NUSP:

⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪
①	①	①	①	①	①	①	①
②	②	②	②	②	②	②	②
③	③	③	③	③	③	③	③
④	④	④	④	④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤
⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

*Instruções: preencha **completamente** os círculos com os dígitos do seu número USP (um em cada coluna); na parte de baixo dessa folha, preencha **completamente** os círculos com as respostas corretas correspondentes a cada questão. Use caneta esferográfica preta ou azul. Escreva apenas nas áreas designadas.*

Nome: ....

Assinatura: ....

Turma: ....

Professor: ....

ESTE ESPAÇO É DE USO EXCLUSIVO DA BANCA DE CORREÇÃO

	1a Avaliação	Revisão
Múltipla-escolha		
Discursiva QD		
Total		

- Esta prova é formada de uma parte objetiva contendo 4 questões de múltipla-escolha (1-4) e uma parte discursiva contendo uma questão (QD).
- A parte objetiva corresponde a um total de 4 pontos e a parte discursiva a 6 pontos.

Marque as respostas das questões de múltipla-escolha

(1) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

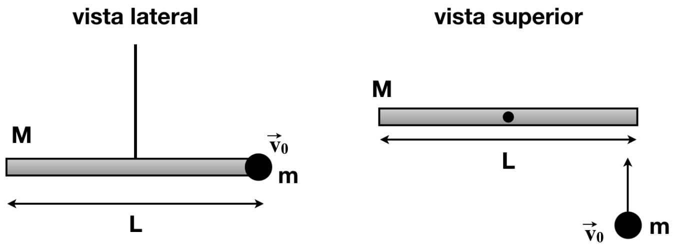
(2) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

(3) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

(4) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

QUESTÕES DE MÚLTIPLA-ESCOLHA (1-5)

(1) [(1,0 pt)] Uma haste, muito fina e homogênea, de massa M e comprimento L está inicialmente parada, suspensa por um fio que passa pela metade da barra (considere o fio inextensivel e de massa despreziavel). Um projétil de massa m é lançado, com velocidade $\vec{v}_0$ perpendicular à barra contra um dos seus extremos, de forma que o projétil permanece cravado na barra e o sistema começa a girar num plano perpendicular ao eixo do fio. Nestas condições, o módulo da velocidade angular (ω) será dado por:



- ☐ (a) $\omega = \dfrac{6mv_0}{L(M+3m)}$
- ☐ (b) $\omega = \dfrac{6mv_0}{L(M+m)}$
- ☐ (c) $\omega = \dfrac{2mv_0}{L(3M+m)}$
- ☐ (d) $\omega = \dfrac{mv_0}{L(M+3m)}$
- ☐ (e) $\omega = \dfrac{mv_0}{L(3M+m)}$

Resposta: [Ex1E: A] — [6FEx: A] — [G277: A] — [1x6y: E]

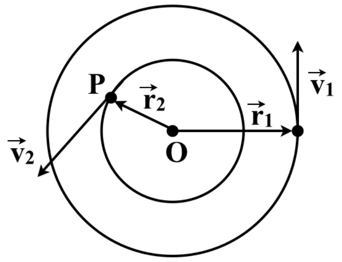
SOLUÇÃO

No impacto, as forças que surgem entre haste e projétil são de natureza interna e, portanto, exercem torque resultante nulo sobre o sistema. No início da rotação pode-se desprezar o torque devido à torção do fio. Dessa forma, tomando o eixo z como sendo aquele alinhado com o fio e apontando para cima (i.e., saindo da folha na vist superior):

$$\vec{L}_i = \frac{L}{2}mv_0\hat{z} = \vec{L}_f = I_{tot}\vec{\omega} \quad \text{com} \quad I_{tot} = \frac{ML^2}{12} + m\frac{L^2}{4} \Longrightarrow \omega = |\vec{\omega}| = \frac{mv_0L}{2I_{tot}} = \frac{6mv_0}{L(M+3m)},$$

onde usou-se o teorema dos eixos paralelos no cálculo do momento de inércia I_{tot} do sistema haste+projétil com respeito a um eixo alinhado com o fim e passando pelo centro da haste. Os momentos angulares inicial e final acima estão calculados com respeito ao centro da haste.

(2) [(1,0 pt)] Um ponto material P, com massa m, esta amarrado com uma corda inextensível a uma haste vertical fina, posicionada no ponto O. A haste gira e produz uma trajetória circular do ponto P, com raio inicial r_1, velocidade inicial $\vec{v}_1$ e velocidade angular $\vec{\omega}_1$. Apos algum tempo, a corda foi envolta em torno da haste e o raio da própria trajetória é reduzido para um valor final r_2. Podemos afirmar, em relacao às magnitudes da velocidade final (v_2) e da velocidade angular final (ω_2) de P, que:



- ☐ *(a)* $v_2 > v_1$ e $\omega_2 < \omega_1$
- ☐ *(b)* ~~a) e c) sao corretas~~
- ☐ *(c)* Nenhuma é correta
- ☐ *(d)* $v_2 < v_1, \omega_2 < \omega_1$
- ☐ *(e)* $v_2 > v_1$ e $\omega_2 > \omega_1$

Resposta: [Ex1E: E] — [6FEx: B] — [G277: A] — [1x6y: C]

SOLUÇÃO

Apenas a tensão $\vec{T}$ atua no ponto material P da corda; Uma vez que a força tem a direção e sentido de $-\overrightarrow{OP}$, o torque $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{T}$ em relação ao centro O da trajetória é nulo. Portanto, o momento angular com respeito a este ponto permanece constante durante o movimento. Como a haste é fina, é razoável supor que cada volta de P em torno de O possa ser aproximada por um movimento circular uniforme. Usando:

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times m\vec{v} = mr^2\vec{\omega}$$

pode-se escrever para as magnitudes de $\vec{L}_O$ nos instantes em que as velocidades são $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$:

$$mr_1v_1 = mr_2v_2$$

e

$$v_2 = \frac{r_1}{r_2}v_1$$

Posto que $r_2 < r_1$, segue que : $v_2 > v_1$. Por outro lado, num M.C.U

$$v_1 = \omega_1 \, r_1$$

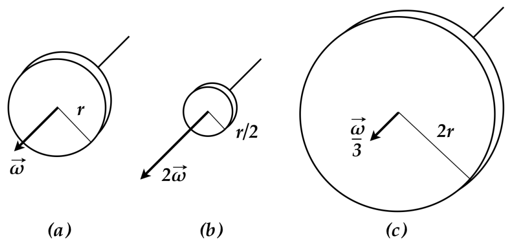
$$v_2 = \omega_2 \, r_2$$

Dividindo estas equações e usando a solução anterior, se chega a:

$$\omega_2 = \omega_1(r_1/r_2)^2$$

Dado que $r_2 < r_1$, segue que $\omega_2 > \omega_1$.

(3) [(1,0 pt)] A figura mostra três discos homogêneos e feitos do mesmo material em rotação em torno de seus eixos de simetria. O ordenamento correto das energias rotacionais dos discos é:



- ☐ *(a)* $K_a < K_b < K_c$
- ☐ *(b)* $K_c < K_b = K_a$
- ☐ *(c)* $K_a = K_b < K_c$
- ☐ *(d)* $K_b < K_a < K_c$
- ☐ *(e)* $K_c < K_a < K_b$

Resposta: [Ex1E: D] — [6FEx: D] — [G277: E] — [1x6y: C]

SOLUÇÃO

A energia cinética de rotação neste caso é dada por

$$K = \frac{1}{2} I_{CM}\omega^2,$$

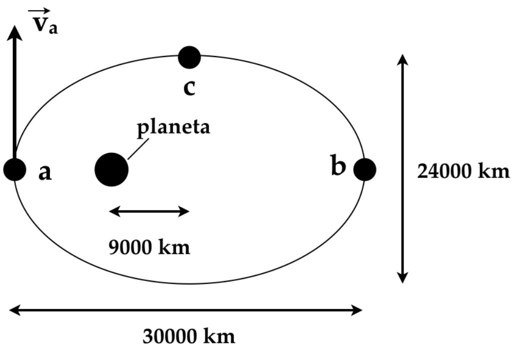
O o momento de inércia de um disco de raio r e mass m com respeito a um eixo passando pelo CM do disco e perpendicular à face circular é $I = \frac{1}{2}mr^2$. Se a densidade do disco é ρ e a altura h, podemos escrever

$$\begin{aligned} K_a &= \frac{1}{2} I_a\omega_a^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\rho\pi r^2 h r^2\right)\omega^2 = \frac{1}{4}\pi\rho h r^4 \\ K_b &= \frac{1}{2} I_b\omega_b^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\rho\pi \frac{r^2}{4} h \frac{r^2}{4}\right)4\omega^2 = \frac{1}{16}\pi\rho h r^4 \\ K_c &= \frac{1}{2} I_c\omega_c^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\rho\pi 4r^2 h 4r^2\right)\frac{\omega^2}{9} = \frac{4}{9}\pi\rho h r^4 \end{aligned}$$

Logo

$$K_b < K_a < K_b$$

(4) [(1,0 pt)] Um satélite segue a órbita elíptica da figura abaixo. A única força sobre o satélite é a atração gravitacional do planeta. A massa do satélite pode ser tomada como sendo completamente desprezível comparada àquela do planeta. A magnitude da velocidade do satélite no ponto a é 8000 m/s. A magnitude da velocidade do satélite no ponto b é:

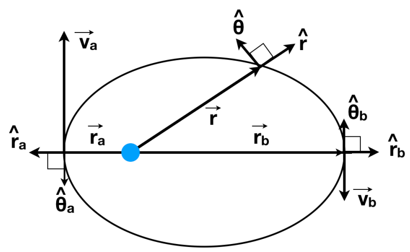


- ☐ *(a)* impossível de determinar sem que as massas do planeta e do satélite sejam fornecidas.
- ☐ *(b)* 8000 m/s, já que o trabalho realizado pela força gravitacional sobre o satélite é nulo.
- ☐ *(c)* 8000 m/s, por conservação de momento linear do sistema satélite-planeta.
- ☐ *(d)* 2000 m/s, devido à conservação de momento angular do satélite.
- ☐ *(e)* maior que v_a, já que a velocidade angular do satélite é constante e $r_b > r_a$.

Resposta: [Ex1E: D] — [6FEx: A] — [G277: C] — [1x6y: D]

SOLUÇÃO

Tomando como sistema aquele formado pelo satélite, a força externa resultante é de natureza gravitacional e aponta ao longo da linha que une os centros de massas do planeta e do satélite, portanto, está alinhada ao vetor posição do satélite. Nestas condições, o torque externo resultante é nulo e, portanto, o momento angular total do sistema é constante:



$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{ext} = \vec{r} \times \vec{F} = r\,\hat{r} \times \left(-\frac{GMm}{r^2}\hat{r}\right) = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{L} = \text{cte}.$$

Logo,

$$\vec{L}_a = \vec{L}_c \Longrightarrow r_a\,\hat{r}_a \times (-mv_a\hat{\theta}_a) = r_b\,\hat{r}_b \times (-mv_b\hat{\theta}_b) \Longrightarrow mv_a\,r_a\hat{z} = mv_b\,r_b\hat{z},$$

onde utilizamos um sistema de coordenadas polares no plano da órbita com o eixo z perpendicular ao plano e sentido dado por $\hat{z} = \hat{r} \times \hat{\theta}$. Então

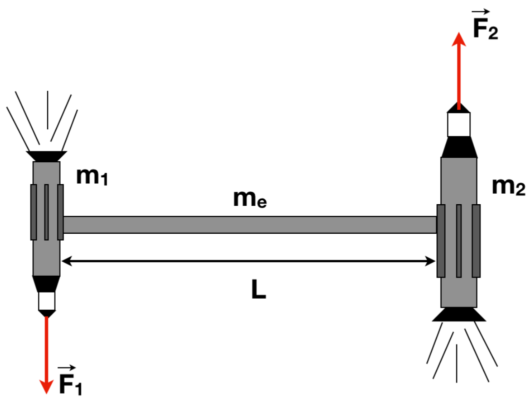
$$v_b = \frac{r_a}{r_b} v_a = \frac{6000\ \mathrm{m}}{24000\ \mathrm{m}} (8000\ \mathrm{m/s}) = 2000\ \mathrm{m/s}.$$

QUESTÃO DISCURSIVA

ATENÇÃO: A solução dessas questões deve ser feita no caderno de provas devidamente identificado com nome, NUSP e turma.

[(QD) (6,0 pt)] No espaço sideral, longe da influência gravitacional de qualquer planeta ou estrela, dois veículos espaciais munidos de fogutes estão acoplados a uma estação espacial longa de $L = 90$ m de comprimento. O sistema todo encontra-se em repouso. A massa de um dos veículos é $m_1 = 100$ toneladas e a do outro $m_2 = 250$ toneladas. A massa da estação espacial é $m_e = 100$ toneladas e esta pode ser considerada como um cilindro delgado homogêneo. Os foguetes são acionados simultaneamente, de forma que a magnitude da força de reação dos gases de exaustão sobre cada veículos (i.e., o empuxo) é de 90000 N e pode ser considerada perpendicular à estação espacial.

Importante: Quando necessário, faça substituições numéricas apenas nas expressões analíticas finais. Quantidades vetoriais devem ser expressas num sistema de coordenadas com uma base apropriada de versores.



(a) (1.0) Calcule a posição do centro de massa CM do sistema "veículos + estação espacial" com respeito à posição do centro de massa da estação espacial. Trate os veículos como massas pontuais.

(b) (1.0) Escreva a equação de movimento para o CM do sistema do ítem (a) num referencial inercial antes e depois do acionamento dos foguetes. Que movimento descreve o CM após o acionamento?

(c) (1.5) Determine o momento de inércia do sistema do ítem (a) com respeito a um eixo passando pelo seu CM e perpendicular ao plano de movimento dos veículos após o acionamento dos foguetes.

(d) (1.5) Determine o vetor torque total com respeito ao CM devido ao empuxo dos foguetes.

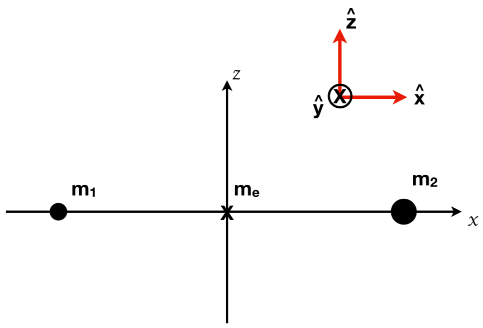
(e) (1.0) Calcule a magnitude da velocidade angular de rotação do sistema 100 s após o acionamento dos motores.

FORMULÁRIO

- $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$ (cilindro)
- $I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2$ (barra)
- $I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2$ (esfera)
- $I_{CM} = MR^2$ (anel)

GABARITO

(a) (1.0) Sistema de coordenadas



No sistema de coordenadas acima, com origem sobre o centro de massa da estação espacial, o CM do sistema encontra-se sobre o eixo-x, com coordenada

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_e x_e}{m_1 + m_2 + m_e} = \frac{(1 \times 10^5)(-45) + (2.5 \times 10^5)(45) + (1 \times 10^5)(0)}{1 \times 10^5 + 2 \times 10^5 + 1 \times 10^5} = 15 \text{ m}.$$

(b) (1.0) Com a definição de sistema adotada aqui, os empuxos gerados pelos foguetes são de natureza interna e, portanto, não podem alterar o estado de movimento do CM. A equação de movimento do CM no referencial S é então

$$\vec{F}_{ext} = (m_1 + m_2 + m_e)\vec{a}_{CM} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{a}_{CM} = \vec{0}$$

Como o CM estava em repouso antes do acionamento dos foguetes, $\vec{v}_{CM} = \vec{0}$ em qualquer instante t.

(c) (1.5) O momento de inercia do sistema com respeito a um eixo passando pelo CM é

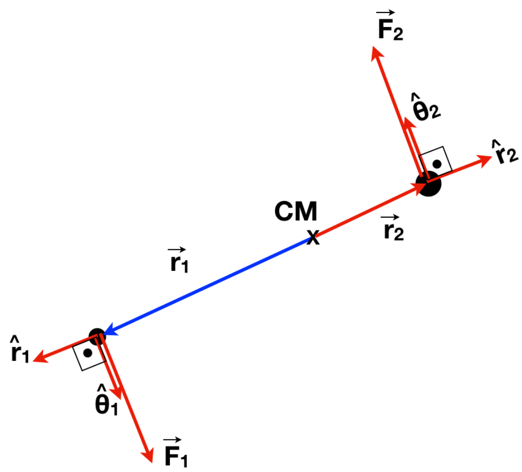
$$I_{CM} = I_1 + I_2 + I_e = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \left(\frac{1}{12} m_e L^2 + m_e d^2\right),$$

onde usou-se o teorema dos eixos paralelos para obter o momento de inércia da estação espacial, de forma que d_e é a distância entre o eixo de rotação e um eixo que passa pelo centro de massa da estação. Logo

$$\begin{aligned} I_{CM} &= (1 \times 10^5)(60^2) + (2.5 \times 10^5)(30^2) + \frac{1}{12}(1 \times 10^5)(90^2) + (1 \times 10^5)(15^2) \\ &= (1 \times 10^5)\left(3600 + 2250 + \frac{2025}{3} + 225\right) = 67.5 \times 10^7 \text{ kg m}^2 \end{aligned}$$

(d) (1.5) O torque com respeito ao CM (ver figura a seguir com a vista superior do plano de movimento) é

$$\vec{\tau}_{CM} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (30\,\hat{r}_1) \times (9 \times 10^4\,\hat{\theta}_1) + (60\,\hat{r}_2) \times (9 \times 10^4\,\hat{\theta}_2) = 81 \times 10^5\,\hat{z} \text{ N m}.$$



(e) (1.0) O vetor aceleração angular do sistema em torno de um eixo passando pelo CM satisfaz

$$\vec{\tau}_{CM} = I_{CM}\vec{\alpha} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\alpha} = \frac{\tau_{CM}}{I_{CM}}\,\hat{z}.$$

Logo, dado que $\omega(0) = 0$, temos

$$\vec{\omega} = \omega\,\hat{z} = \frac{\tau_{CM}}{I_{CM}} t\,\hat{z},$$

de modo que

$$\omega(t = 100 \text{ s}) = \frac{81 \times 10^5}{67.5 \times 10^7}(100) = \frac{6}{5} \text{ rad/s}$$