2 + I_{CM}$
Expansão em série de Taylor:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} \Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0} (\Delta x)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\left.\frac{d^nf(x)}{dx^n}\right|_{x=x_0} (\Delta x)^n + \ldots$$

com $\Delta x = x - x_0$.

QUESTÃO DISCURSIVA

(a) Quando o ventilador está ligado, o pêndulo está em equilíbrio formando um ângulo θ_0 com a vertical. Nessa situação, o ventilador produz uma corrente horizontal de ar, representada pela força $\vec{F}_V$. Como o pêndulo está em repouso, $\vec{F}_A = 0$. As forças que agem no pêndulo aparecem representadas na Fig. 1. Desta figura, a força $\vec{F}_V$ pode ser escrita em termos das componentes

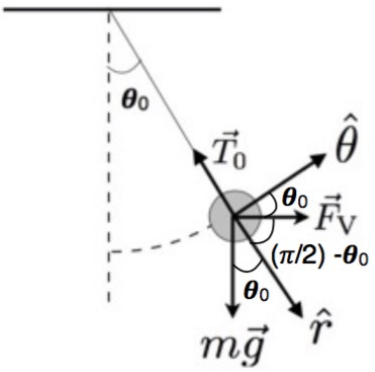


Figure 1: pêndulo no instante inicial, antes de desligar o ventilador.

ao longo das direções $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$

$$\vec{F}_V = F_V[\text{sen}\theta_0\,\hat{r} + \cos\theta_0\,\hat{\theta}], \tag{1}$$

com $F_V = |\vec{F}_V|$. Do item (a), no instante inicial $\theta(t) = \theta_0$, $\vec{T} = \vec{T}_0 = -T_0\hat{r}$ $[T_0 = |\vec{T}_0|]$ e

$$\vec{P} = mg[\cos\theta_0\hat{r} - \text{sen}\theta_0\hat{\theta}]. \tag{2}$$

A segunda lei de Newton estabelece nesta situação

$$\vec{T}_0 + \vec{P} + \vec{F}_V = 0, \tag{3}$$

obtendo assim

$$\text{componente } \hat{r} : -T_0 + mg\cos\theta_0 + F_V\,\text{sen}\theta_0 = 0, \tag{4}$$

$$\text{componente } \hat{\theta} : -mg\,\text{sen}\theta_0 + F_V\cos\theta_0 = 0. \tag{5}$$

Da Eq. (5), obtemos

$$F_V = mg\,\text{tg}\theta_0. \tag{6}$$

Para $|\theta| << \pi/2$, $tg\theta_0 \simeq \text{sen}\theta_0 \simeq \theta_0$ e

$$F_V \simeq mg\,\theta_0. \tag{7}$$

(b)

- **MÉTODO 1: Segunda Lei de Newton**

Seja o pêndulo da Fig. 2, formado por uma corda de comprimento L (de massa desprezível) e uma bolinha de massa m. Quando o ventilador é desligado, a força $\vec{F}_V$ deixa de agir no pêndulo, e o pêndulo começa o seu movimento. Assim, o pêndulo é largado do repouso formando um ângulo θ_0 com a vertical. Considere um instante de tempo t onde o pêndulo forma um ângulo θ com a vertical (sendo $0 < \theta < \pi/2$) como mostrado na Fig. 2. Nesse instante de tempo, as forças que agem no pêndulo são a tensão $\vec{T}$, o peso $\vec{P} = m\vec{g}$ e a força de arrasto do ar $\vec{F}_A = -\rho\vec{v}$, com $\vec{v}$ a velocidade do pêndulo e ρ uma constante positiva ($\rho > 0$). Usando os vetores $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$, podemos expressar os vetores

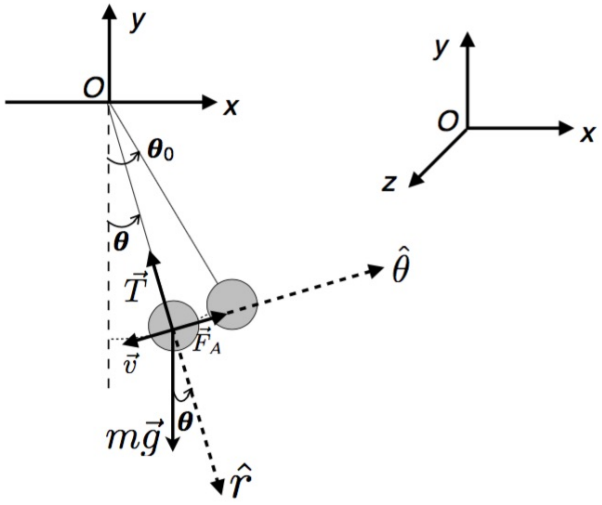


Figure 2: pêndulo liberado da posição θ_0.

posição, velocidade e aceleração para o pêndulo quando este forma um ângulo θ com a vertical. Considerando o sistema de coordenadas xy da Fig. 2 temos

$$\vec{r} = L[\text{sen}\theta\ \hat{i} - \cos\theta\ \hat{j}] = L\hat{r}, \tag{8}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = L\dot{\theta}[\cos\theta\ \hat{i} + \text{sen}\theta\ \hat{j}] = L\dot{\theta}\hat{\theta}, \tag{9}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = L\ddot{\theta}\hat{\theta} + L\dot{\theta}\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -L\dot{\theta}^2\hat{r} + L\ddot{\theta}\hat{\theta}, \tag{10}$$

onde $\hat{r} = \text{sen}\theta\ \hat{i} - \cos\theta\ \hat{j}$ é um vetor unitário na direção radial e $\hat{\theta} = \cos\theta\ \hat{i} + \text{sen}\theta\ \hat{j}$ é um vetor unitário perpendicular à $\hat{r}$, como mostrado na Fig. 2. Também temos usado

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\dot{\theta}[\text{sen}\theta\ \hat{i} - \cos\theta\ \hat{j}] = -\dot{\theta}\hat{r}. \tag{11}$$

Da Fig. 2 vemos que o ângulo θ diminui com o tempo até que o pêndulo chega à posição vertical, portanto, $\dot{\theta} < 0$. Assim, o vetor velocidade $\vec{v}$ tem sentido $-\hat{\theta}$ enquanto a força de arrasto $\vec{F}_A = -\rho\vec{v}$ tem sentido $\hat{\theta}$, como indicado na Fig. 2.

As forças podem ser escritas como

$$\vec{T} = -T\hat{r}, \tag{12}$$

$$\vec{P} = mg[\cos\theta\hat{r} - \text{sen}\theta\hat{\theta}], \tag{13}$$

$$\vec{F}_A = -\rho\vec{v} = -L\rho\dot{\theta}\hat{\theta}, \tag{14}$$

com $T = |\vec{T}|$ e $g = |\vec{g}|$. Da segunda Lei de Newton

$$\vec{T} + \vec{P} + \vec{F}_A = m\vec{a}, \tag{15}$$

obtendo assim

$$\text{componente } \hat{r} : -T + mg\cos\theta = -mL\dot{\theta}^2, \tag{16}$$

$$\text{componente } \hat{\theta} : -mg\text{sen}\theta - \rho L\dot{\theta} = mL\ddot{\theta}. \tag{17}$$

A segunda equação pode ser reescrita como

$$\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + \omega_0^2\text{sen}\theta = 0, \tag{18}$$

com $\gamma = \rho/m$ e $\omega_0^2 = g/L$.

- **MÉTODO 2: Lei da rotação**

Podemos considerar o pêndulo como um sólido rígido que gira em torno de um eixo que passa pelo ponto O (eixo z da Fig. 2). Neste caso, a torsão resultante em relação a O, $\vec{\tau}_O$, está relacionada com a aceleração angular do pêndulo, $\vec{\alpha}$, através de

$$\vec{\tau}_O = I_O\vec{\alpha}, \tag{19}$$

com I_O o momento de inércia em relação ao eixo que passa por O. Como a bolinha do pêndulo é considerada como uma massa pontual m situada a uma distância L do ponto O, temos que $I_O = mL^2$.

As únicas forças que fazem uma torsão em relação ao ponto O são a força peso, $\vec{P}$, e a força de arrasto, $\vec{F}_A$, já que a tensão $\vec{T}$ tem a mesma direção que o vetor de posição da bolinha em relação ao ponto O. Assim, as torsões da força peso, $\vec{\tau}_{P,O}$, e força de arrasto, $\vec{\tau}_{A,O}$, em relação a O, são

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_{P,O} &= \vec{r} \times [m\vec{g}] = [L\hat{r}] \times [mg\cos\theta\,\hat{r} - mg\,\mathrm{sen}\theta\hat{\theta}] \\ &= -mLg\,\mathrm{sen}\theta\hat{k}, \qquad (20)\end{aligned}$$

$$\vec{\tau}_{A,O} = \vec{r} \times \vec{F}_A = [L\hat{r}] \times [-L\rho\dot{\theta}\hat{\theta}] = -L^2\rho\dot{\theta}\hat{k}, \qquad (21)$$

onde $\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{k}$. Assim, o torque resultante em relação a O é

$$\vec{\tau}_O = \vec{\tau}_{P,O} + \vec{\tau}_{A,O} = [-mLg\,\mathrm{sen}\theta - L^2\rho\dot{\theta}]\hat{k}. \qquad (22)$$

Da Fig. 2, o pêndulo gira no sentido horário, portanto, o vetor velocidade angular $\vec{\omega}$ tem que estar dirigido na direção $-\hat{k}$. Como $\dot{\theta}$ é negativo para $0 < \theta < \pi/2$, temos que

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{k}. \qquad (23)$$

Assim, a aceleração angular $\vec{\alpha}$ é

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \ddot{\theta}\hat{k}. \qquad (24)$$

Substituindo as Eqs. (22) e (24) na Eq. (19) obtemos

$$-mLg\,\mathrm{sen}\theta - L^2\rho\dot{\theta} = mL^2\ddot{\theta}, \qquad (25)$$

ou, equivalentemente

$$\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + \omega_0^2\mathrm{sen}\theta = 0, \qquad (26)$$

com $\gamma = \rho/m$ e $\omega_0^2 = g/L$. Obtemos assim a mesma equação que no Método 1.

- **MÉTODO 3: Teorema Trabalho-Energia**

Consideremos como sistema todos os elementos que aparecem na Fig. 2 mais a Terra. Nesse sistema, não temos nenhuma força externa ao sistema, portanto, o trabalho feito por forças externas é igual a $W_{\mathrm{ext}} = 0$. A tensão $\vec{T}$ não realiza trabalho, pois a cada instante a força é sempre perpendicular à trajetória da partícula. A força de arrasto do ar é uma força não-conservativa e faz um trabalho W_{A}. Pelo teorema trabalho-energia no sistema considerado, temos que

$$W_{\mathrm{ext}} = \Delta E_{\mathrm{mec}} - W_{\mathrm{A}}, \qquad (27)$$

com $\Delta E_{\rm mec}$ a variação da energia mecânica do sistema. Como $W_{\rm ext} = 0$,

$$\Delta E_{\rm mec} = W_{\rm A}. \tag{28}$$

Derivando a Eq. (28) com relação ao tempo, temos

$$\frac{d(\Delta E_{\rm mec})}{dt} = \frac{dW_{\rm A}}{dt} = P_A, \tag{29}$$

onde P_A é a potência associada à força de arrasto. Como $dW_A = \vec{F}_A \cdot d\vec{r}$,

$$P_A = \frac{dW_{\rm A}}{dt} = \vec{F}_A \cdot \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \vec{F}_A \cdot \vec{v} = -L^2\rho\dot{\theta}^2, \tag{30}$$

onde usamos as Eq. (9) e (14).

Consideremos dois instantes de tempo. No primeiro, o instante inicial, o pêndulo forma um ângulo θ_0 com a vertical e tem velocidade nula, portanto, toda a energia mecânica do sistema nesse instante inicial, $E_{\rm mec,i}$, é energia potencial gravitacional. Usando o sistema de coordenadas xy da Fig. 2 e chamando de y_0 a posição do pêndulo no eixo y nesse instante, a energia mecânica é dada por

$$E_{\rm mec,i} = mgy_0 = -mgL\cos\theta_0. \tag{31}$$

No instante em que o pêndulo forma um ângulo θ com a vertical (instante f) o pêndulo tem energia cinética rotacional, T_f, e energia potencial gravitacional, U_f. Assim, a energia mecânica nesse instante, $E_{\rm mec,f}$, é dada pela soma $T_f + U_f$,

$$E_{\rm mec,f} = \frac{1}{2}I_O\vec{\omega}^2 - mgL\cos\theta = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - mgL\cos\theta. \tag{32}$$

Dessa forma,

$$\Delta E_{\rm mec} = E_{\rm mec,f} - E_{\rm mec,i} = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - mgL[\cos\theta - \cos\theta_0]. \tag{33}$$

Pelas Eqs. (33), (30) e (29)

$$mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgL\dot{\theta}\mathrm{sen}\theta = -L^2\rho\dot{\theta}^2, \tag{34}$$

que também pode ser escrita como

$$\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + \omega_0^2\mathrm{sen}\theta = 0, \tag{35}$$

com $\gamma = \rho/m$ e $\omega_0^2 = g/L$. Obtemos assim a mesma equação que no Método 1.

(c) Para $|\theta| << \pi/2$ podemos aproximar $\text{sen}\theta \simeq \theta$. Assim, a Eq. (18) fica

$$\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0, \tag{36}$$

que descreve um movimento harmônico amortecido. Quando o ventilador é desligado, o pêndulo começa um movimento oscilatório cuja amplitude diminui pouco a pouco com o tempo. Temos assim um movimento fracamente amortecido em regime subcrítico. A solução da Eq. (36) é portanto da forma

$$\theta(t) = Ae^{-\gamma t/2}\cos(\omega t + \varphi), \tag{37}$$

onde A e φ são constantes a determinar e $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - (\gamma/2)^2}$ é a freqüência angular da oscilação [não confundir com o vetor $\vec{\omega}$ do item (a)]. Sabemos que o pêndulo parte do repouso formando um ângulo inicial θ_0. Assim, a solução da Eq. (37) deve satisfazer as condições iniciais:

$$\theta(0) = \theta_0, \tag{38}$$

$$\dot{\theta}(0) = 0. \tag{39}$$

Derivando em relação ao tempo a Eq. (37),

$$\dot{\theta} = -\frac{A\gamma}{2}e^{-\gamma t/2}\cos(\omega t + \varphi) - A\omega e^{-\gamma t/2}\text{sen}(\omega t + \varphi). \tag{40}$$

Assim,

$$\theta(0) = 0 \quad \rightarrow \quad A\cos\varphi = \theta_0 \tag{41}$$

$$\dot{\theta}(0) = 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{A\gamma}{2}\cos\varphi - A\omega\,\text{sen}\varphi = 0. \tag{42}$$

Ou

$$A\cos\varphi = \theta_0 \tag{43}$$

$$\frac{\gamma}{2}\cos\varphi = -\omega\,\text{sen}\varphi. \tag{44}$$

Da Eq. (43), como A e θ_0 são números positivos, o $\cos\varphi > 0$. Portanto, pela Eq. (44), como γ e ω são números positivos, $\text{sen}\varphi < 0$. Substituindo o valor de ω na Eq. (44) e elevando ao quadrado, temos

$$\frac{\gamma^2}{4}\cos^2\varphi = \left(\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}\right)\text{sen}^2\varphi \rightarrow \frac{\gamma^2}{4} = \omega_0^2\text{sen}^2\varphi. \tag{45}$$

O que implica

$$\text{sen}\varphi = \pm\frac{\gamma}{2\omega_0}. \tag{46}$$

Como senφ tem que ser negativo para que a Eq. (44) seja satisfeita, a única solução é

$$\text{sen}\varphi = -\frac{\gamma}{2\omega_0}. \tag{47}$$

Também, sabendo que cosφ deve ser positivo, então temos

$$\cos\varphi = +\sqrt{1-\text{sen}^2\varphi} = \sqrt{1-\frac{\gamma^2}{4\omega_0^2}} = \frac{\omega}{\omega_0}. \tag{48}$$

Assim, pela Eq. (43), $A = \theta_0\omega_0/\omega$. Portanto, a solução da equação diferencial é

$$\theta(t) = \frac{\omega_0}{\omega}\theta_0\, e^{-\gamma t/2}\cos(\omega t + \varphi), \tag{49}$$

com sen$\varphi = -\gamma/(2\omega_0)$ e cos$\varphi = \omega/\omega_0$. Também, usando a relação trigonométrica $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \text{sen}a\,\text{sen}b$, podemos escrever a solução como

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\gamma t/2}\left[\cos\omega t + \frac{\gamma}{2\omega}\text{sen}\,\omega t\right]. \tag{50}$$

Observe que o amortecimento produzido pela força de arrasto do ar é suficientemente pequeno para considerarmos $\gamma << \omega_0$. Nessa aproximação $\omega \simeq \omega_0$, cos$\varphi \simeq 1$ e sen$\varphi \simeq 0$ e a solução ficaria como

$$\theta(t) \simeq \theta_0 e^{-\gamma t/2}\cos\omega t. \tag{51}$$

(d) O ventilador ligado produz uma corrente de ar horizontal de velocidade $\vec{u} = u\hat{i}$ [$u = |\vec{u}|$], que é dada pela força $\vec{F}_V$. Esta força faz que o pêndulo, que estava em repouso, comece a se movimentar até formar um ângulo θ_0 com a vertical. Nesse instante, o pêndulo está em repouso, $\vec{v} = 0$. Para que o pêndulo fique em repouso formando um ângulo θ_0, a força de arrasto do ar [gerada como conseqüência do vento produzido pelo ventilador] tem que ter o mesmo módulo e sentido oposto que a força exercida pelo ventilador. Assim

$$\vec{F}_{\text{ar}} = -\vec{F}_V = -mg\,\text{tg}\theta_0\hat{i}. \tag{52}$$

Como o vento produzido pelo ventilador tem velocidade $\vec{u}$,

$$\vec{F}_{\text{ar}} = -\rho\vec{u} = -\rho u\hat{i}. \tag{53}$$

Das Eq. (52) e (53) temos que

$$\rho = m\frac{g}{u}\,\text{tg}\theta_0. \tag{54}$$

Assim

$$\gamma = \frac{\rho}{m} = \frac{g}{u}\,\mathrm{tg}\theta_0. \tag{55}$$

A constante de decaimento $\tau = 1/\gamma$ é portanto

$$\tau = \frac{u}{g\,\mathrm{tg}\theta_0}. \tag{56}$$

Para valores de $\theta_0 << \pi/2$,

$$\tau \simeq \frac{u}{g\,\theta_0}. \tag{57}$$

(e) A amplitude da oscilação é

$$a(t) = Ae^{-\gamma t/2} = \frac{\omega_0}{\omega}\theta_0 e^{-\gamma t/2}. \tag{58}$$

Seja t o instante em que $a(t) = \theta_0/5$. Então

$$\frac{\theta_0}{5} = \frac{\omega_0}{\omega}\theta_0 e^{-\gamma t/2} \quad \rightarrow \quad e^{-\gamma t/2} = \frac{\omega}{5\omega_0}. \tag{59}$$

Aplicando o logaritmo neperiano, obtemos

$$t = -\frac{2}{\gamma}\ln\left(\frac{\omega}{5\omega_0}\right). \tag{60}$$

Como $\omega/\omega_0 < 1$, podemos escrever

$$t = \frac{2}{\gamma}\ln\left(\frac{5\omega_0}{\omega}\right), \tag{61}$$

que é um número positivo. Se aproximarmos $\omega \simeq \omega_0$, chegamos a

$$t \simeq \frac{2}{\gamma}\ln(5). \tag{62}$$