NUSP:

⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪
①	①	①	①	①	①	①	①
②	②	②	②	②	②	②	②
③	③	③	③	③	③	③	③
④	④	④	④	④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤
⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

*Instruções: preencha **completamente** os círculos com os dígitos do seu número USP (um em cada coluna); na parte de baixo dessa folha, preencha **completamente** os círculos com as respostas corretas correspondentes a cada questão. Use caneta esferográfica preta ou azul. Escreva apenas nas áreas designadas.*

Nome: ....

Assinatura: ....

Turma: ....

Professor:......................................

ESTE ESPAÇO É DE USO EXCLUSIVO DA BANCA DE CORREÇÃO

	1a Avaliação	Revisão
Múltipla-escolha		
Discursiva QD		
Total		

- Esta prova é formada de uma parte objetiva contendo 4 questões de múltipla-escolha (1-4) e uma parte discursiva contendo uma questão (QD).
- A parte objetiva corresponde a um total de 4 pontos e a parte discursiva a 6 pontos.

Marque as respostas das questões de múltipla-escolha

(1) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

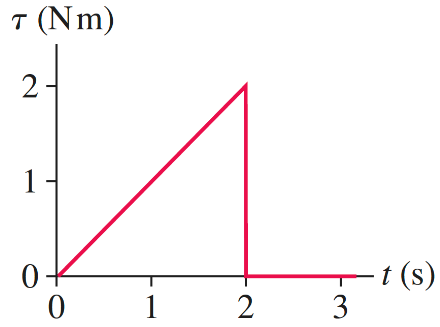
(2) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

(3) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

(4) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

QUESTÕES DE MÚLTIPLA-ESCOLHA (1-4)

(1) [(1,0 pt)] Um objeto tem momento de inércia com respeito ao seu eixo de simetria de $4,0$ kg m^2 e está sujeito a um torque paralelo ao eixo de simetria e com respeito a um ponto sobre este eixo. A magnitude do torque é mostrada no gráfico. Se o objeto está inicialmente em repouso, a magnitude da velocidade angular do objeto em $t = 3$ s é:



- [ ] *(a)* $\frac{3}{4}$ rad/s.
- [ ] *(b)* 1 rad/s.
- [ ] *(c)* impossível de terminar, pois o torque depende da distância do ponto de aplicação da força ao eixo de rotação e da magnitude da força.
- [ ] *(d)* $\frac{1}{2}$ rad/s.
- [ ] *(e)* $\frac{9}{8}$ rad/s.

SOLUÇÃO

Tomando z como pararelo ao eixo de simetria, temos que ao longo deste eixo

$$\tau\,\hat{z} = \frac{dL}{dt}\,\hat{z} = \frac{d}{dt}(I\omega)\hat{z} = I\frac{d\omega}{dt}\hat{z},$$

então, do gráfico temos que para $0 < t < 2$ s,

$$\tau = C\,t = I\frac{d\omega}{dt} \quad\Longrightarrow\quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\tau}{I} \quad\Longrightarrow\quad \omega(t) = \frac{C}{2I}t^2 + D,$$

onde $C = 1$ N m/s e $D = 0$, pois $\omega(t = 0) = 0$ rad/s. Sendo assim, $\omega(t = 3\text{ s}) = \omega(t = 2\text{ s}) = \frac{1}{2}$ rad/s.

(2) [(1,0 pt)] Uma partícula que pode-se mover livremente ao longo do eixo x tem uma energia potencial da forma

$$U(x) = \beta[1 - e^{-x^2}],$$

onde $-\alpha \leqslant x \leqslant \alpha$ e α e β são constantes positivas. Pode-se dizer que:

- ☐ *(a)* Nenhuma das opções é certa.
- ☐ *(b)* Existem vários pontos de equilibrio estável.
- ☐ *(c)* Para qualquer valor finito não nulo de x, existe uma força que faz que a partícula fique cada vez mais distante de $x = 0$.
- ☐ *(d)* Se a energia mecânica total é $\beta/2$, a energia cinética é mínima em $x = 0$.
- ☐ *(e)* $x = 0$ é um ponto de equilíbrio instável.

SOLUÇÃO

Como $\frac{dU}{dx} = 2\beta x\, e^{-x^2}$ e $-\alpha \leqslant x \leqslant \alpha$, o único ponto onde a derivada é zero é em $x = 0$. Somente $x = 0$ pode ser um ponto de equlíbrio, estável ou instável. Em particular

$$\frac{d^2U}{dx^2} = 2\beta(1 - 2x^2)e^{-x^2}$$

e em $x = 0$ a derivada segunda é positiva e tem valor 2β. Assim $x = 0$ é um ponto de equilb́rio estável. Como

$$\vec{F} = -\frac{dU}{dx}\hat{\imath} = -2\beta x e^{-x^2}\hat{\imath}$$

existe uma força restauradora que faz que a partícula volte para $x = 0$. Como $x = 0$ é a única posição de equilibrio estável (mínimo de potencial), a energia cinética é máxima em $x = 0$ para manter constante a energia mecânica.

(3) [(1,0 pt)] Num referencial inercial S munido de um sistema de coordenadas cartesianas, um corpo de massa m com velocidade inicial $\vec{v}_0 = v_0\hat{\imath}$ colide com um corpo de massa M inicialmente em repouso. O corpo de massa M passa então a se movimentar com velocidade $\vec{V} = V_x\hat{\imath} + V_y\hat{\jmath}$. A partir desta descrição podemos afirmar que o corpo de massa m possuirá uma velocidade final na forma:

- ☐ *(a)* $\vec{v} = \left(\frac{M}{m}V_x - v_0\right)\hat{\imath} - \frac{M}{m}V_y\hat{\jmath}$
- ☐ *(b)* $\vec{v} = \left(v_0 + \frac{M}{m}V_x\right)\hat{\imath} + \frac{M}{m}V_y\hat{\jmath}$
- ☐ *(c)* $\vec{v} = \left(v_0 - \frac{M}{m}V_x\right)\hat{\imath} + \frac{M}{m}V_y\hat{\jmath}$
- ☐ *(d)* $\vec{v} = \left(v_0 + \frac{M}{m}V_x\right)\hat{\imath} - \frac{M}{m}V_y\hat{\jmath}$
- ☐ *(e)* $\vec{v} = \left(v_0 - \frac{M}{m}V_x\right)\hat{\imath} - \frac{M}{m}V_y\hat{\jmath}$

SOLUÇÃO

Por aplicação direta de conservação de momento linear ao sistema formado pelos corpos de massa m e M, temos

$$\vec{p}_i + \underbrace{\vec{P}_i}_{\vec{0}} = \vec{p}_f + \vec{P}_f \quad \Longrightarrow \quad \vec{p}_f = \vec{p}_i - \vec{P}_f \quad \Longrightarrow m\vec{v} = m\vec{v}_0 - M\vec{V}$$

Logo

$$\vec{v} = \left(v_0 - \frac{M}{m}V_x\right)\hat{\imath} - \frac{M}{m}V_y\hat{\jmath}$$

(4) **[**(1,0 pt)**]** Um foguete no espaço sideral (i.e., livre) queima seu combustível a uma taxa constante de 24 kg/s, expelindo-o a uma velocidade, também constante, de 350 m/s com respeito ao foguete. Sua massa inicial é de 800 kg. No momento em que sua massa atingir 400 kg, a magnitude da aceleração do foguete será:

- ☐ *(a)* $a = 21$ m/s^2
- ☐ *(b)* $a = 11$ m/s^2
- ☐ *(c)* $a = 10$ m/s^2
- ☐ *(d)* $a = 175$ m/s^2
- ☐ *(e)* $a = 0$ m/s^2 (velocidade constante)

SOLUÇÃO

A aplicação de conservação do momento linear ao sistema foguete+gás expelido, leva a equação do foguete que relaciona a magnitude de sua velocidade v à sua massa m, ambas funções do tempo t

$$v = v_0 + v_{ex}\ln\left(\frac{m_0}{m}\right) = v_0 - v_{ex}\ln\left(\frac{m}{m_0}\right),$$

onde m_0 é a massa inicial do foguete (quando sua velocidade tem magnitude v_0) e v_{ex} é a magnitude da velocidade relativa (medida com respeito ao foguete) dos gases de exaustão. Derivando ambos os lados da equação do foguete com respeito ao tempo, temos:

$$\frac{dv}{dt} = a = -v_{ex}\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{m}{m_0}\right) = -v_{ex}\left[\frac{d}{dm}\ln\left(\frac{m}{m_0}\right)\right]\frac{dm}{dt},$$

onde a regra da cadeia foi usada na última passagem. Logo

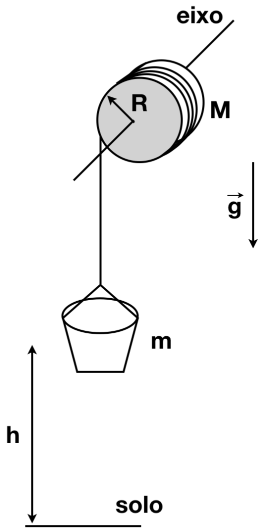
$$a = -\frac{v_{ex}}{m}\frac{dm}{dt} = -\frac{(350 \text{ m/s})}{400 \text{ kg}}(-24 \text{ kg/s}) = 21 \text{ m/s}^2.$$

Perceba que $\frac{dm}{dt} < 0$, já que o foguete perde massa a uma taxa constante.

QUESTÃO DISCURSIVA

ATENÇÃO: A solução dessas questões deve ser feita no caderno de provas devidamente identificado com nome, NUSP e turma.

[(QD) (6,0 pt)] Um balde pequeno de massa m está preso a uma corda de massa desprezível que, por sua vez, encontra-se enrolada em torno de uma roldana cilíndrica de massa M e raio R como mostrado na figura. A roldana gira em torno de seu eixo de simetria. O balde é liberado a partir do repouso de uma altura h do solo. No movimento que se segue, a corda se desenrola do cilindro sem deslizamento.



(a) (1.0) Adote um sistema de coordenadas, esboce o diagrama de forças para o balde e para a roldana e escreva todas as forças explicitamente no sistema de coordenadas adotado.

(b) (1.0) Baseado nas forças identificadas em (a), escreva as equações de movimento para o balde e para a roldana.

(c) (2.0) Determine o vetor aceleração do CM do balde. Calcule a magnitude dessa aceleração para os casos extremos em que $m/M \ll 1$ e $m/M \gg 1$.

(d) (1.0) Determine a velocidade com que o CM do balde atinje o chão. Considere o balde como uma partícula pontual.

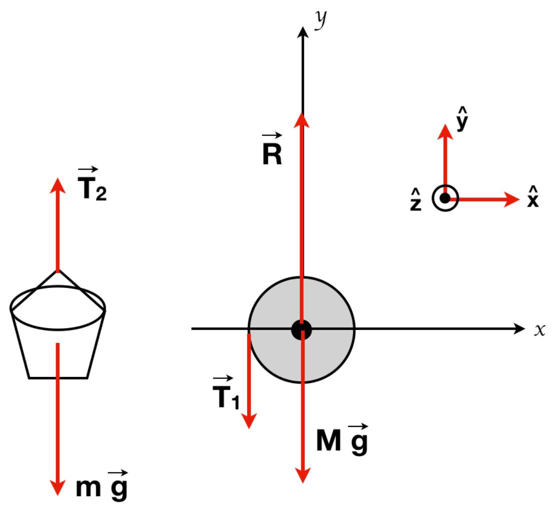
(e) (1.0) Verifique explicitamente a validade do teorema do trabalho-energia cinética para o sistema “balde+roldana+corda”.

FORMULÁRIO

- $\frac{d}{dx}[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1}\frac{df}{dx}$.
- $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$
  - $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$ (cilindro)
  - $I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2$ (esfera)
  - $I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2$ (barra delgada)
  - $I_{CM} = MR^2$ (anel delgado)

GABARITO

(a) (1.0) As forças que atuam sobre o balde são o peso $m\vec{g}$ e a tensão aplicada pela corda sobre a alça do balde $\vec{T}$. Sobre a roldana cilíndrica agem o peso da roldana, aplicada ao centro de massa, a reação do eixo $\vec{N}$ aplicada também ao CM da roldana e a tensão aplicada pela corda a um ponto da periferia do cilindro:



No sistema de coordenadas cartesiano adotado, podemos escrever (para $T = ||\vec{T}_1|| = ||\vec{T}_2||$):

$$\begin{aligned} M\vec{g} &= -Mg\,\hat{y} \\ \vec{N} &= R\hat{y} = (Mg+T)\,\hat{y} \\ \vec{T}_1 &= -T\,\hat{y} \\ m\vec{g} &= -mg\,\vec{y} \\ \vec{T}_2 &= T\,\hat{y} \end{aligned}$$

(b) (1.0) O movimento do CM do balde satisfaz a 2a lei de Newton na forma:

$$\vec{F}_{ext} = m\vec{g} + \vec{T}_2 = -mg\hat{y} + T\,\hat{y} = m\vec{a} = ma\,\hat{y} \quad (1)$$

Para a roldana temos que o CM está em repouso, logo:

$$\vec{N} + M\vec{g} + \vec{T}_1 = \vec{0} \Longrightarrow (N - Mg - T)\,\hat{y} = \vec{0} \quad (2)$$

e para a rotação em torno do eixo:

$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}_{CM}}{dt}$$

com

$$\vec{\tau}_{ext} = \vec{\tau}_N + \vec{\tau}_{Mg} + \vec{\tau}_T = \vec{\tau}_T = (-R\,\hat{x}) \times (-T\,\hat{y}) = RT\,\hat{z},$$

já que o peso da roldana e a reção $\vec{N}$ estão aplicadas no CM da roldana. Ao girar em torno do eixo da figura, a roldana possui momento angular $\vec{L}_{CM}$:

$$\vec{L}_{CM} = I_{CM}\vec{\omega} = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\omega\,\hat{z}$$

Tem-se então

$$RT\,\hat{z} = \frac{1}{2}MR^2\frac{d\omega}{dt}\,\hat{z} \quad (3)$$

(c) (2.0) Usando a condição de rolamento sem deslizamento e o fato de que a velocidade do CM do balde $\vec{v}_{CM}$ é a mesma do ponto mais à esquerda da periferia da roldana, podemos escrever:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{\omega}\times\vec{r}] = \frac{d}{dt}[\omega\,\hat{z}\times(-R\,\hat{x})] = -R\frac{d\omega}{dt}\,\hat{y} = a\,\hat{y}.$$

Logo

$$T = \frac{1}{2}MR\frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{2}Ma$$

Substituindo esta última equação em (1), obtemos para o vetor aceleração do CM do balde

$$\vec{a} = -\frac{g}{1+\frac{M}{2m}}\,\hat{y}$$

Veja que no limite $m \gg M$, $\vec{a} \simeq \vec{g}$, ou seja, o balde cai com uma aceleração muito próxima da aceleração gravitacional local. Enquanto no limite de roldana muito pessada, $M \gg m$, a aceleração vai a zero $\vec{a} \simeq \vec{0}$.

(d) (1.0) A velocidade com que o CM do balde atinje o chão é dada por

$$\vec{v} = -\sqrt{2ah}\,\hat{y} = \left[\left(\frac{g}{2+\frac{M}{m}}\right)gh\right]^{1/2}\,\hat{y}$$

(e) (1.0) A variação de energia cinética durante a queda é

$$\begin{aligned}\Delta K &= K_f - K_i = K_f = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega_f^2 = mah + \frac{1}{4}MR^2\left(\frac{v^2}{R^2}\right)\\ &= mah + \frac{1}{2}Mah = mh\left(1+\frac{M}{2m}\right)a = mgh\end{aligned}$$

O trabalho total realizado sobre o sistema balde+roldana+corda é o da força peso do balde:

$$W = \int_i^f m\vec{g}\cdot d\vec{r} = \int_i^f(-mg\,\hat{y})\cdot(dy\,\hat{y}) = -mg\int_h^0 dy = mgh > 0,$$

já que a força está na mesma direção e sentido do deslocamento durante a queda.

Veja que a variação da energia cinética do sistema durante a queda é igual ao trabalho realizado pela força peso do balde, como era de se esperar do teorema do trabalho-energia cinética.