



NUSP:

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Instruções: preencha **completamente** os círculos com os dígitos do seu número USP (um em cada coluna a partir da esquerda); na parte de baixo dessa folha, preencha **completamente** os círculos com as respostas corretas correspondentes a cada questão. Use caneta esferográfica preta ou azul. Escreva apenas nas áreas designadas.

Nome: .....

Assinatura: .....

Turma: .....

Professor: .....

ESTE ESPAÇO É DE USO EXCLUSIVO DA BANCA DE CORREÇÃO

	1a Avaliação	Revisão
Múltipla-escolha		
Discursiva QD		
Total		

- Esta prova é formada de uma parte objetiva contendo 5 questões de múltipla-escolha (1-5) e uma parte discursiva contendo uma questão (QD).
- A parte objetiva corresponde a um total de 5 pontos e a parte discursiva a 5 pontos.

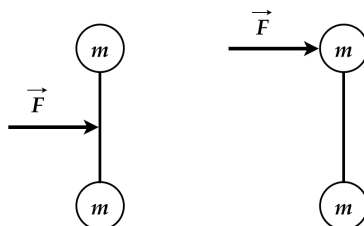
Marque as respostas das questões de múltipla-escolha

- (1) (A) (B) (C) (D) (E)
- (2) (A) (B) (C) (D) (E)
- (3) (A) (B) (C) (D) (E)
- (4) (A) (B) (C) (D) (E)
- (5) (A) (B) (C) (D) (E)



### QUESTÕES DE MÚLTIPLA-ESCOLHA (1-5)

(1) [1,0] Uma força  $\vec{F}$  é aplicada a dois halteres idênticos, cada um formado por duas massas  $m$  separadas por uma barra. A força é aplicada no centro de massa do haltere da esquerda e diretamente sobre uma das massas para o haltere da direita, como mostrado na figura. Se as forças têm mesma magnitude, direção e sentido e são aplicadas durante o mesmo intervalo de tempo  $\Delta t$ , sobre as velocidades finais dos centros de massa (CM) dos halteres, podemos afirmar que:



- (a) como o haltere da direita translada e gira simultaneamente, a velocidade do seu CM só pode ser determinada conhecendo-se o comprimento do haltere.
- (b) o da esquerda atinge a maior velocidade.
- (c) nenhuma das demais alternativas é correta
- (d) os dois halteres adquirem a mesma velocidade.
- (e) o da direita atinge a maior velocidade.

#### SOLUÇÃO:

A equação de movimento para o CM dos halteres é:

$$\vec{F}_R = M \vec{a}_{CM},$$

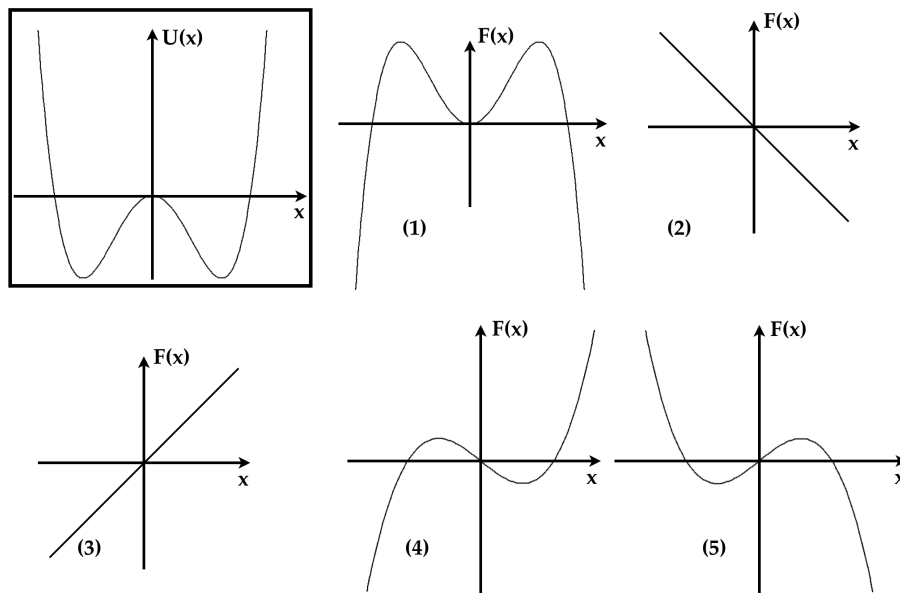
logo, como ambos estão sujeito à mesma força  $\vec{F}$  e possuem a mesma massa  $2m$

$$\vec{F} = 2m \vec{a}_{CM} \implies \vec{a}_{CM} = \frac{\vec{F}}{2m},$$

e a aceleração dos halteres é a mesma. O impulso  $\vec{F}\Delta t$  impresso aos halteres também deve ser o mesmo e igual ao momento final  $\Delta\vec{p}$  dos halteres. Portanto, as velocidades de seus CMs também são iguais:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\Delta\vec{p}}{2m} = \frac{\Delta\vec{p}}{2m}.$$

(2) [1,0] A energia potencial  $U(x)$  de um sistema unidimensional é mostrada abaixo. Dos gráficos (1) a (5), qual aquele que melhor representa um esboço da força unidimensional que age sobre o sistema?



- (a) o gráfico (5)  
 (b) o gráfico (2)  
 (c) o gráfico (1)  
 (d) o gráfico (4)  
 (e) o gráfico (3)

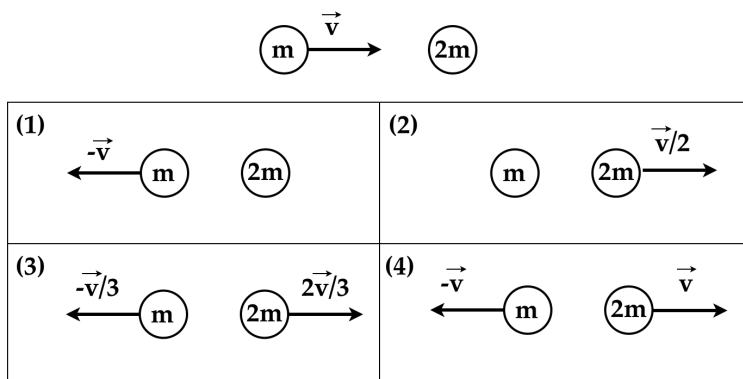
**SOLUÇÃO:**

A força  $F(x)$  pode ser obtida a partir da energia potencial  $U(x)$  através de

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}.$$

Do gráfico da energia potencial, vemos que  $U(x)$  possui 3 extremos (um mínimo local na região  $x < 0$ , um mínimo local em  $x > 0$  e um máximo local em  $x = 0$ ), que devem corresponder então a pontos de equilíbrio e estão associados a zeros de  $F(x)$ . Além disso, de acordo com  $F(x) = -dU/dx$ , na região à esquerda do mínimo em  $x < 0$ , a força deve ser positiva ( $F(x) > 0$ ), já que a inclinação da reta tangente a  $U(x)$  nesta região é negativa. Na região à direita do mínimo em  $x > 0$ , por sua vez, a força deve ser negativa. A mesma análise do sinal da inclinação da reta tangente mostra que entre o mínimo em  $x < 0$  e  $x = 0$ ,  $F(x) < 0$  e entre  $x = 0$  e o mínimo para  $x > 0$ ,  $F(x) > 0$ . Logo, o gráfico que melhor representa  $F(x)$  é o número 5.

(3) [1,0] Qual das situações representadas nos quadros corresponderia ao resultado final de uma colisão elástica unidimensional cuja configuração inicial é mostrada no topo do quadro:



- (a) Somente a situação (4)
- (b) Somente a situação (2)
- (c) Nenhuma das situações
- (d) Somente a situação (1)
- (e) Somente a situação (3)

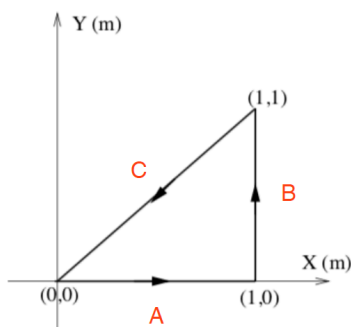
**SOLUÇÃO:**

O momento linear anterior à colisão é  $\vec{p}_i = m\vec{v}$ , com o vetor velocidade como representado no topo do painel. A correspondente energia cinética é  $K_i = \frac{1}{2}mv^2$ . A tabela abaixo mostra o momento linear e energia cinética de cada uma das situações finais dos quadros.

quadro	$\vec{p}_f$	$K_f$
quadro 1	$-m\vec{v}$	$\frac{1}{2}mv^2$
quadro 2	$m\vec{v}$	$\frac{1}{4}mv^2$
quadro 3	$m\vec{v}$	$\frac{1}{2}mv^2$
quadro 4	$m\vec{v}$	$\frac{3}{2}mv^2$

Logo, o quadro que corresponde ao resultado final de uma colisão elástica unidimensional é somente o (3).

(4) [(1,0 pt) | SUB] Os trabalhos realizados pela força  $\vec{F} = y^2 \hat{x} + x^2 \hat{y}$  ao longo dos trechos A, B e C do caminho fechado representado pelo triângulo da figura abaixo são, respectivamente:



- (a) 1 J, 1 J e Nulo.
- (b) Nulo, 1 J e -2/3 J.
- (c) Nenhuma das alternativas.
- (d) -1/3 J, Nulo e 2/3 J.
- (e) Nulo, -1 J e 2/3 J.

**SOLUÇÃO:**

A força  $\vec{F}$  no trecho A que corresponde a  $y = 0$  e  $0 \leq x \leq 1$  é  $\vec{F}_A = x^2 \hat{y}$  e, portanto, perpendicular ao deslocamento ao longo desse caminho. Temos então para o trabalho neste trecho  $W_A = 0$  J.

A força  $\vec{F}$  no trecho B que corresponde a  $x = 1$  e  $0 \leq y \leq 1$  é  $\vec{F}_B = y^2 \hat{x} + 1 \hat{y}$ . Logo, o trabalho é

$$W_B = \int_B \vec{F}_B \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (y^2 \hat{x} + 1 \hat{y}) \cdot d\hat{y} = \int_0^1 dy = 1 \text{ J.}$$

Já a força ao longo do trecho C correspondente a  $x = y$  com  $1 \geq x \geq 0$  é então

$$W_C = \int_C \vec{F}_C \cdot d\vec{r} = \int_1^0 (x^2 \hat{x} + x^2 \hat{y}) \cdot (dx \hat{x} + dx \hat{y}) = 2 \int_1^0 x^2 dx = 2 \frac{x^3}{3} \Big|_1^0 = -\frac{2}{3} \text{ J.}$$

(5) [1,0] Uma caixa de massa  $M$  se encontra apoiada no chão de um elevador que se move em velocidade constante para cima. Qual das seguintes informações é verdadeira?

- (a) Essa é uma situação onde não há energia potencial envolvida, já que a força resultante sobre a caixa é nula e, portanto, não há trabalho realizado.
- (b) A energia cinética da caixa está sendo convertida em energia potencial gravitacional.
- (c) A força normal sobre a caixa realiza trabalho que, por sua vez, representa energia potencial gravitacional da caixa.
- (d) A variação de energia cinética da caixa é numericamente igual àquela dissipada nas engrenagens do elevador.
- (e) A força normal deve ser maior que  $Mg$  para poder vencer a gravidade e gerar energia potencial gravitacional.

**SOLUÇÃO:**

O item (a) é incorreto, já que sabemos que a caixa ganha energia potencial ao se elevar com respeito ao solo.

Os itens (b) e (d) são incorretos, já que não há variação de energia cinética da caixa que sobe a velocidade constante.

O item (e) é incorreto, porque a normal e o peso se cancelam mutuamente para que a caixa suba a velocidade constante.

O item correto é o (c), já que a definição de energia potencial num campo gravitacional é exatamente:

*o trabalho realizado pela força aplicada por um agente externo (neste caso a normal) para levar um corpo (neste caso a caixa) a velocidade constante de um ponto de referência (neste caso o solo) até uma altura  $h$ .*

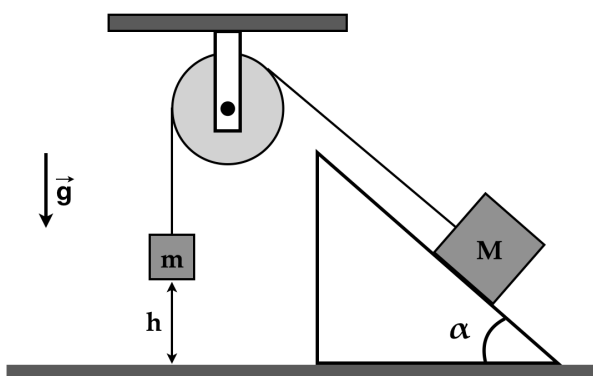
De forma mais explícita, o trabalho realizado pela normal quando a caixa parte do solo e atinge um altura  $h$  a velocidade constante é

$$W = \int \vec{N} \cdot d\vec{r} = \int (-M\vec{g}) \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (Mg \hat{y}) \cdot d\hat{y} = Mg \int_0^h dy = Mgh = U(h).$$

## QUESTÃO DISCURSIVA

**ATENÇÃO:** A solução dessa questão deve ser feita no caderno de provas devidamente identificado com nome, NUSP e turma. É necessário justificar TODOS os passos.

(QD) Um arranjo consiste de uma polia fixa de massa desprezível pela qual passa um fio inextensível, também de massa desprezível, conectando dois blocos de massas  $m$  e  $M$  como mostrado na figura. A polia pode girar sem atrito em torno do eixo de rotação. O bloco de massa  $m$  é inicialmente posicionado a uma altura  $h$  do solo. O bloco de massa  $M$  se apoia num plano inclinado (fixo ao solo) com ângulo de inclinação  $\alpha$ . Os coeficientes de atrito estático e cinético entre as superfícies do bloco e do plano são  $\mu_E$  e  $\mu_C$ , respectivamente.



- (a) [1,0] Esboce os diagramas de força para a polia e para cada um dos blocos.
- (b) [1,0] Adote um sistema de coordenadas e escreva explicitamente todas as forças identificadas no item (a) numa base de versores apropriada.
- (c) [1,0] Determine a condição a ser satisfeita pelo ângulo  $\alpha$  para que o bloco de massa  $M$  suba o plano.
- (d) [1,0] Determine a condição a ser satisfeita pelo ângulo  $\alpha$  para que o bloco de massa  $M$  desça o plano.
- (e) [1,0] Caso a condição para que o bloco suba o plano seja satisfeita, se os blocos partem do repouso na situação da figura, determine os vetores velocidade de cada bloco no instante em que aquele de massa  $m$  atinge o chão. Suponha que neste instante o bloco de massa  $M$  ainda encontra-se sobre o plano inclinado.

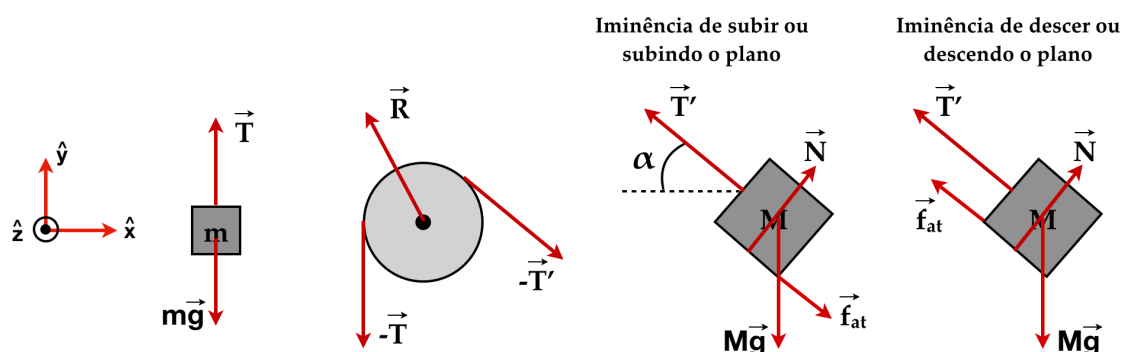
## FORMULÁRIO

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



## GABARITO

- (a) Os diagramas de forças para a polia e para os blocos de massa  $m$  e  $M$  estão representados a seguir para quatro possíveis situações em que o bloco de massa  $M$  está na iminência de subir ou de descer o plano e as situações em que ele sobe ou desce o plano. Uma situação adicional limite seria aquela em que a magnitude da tensão no fio é igual à da componente tangencial ao plano do peso do bloco de massa  $M$ . Nesta situação, a força de atrito é nula.



- (b) Na base de versores do item (a), tomando  $T$  e  $T'$  como as magnitudes das tensões no fio, temos

$$\begin{aligned}
 m \vec{g} &= -mg \hat{y} \\
 M \vec{g} &= -Mg \hat{y} \\
 \vec{T} &= T \hat{y} \\
 \vec{T}' &= -T' \cos \alpha \hat{x} + T' \sin \alpha \hat{y} \\
 \vec{R} &= \vec{T} + \vec{T}' = -T' \cos \alpha \hat{x} + (T + T' \sin \alpha) \hat{y} \\
 \vec{N} &= Mg \cos \alpha \sin \alpha \hat{x} + Mg \cos^2 \alpha \hat{y} \\
 \vec{f}_{at} &= \mu_E Mg \cos^2 \alpha \hat{x} - \mu_E Mg \cos \alpha \sin \alpha \hat{y} \quad (\text{iminência de subir}) \\
 \vec{f}_{at} &= -\mu_E Mg \cos^2 \alpha \hat{x} + \mu_E Mg \cos \alpha \sin \alpha \hat{y} \quad (\text{iminência de descer}) \\
 \vec{f}_{at} &= \mu_C Mg \cos^2 \alpha \hat{x} - \mu_C Mg \cos \alpha \sin \alpha \hat{y} \quad (\text{subindo}) \\
 \vec{f}_{at} &= -\mu_C Mg \cos^2 \alpha \hat{x} + \mu_C Mg \cos \alpha \sin \alpha \hat{y} \quad (\text{descendo})
 \end{aligned}$$

- (c) Para que o bloco de massa  $M$  suba o plano, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

$$mg > T \quad \text{e} \quad T \geq T' \quad (\text{para que a polia gire}) \quad \text{e} \quad T' > Mg \sin \alpha + |\vec{f}_{at}| = Mg \sin \alpha + \mu_E Mg \cos \alpha$$

Logo

$$mg > T \geq T' > Mg \sin \alpha + \mu_E Mg \cos \alpha$$

e a condição sobre  $\alpha$  é dada por

$$\sin \alpha + \mu_E \cos \alpha < \frac{m}{M}$$

- (d) Já para que o bloco de massa  $M$  desça o plano, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

$$Mg \sin \alpha > T' + |\vec{f}_{at}| \quad \text{e} \quad T' \geq T \quad (\text{para que a polia gire}) \quad \text{e} \quad T > mg$$

Logo

$$Mg \sin \alpha - |\vec{f}_{at}| = Mg \sin \alpha - \mu_E Mg \cos \alpha > T' \geq T > mg$$

e a condição sobre  $\alpha$  é dada por

$$\sin \alpha - \mu_E \cos \alpha > \frac{m}{M}$$

**ATENÇÃO:** Perceba que utilizamos as desigualdades  $T \geq T'$  e  $T' \geq T$  em (c) e (d), respectivamente. Uma polia de massa desprezível, entretanto, pode girar com um torque arbitrariamente pequeno. Sendo assim, nesse dois itens, a condição  $T = T'$  deve ser válida. Veja que isso não altera em nada a desigualdade final a ser satisfeita pelo ângulo  $\alpha$ .

(e) Apresentamos aqui três métodos diferentes, e equivalentes, de solução.

### MÉTODO 1

O sistema "blocos+polia+fio" não é conservativo, devido à presença da força de atrito cinético. Logo, a variação da energia mecânica do sistema "blocos+polia+fio" deve ser igual ao trabalho realizado pela força de atrito

$$\Delta E = E_f - E_i = W_{fat}$$

A variação de energia mecânica é então

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv^2 - mgh + Mg(H_f - H_i),$$

onde  $v$  é a magnitude da velocidade dos blocos e  $H_f$  e  $H_i$  são as alturas final e inicial, respectivamente, do bloco de massa  $M$ . Logo

$$\Delta E = \frac{1}{2}(M+m)v^2 - mgh + Mgh \sin \alpha = \frac{1}{2}(M+m)v^2 + (M \sin \alpha - m)gh$$

O trabalho da força de atrito

$$W_{fat} = \int \vec{f}_{at} \cdot d\vec{r} = -|\vec{f}_{at}|h = -\mu_C Mgh \cos \alpha,$$

de forma que

$$\frac{1}{2}(M+m)v^2 + (M \sin \alpha - m)gh = -\mu_C Mgh \cos \alpha,$$

portanto

$$v = \left[ \frac{m - M(\sin \alpha + \mu_C \cos \alpha)}{M+m} \right]^{1/2} \sqrt{2gh}.$$

Perceba que devido à condição para subida do plano ( $\sin \alpha + \mu_E \cos \alpha < \frac{m}{M}$ ) e o fato que  $\mu_C < \mu_E$

$$0 < \left[ \frac{m - M(\sin \alpha + \mu_C \cos \alpha)}{M+m} \right]^{1/2} < 1 \implies 0 < v < \sqrt{2gh}$$

o que é esperado, já que a presença do bloco de massa  $M$  e da força de atrito deve diminuir a aceleração do bloco com respeito ao caso de queda livre.

Finalmente, na base de versores do item (a), os correspondentes vetores velocidade  $\vec{v}$  e  $\vec{V}$  dos blocos de massas  $m$  e  $M$ , respectivamente, são dados por

$$\vec{v} = -v \hat{y}$$

e

$$\vec{V} = -v \cos \alpha \hat{x} + v \sin \alpha \hat{y}$$

## MÉTODO 2

Uma solução alternativa pode ser obtida por meio das equações da cinemática para cada bloco. Tomando  $a$  como a aceleração escalar comum dos blocos (portanto, ao longo da vertical para  $m$  e paralela ao plano para  $M$ ), temos:

$$\begin{aligned} -mg + T &= ma \\ -T + \mu_c Mg \cos \alpha + Mg \sin \alpha &= Ma \end{aligned}$$

logo

$$a = - \left( \frac{m - \mu_c M \cos \alpha - M \sin \alpha}{M + m} \right) g$$

e portanto, usando a fórmula de Torricelli para o bloco de massa  $m$ , por exemplo, temos:

$$v^2 = v_0^2 - 2ah = -2ah \implies v = \left[ \frac{m - M(\sin \alpha + \mu_c \cos \alpha)}{M + m} \right]^{1/2} \sqrt{2gh}$$

## MÉTODO 3

Um terceiro método seria aplicar o teorema do trabalho-energia cinética a cada bloco separadamente. Neste caso, teríamos para a variação de energia cinética do bloco de massa  $m$

$$\Delta K_m = W_g + W_T,$$

onde  $W_g$  e  $W_T$  são os trabalhos realizados pela gravidade e pela tensão, respectivamente. Já para o bloco de massa  $M$

$$\Delta K_M = W_g + W_T + W_N + W_{fat},$$

onde o trabalho  $W_N$  da normal é nulo, assim como o trabalho associado à componente do peso do bloco perpendicular ao plano. Utilizando a aceleração  $a$  dos blocos obtida anteriormente, podemos determinar a tensão no fio:

$$T = ma + mg = \left[ 1 - \frac{m - \mu_c M \cos \alpha - M \sin \alpha}{M + m} \right] mg.$$

Então, para o percurso de descida do bloco da altura  $h$  até o solo, podemos escrever

$$W_T = \int \vec{T} \cdot d\vec{r} = \int_h^0 T \hat{y} \cdot d\hat{y} = -Th = -\frac{M}{M+m} (1 + \mu_c \cos \alpha + \sin \alpha) mgh$$

enquanto para a gravidade no mesmo percurso

$$W_g = \int m\vec{g} \cdot d\vec{r} = \int_h^0 (-mg\hat{y}) \cdot d\hat{y} = mgh.$$

Somando os trabalhos

$$W_g + W_T = \left[ 1 - \frac{M}{M+m} (1 + \mu_c \cos \alpha + \sin \alpha) \right] mgh = \frac{1}{2} mv^2$$

e novamente temos

$$v = \left[ \frac{m - M(\sin \alpha + \mu_C \cos \alpha)}{M + m} \right]^{1/2} \sqrt{2gh}.$$

Repita o mesmo procedimento para o bloco de massa  $M$ , calculando os trabalhos da tensão, da força de atrito e da componente do peso tangencial ao plano, e certifique de você obtém o mesmo resultado para a magnitude  $v$  da velocidade.