NUSP:

⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪
①	①	①	①	①	①	①	①
②	②	②	②	②	②	②	②
③	③	③	③	③	③	③	③
④	④	④	④	④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤
⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

*Instruções: preencha **completamente** os círculos com os dígitos do seu número USP (um em cada coluna a partir da esquerda); na parte de baixo dessa folha, preencha **completamente** os círculos com as respostas corretas correspondentes a cada questão. Use caneta esferográfica preta ou azul. Escreva apenas nas áreas designadas.*

Nome: .....

Assinatura: .....

Turma: .....

Professor: .....

ESTE ESPAÇO É DE USO EXCLUSIVO DA BANCA DE CORREÇÃO

	1a Avaliação	Revisão
Múltipla-escolha		
Discursiva QD		
Total		

- Esta prova é formada de uma parte objetiva contendo 5 questões de múltipla-escolha (1-5) e uma parte discursiva contendo uma questão (QD).
- A parte objetiva corresponde a um total de 5 pontos e a parte discursiva a 5 pontos.

Marque as respostas das questões de múltipla-escolha

(1) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

(2) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

(3) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

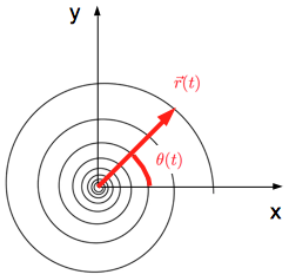
(4) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

(5) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

QUESTÕES DE MÚLTIPLA-ESCOLHA (1-5)

Quando necessário, use g=10 m/s^2.

(1) [1,0] Uma partícula executa o movimento espiral mostrado na figura com $d\theta(t)/dt = \omega$ e $|\vec{r}(t)| = r_0 e^{\alpha t}$ onde r_0, α e ω são constantes positivas. Marque a opção correta abaixo que descreve o movimento quando $\omega = \alpha$:



- ☐ *(a)* Aceleração radial e a velocidade radial decrescem exponencialmente.
- ☐ *(b)* Aceleração radial é nula enquanto a velocidade radial é nula.
- ☐ *(c)* Aceleração radial cresce exponencialmente enquanto a velocidade radial decresce linearmente no tempo.
- ☐ *(d)* Aceleração radial e a velocidade radial crescem exponencialmente.
- ☐ *(e)* Aceleração radial é nula enquanto a velocidade radial cresce exponencialmente.

Resposta: alternativa (e) - 3xGy | (d) - G17F | (c) - 12A6 | (a) HF3y

O vetor posição da partícula em coordenadas cartesianas é $\vec{r}(t) = r_0\, e^{\alpha t}\left[\cos(\omega t)\hat{\imath} + \sin(\omega t)\hat{\jmath}\right]$, enquanto que podemos simplesmente escrever isso em coordenadas polares como $\vec{r}(t) = r_0\, e^{\alpha t}\hat{r}(t)$. Usando que o outro vetor unitário ortogonal da base polar é $\hat{\theta}(t) = -\sin(\omega t)\hat{\imath} + \cos(\omega t)\hat{\jmath}$ e assim $\hat{r}\cdot\hat{\theta} = 0$, vemos que

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \omega\,\hat{\theta}(t) \qquad \frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\omega\,\hat{r}(t).$$

Assim, a velocidade da partícula é

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = r_0\, e^{\alpha t}\alpha\,\hat{r}(t) + r_0\, e^{\alpha t}\omega\,\hat{\theta}(t)$$

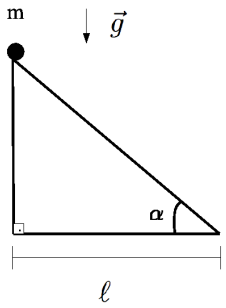
cuja componente radial é $r_0\, e^{\alpha t}\alpha$. Aceleração da partícula é

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = r_0\, e^{\alpha t}\left(\alpha^2 - \omega^2\right)\hat{r}(t) + 2r_0\, e^{\alpha t}\alpha\,\omega\,\hat{\theta}(t).$$

Portanto, em geral a componente radial da aceleração é $r_0\, e^{\alpha t}\left(\alpha^2 - \omega^2\right)$. Assim, vemos que quando $\alpha = \omega$, a aceleração radial é nula e a velocidade radial cresce exponencialmente no tempo.

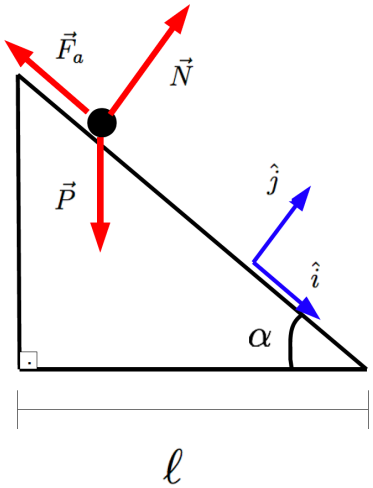
(2) [1,0] Um corpo de massa m desliza do topo de uma rampa cuja base tem comprimento ℓ, conforme a figura abaixo. O coeficiente de atrito dinâmico entre o corpo e a superfície da rampa é μ_d. Qual deverá ser a relação satisfeita pelo ângulo α ($< \pi/2$) para que o tempo de deslizamento do corpo ao longo de toda rampa seja o maior possível?

Obs: Mínimos e máximos de uma função são caracterizados pelo fato de que a derivada da função se anula em tais pontos.



- ☐ *(a)* $\text{sen}^2(\alpha) + \cos(2\alpha) = 1/\mu_d$
- ☐ *(b)* $\cos(2\alpha) = -1/\mu_d^2$
- ☐ *(c)* $\text{sen}(\alpha) = \mu_d/2$
- ☐ *(d)* $\tan(2\alpha) = -1/\mu_d$
- ☐ *(e)* $\tan(\alpha) = \mu_d$

Resposta: alternativa (d) - 3xGy | (e) - G17F | (b) - 12A6 | (a) HF3y



De acordo com a figura ao lado, a segunda lei de Newton para o corpo de massa m é

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_a = m\vec{a}$$

onde $\vec{P} = m\vec{g}$ é a força peso, $\vec{N} = N\hat{j}$ é a força normal, $\vec{F}_a = -\mu_d|\vec{N}|\hat{i}$ é a força de atrito dinâmica, e $\vec{a}$ é a aceleração da partícula $\vec{a} = a\,\hat{i}$. Decompondo essa equação na base cartesiana mostrada na figura, vemos que

$$N - mg\cos\alpha = 0 \rightarrow N = mg\cos\alpha$$

e, como $\alpha < \pi/2$, vemos que $N > 0$. Além disso, vemos que

$$mg\text{sen}\alpha - \mu_d mg\cos\alpha = ma \rightarrow a = g\text{sen}\alpha - \mu_d g\cos\alpha.$$

Vemos então que a aceleração da partícula é constante. De acordo com a figura, o corpo percorre a distância de $\ell/cos(\alpha)$ até o fim do movimento que ocorre depois de um intervalo de tempo t_f. Usando a equação horária para o movimento uniformemente acelerado, com velocidade inicial $\vec{v}_0 = 0$, vemos que

$$\frac{\ell}{\cos(\alpha)} = \frac{1}{2}(g\text{sen}\alpha - \mu_d g\cos\alpha)t_f^2 \tag{1}$$

ou seja,

$$t_f = \sqrt{\frac{2\ell}{g\cos(\alpha)}\frac{1}{(\text{sen}\alpha - \mu_d\cos\alpha)}}. \tag{2}$$

O tempo t_f é máximo para o ângulo α tal que a função $\cos\alpha(\text{sen}\alpha - \mu_d\cos\alpha)$ tem um mínimo. Fazendo então a primeira derivada dessa função encontramos

$$\frac{d\left[\cos\alpha(\text{sen}\alpha - \mu_d\cos\alpha)\right]}{d\alpha} = \cos(2\alpha) + \mu_d\,\text{sen}(2\alpha) \;\text{ e logo }\; \rightarrow \tan 2\alpha = -1/\mu_d. \tag{3}$$

Calculando a segunda derivada dessa função nesse valor de α, vemos que de fato t_f é máximo.

(3) [1,0] Uma partícula executa movimento cujo vetor posição é dado por $\vec{r} = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath}$ com $x(t) = t\,\cos(\omega t)$ e $y(t) = \cos(\omega t)$, sendo ω = constante. Marque o vetor abaixo que é ortogonal ao vetor aceleração $\vec{a}(t)$ da partícula.

☐ *(a)* $-\omega^2\cos(\omega t)\hat{\imath} + \left[t\omega^2\cos(\omega t) + 2\omega\text{sen}(\omega t)\right]\hat{\jmath}$

☐ *(b)* $\left[2\cos(\omega t) - t\text{sen}(\omega t)\right]\hat{\imath} - \cos(\omega t)\hat{\jmath}$

☐ *(c)* $\left(\left[\cos(\omega t) - \text{sen}(\omega t)\right]\hat{\imath} - \cos(\omega t)\hat{\jmath}\right)\omega$

☐ *(d)* $\left(\left[-2\cos(\omega t) + t\text{sen}(\omega t)\right]\hat{\imath} + \cos(\omega t)\hat{\jmath}\right)\omega^2$

☐ *(e)* $\left[2\cos(\omega t) - t\text{sen}(\omega t)\right]\hat{\imath} - \cos(\omega t)\hat{\jmath}$

Resposta: alternativa (a) - 3xGy | (a) - G17F | (a) - 12A6 | (e) HF3y

Para encontrar o vetor aceleração basta derivar o vetor posição duas vezes: $\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

Desta forma: $\vec{a}(t) = \left[-2\omega\text{sen}\,(\omega t) - t\omega^2\cos\,(\omega t)\right]\hat{\imath} - \omega^2\cos\,(\omega t)\,\hat{\jmath}$

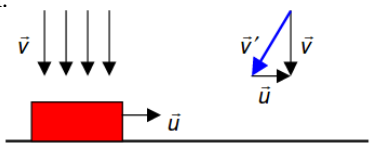
Lembrando que o produto escalar entre dois vetores ortogonais é nulo, e que $\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} = 0$, $\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} = 1$ e $\hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} = 1$, a resposta correta é a alternativa (c).

(4) [1,0] A neve cai, verticalmente, com uma velocidade constante de v m/s. O motorista de um carro, viajando em linha reta numa estrada com uma velocidade de u m/s, vê os flocos de neve caírem formando um ângulo com a vertical. O valor deste ângulo é:

- ☐ *(a)* $\arccos\left(\frac{v}{u}\right)$
- ☐ *(b)* $\arctan\left(\frac{u}{v}\right)$
- ☐ *(c)* $\text{arctanh}\left(\frac{v}{u}\right)$
- ☐ *(d)* $\text{arcsen}\left(\frac{u}{v}\right)$
- ☐ *(e)* $\arctan\left(\frac{v}{u}\right)$

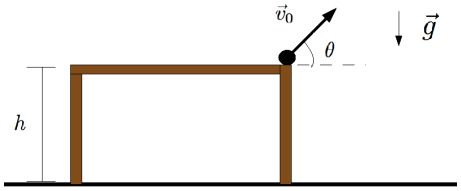
Resposta: alternativa (b) - 3xGy | (a) - G17F | (c) - 12A6 | (d) HF3y

Considere o seguinte esquema vetorial de velocidades, onde $\vec{v}$ é a velocidade da neve caindo observada em um referencial fixo na estrada, $\vec{u}$ é a velocidade do referencial móvel em relação à estrada e $\vec{v}'$ é a velocidade da neve caindo observada pelo referencial móvel.



Em termos vetoriais, teremos: $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$
Como neste caso específico os vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$ formam um ângulo reto, o ângulo que a neve faz com a vertical vale:
$\tan(\theta) = \left(\frac{u}{v}\right) \Longrightarrow \theta = \arctan\left(\frac{u}{v}\right)$

(5) [1,0] Um corpo de massa $m = 1$ kg é lançado no instante $t = 0$ com velocidade $\vec{v}_0$ de módulo $|\vec{v}_0| = 1$ m/s do topo de uma mesa de altura $h = 1$ m com relação ao solo, conforme a figura abaixo. A altura máxima que o corpo atinge com relação ao solo é y_m e o tempo que leva para o corpo atingir essa altura é t_m. Além disso, o tempo total até o corpo atingir o solo é t_f. Despreze efeitos oriundos da resistência do ar. Assumindo que $\theta = \pi/4$, marque a resposta correta abaixo:



☐ *(a)* $t_m = \frac{1}{10\sqrt{2}}$ s, $y_m = 1$ m, $t_f = 0.48$ s

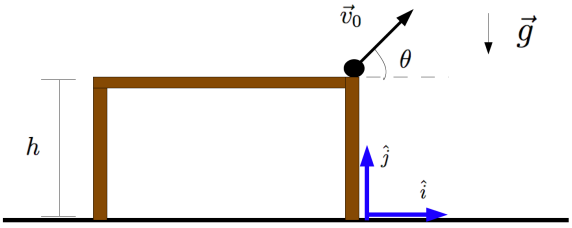
☐ *(b)* $t_m = \frac{1}{5\sqrt{2}}$ s, $y_m = 1$ m, $t_f = \frac{1}{20}\left(\sqrt{2} + \sqrt{80}\right)$ s

☐ *(c)* $t_m = \frac{1}{\sqrt{2}}$ s, $y_m = 3$ m, $t_f = \sqrt{80}/20$ s

☐ *(d)* $t_m = 0.1$ s, $y_m = 1$ m, $t_f = 2$ s

☐ *(e)* $t_m = \frac{1}{10\sqrt{2}}$ s, $y_m = 41/40$ m, $t_f = \frac{1}{20}\left(\sqrt{2} + \sqrt{82}\right)$ s.

Resposta: alternativa (e) - 3xGy | (e) - G17F | (d) - 12A6 | (c) HF3y



Considerando a base cartesiana mostrada na figura abaixo e, sabendo que a única força que atua no corpo é a força peso $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\hat{j}$ (este então é um movimento uniformemente acelerado), temos que a velocidade da partícula é dada por (assumindo $t_0 = 0$)

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}t \rightarrow \vec{v}(t) = (v_0 \cos\theta)\hat{i} + (v_0 \text{sen}\theta - gt)\hat{j},$$

onde definimos a notação $|\vec{v}_0| = v_0$. Na altura máxima y_m que ocorre no instante de tempo t_m temos que $v_0 \text{sen}\theta - gt_m = 0$, ou seja,

$$t_m = \frac{v_0 \text{sen}\theta}{g}.$$

Sabendo que o vetor posição do corpo é (assumindo que a posição inicial é $\vec{r}_0 = h\hat{j}$)

$$\vec{r}(t) = (v_0 \cos\theta t)\hat{i} + (h + v_0 t\,\text{sen}\theta - gt^2/2)\hat{j}$$

temos que a altura máxima é dada por

$$y_m = h + v_0 t_m \,\text{sen}\theta - g t_m^2/2.$$

Por outro lado, o tempo que leva até o corpo chegar ao solo, t_f, é dado pela solução de

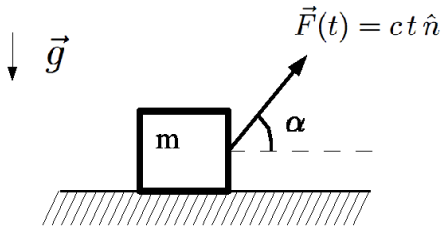
$$h + v_0 t_f \,\text{sen}\theta - g t_f^2/2 = 0 \rightarrow t_f = \frac{v_0 \text{sen}\theta}{g} + \frac{\sqrt{v_0^2 \text{sen}^2(\theta) + 2gh}}{g}.$$

Quando $\theta = \pi/4$, usando os dados do problema encontramos $t_m = 1/(10\sqrt{2})$ s, $y_m = 41/40$ m, e $t_f = (\sqrt{2} + \sqrt{82})/20$ s.

QUESTÃO DISCURSIVA

ATENÇÃO: A solução dessa questão deve ser feita no caderno de provas devidamente identificado com nome, NUSP e turma. É necessário justificar TODOS os passos.

(QD) Um corpo de massa m, inicialmente em repouso no instante inicial $t = 0$, é submetido a uma força dependente do tempo $\vec{F}(t) = ct\hat{n}$, onde c é uma constante positiva e $\hat{n}$ é um vetor unitário que faz um ângulo fixo $0 \leq \alpha < \pi/2$ com o eixo horizontal, conforme mostrado na figura abaixo. O coeficiente de atrito estático entre o corpo e a superfície é μ_e enquanto o coeficiente de atrito dinâmico (cinético) é μ_d.



(a) [1,0] Faça um diagrama das forças que atuam no corpo no instante inicial e escreva tais forças num sistema de coordenadas apropriado.

(b) [2,0] Encontre quanto tempo leva para a corpo começar a se movimentar e também o tempo que leva para o corpo "perder" contato com o solo.

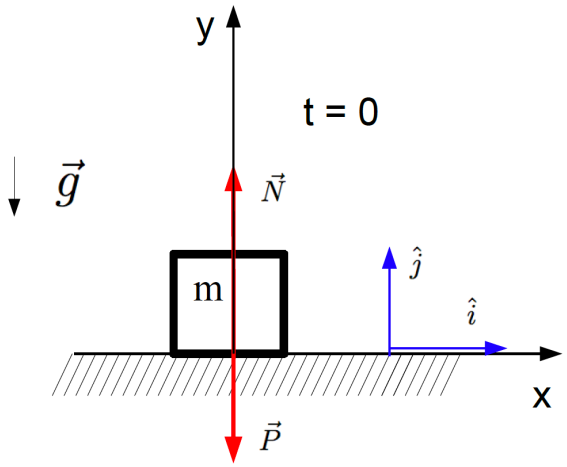
(c) [2,0] Encontre o vetor posição e o vetor velocidade do corpo no instante em que o mesmo perde contato com o solo. Deixe sua resposta em termos de t_m e t_p e demais quantidades fornecidas no enunciado.

FORMULÁRIO

$y(x) = e^{u(x)} \Longrightarrow y'(x) = e^{u(x)}u'(x)$

SOLUÇÃO

(a) No instante inicial $t = 0$, conforme vemos na figura abaixo somente as forças peso $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\hat{j}$ e normal $\vec{N} = N\hat{j}$ atuam no corpo. No referencial inercial adotado (mostrado na figura), o corpo se encontra em repouse em $t = 0$.



(b) Para $t > 0$, a força $\vec{F}$ não é nula. Vamos chamar t_m o tempo que leva para o corpo entrar na iminência do movimento. Até chegar em t_m a força resultante que atua no corpo que entra na expressão da segunda lei de Newton é

$$\vec{F}_R = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_a = \vec{0}.$$

Como $\vec{F} = ct(\cos\alpha\,\hat{i} + \text{sen}\alpha\,\hat{j})$, decompondo essas forças na base cartesiana encontramos que na iminência do movimento $\vec{F}_a = -\mu_e|\vec{N}|\hat{i}$ e

$$N + ct_m\text{sen}\alpha - mg = 0 \rightarrow N = mg - ct_m\text{sen}\alpha.$$

Note que em t_m assumimos que $N > 0$. A componente na direção $\hat{i}$ nos dá

$$ct_m\cos\alpha - \mu_e(mg - ct_m\text{sen}\alpha) = 0 \rightarrow t_m = \frac{\mu_e mg}{c\,(\cos\alpha + \mu_e\text{sen}\alpha)}.$$

Agora, uma vez em movimento, a força de atrito é a dinâmica, que nesse caso será dada por $\vec{F}_d = -\mu_d|\vec{N}|\hat{i}$. Nesse caso a segunda lei de Newton fica

$$\vec{F}_R = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_d = m\vec{a}(t)$$

onde $\vec{a}(t)$ é a aceleração do corpo. No instante t_p, o corpo perde contato com o solo, ou seja, a força normal $\vec{N} = 0$. Decompondo a segunda lei na base cartesiana calculada no instante t_p encontramos ao longo do eixo y

$$-mg + ct_p\text{sen}\alpha = 0 \rightarrow t_p = \frac{mg}{c\,\text{sen}\alpha},$$

ou seja, a equação acima nos diz o tempo que leva para o corpo perder contato com o chão. Note que $t_p > t_m$.

(c) Entre t_m e t_p, decompondo a segunda lei de Newton

$$\vec{F}_R = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_d = m\vec{a}(t)$$

encontramos

$$N - mg + ct\text{sen}\alpha = 0 \rightarrow N(t) = mg - ct\text{sen}\alpha \geq 0$$

e da outra componente encontramos a aceleração

$$-\mu_d(mg - ct\text{sen}\alpha) + ct\cos\alpha = ma(t) \rightarrow a(t) = \frac{ct}{m}(\cos\alpha - \mu_d\text{sen}\alpha) - \mu_d g.$$

Vemos que a aceleração $\vec{a}(t) = a(t)\hat{\imath}$ nesse intervalo não é constante no tempo. Para encontrarmos o vetor velocidade, basta lembrar que o vetor aceleração é a taxa de variação no tempo do vetor velocidade, ou seja, a derivada do vetor velocidade com respeito ao tempo t. Logo, deve-se encontrar um vetor $\vec{v}(t)$ que quando derivado fornece o vetor aceleração $\vec{a}(t)$ acima. Como $a(t)$ pode ser visto como um polinômio de grau 1 no tempo t, das regras de derivação de polinômio temos que

$$v(t) = \frac{c}{2m}(\cos\alpha - \mu_d\text{sen}\alpha)t^2 - \mu_d g t + d$$

Usando o fato de que $v(t_m) = 0$ (além disso, não há velocidade no eixo y no instante t_m) o valor da constante d é

$$d = -\frac{c}{2m}(\cos\alpha - \mu_d\text{sen}\alpha)t_m^2 + \mu_d g t_m$$

Assim, vemos que

$$\vec{v}(t) = v(t)\hat{\imath} = \left[\frac{c}{2m}(\cos\alpha - \mu_d\text{sen}\alpha)(t^2 - t_m^2) - \mu_d g(t - t_m)\right]\hat{\imath}$$

Para calcular o vetor posição, o procedimento é similar, já que o vetor velocidade é a derivada com respeito ao tempo do vetor posição $\vec{r}(t)$. Como tudo ocorre somente ao longo do eixo x, fazemos

$$x(t) = \frac{c}{2m}(\cos\alpha - \mu_d\text{sen}\alpha)\frac{t^3}{3} - \mu_d g\frac{t^2}{2} + dt + e$$

onde podemos usar $x(t_m) = 0$ e $y(t_m) = 0$ (conforme a figura) para determinar a constante e

$$e = -\frac{c}{6m}(\cos\alpha - \mu_d\text{sen}\alpha)t_m^3 + \mu_d g\frac{t_m^2}{2} - dt_m$$

e agrupando os termos podemos escrever

$$x(t) = \frac{c}{6m}(\cos\alpha - \mu_d\text{sen}\alpha)(t^3 - t_m^3) - \frac{\mu_d g}{2}(t - t_m)^2 - \frac{ct_m^2}{2m}(\cos\alpha - \mu_d\text{sen}\alpha)(t - t_m)$$

Calculando essas quantidades em t_p, basta substituirmos o valor de t_p calculado acima no ítem (b) em $\vec{r}(t_p) = x(t_p)\hat{\imath}$ e $\vec{v}(t_p) = v(t_p)\hat{\imath}$

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t_p) &= \left[\frac{c}{6m}(\cos\alpha - \mu_d\text{sen}\alpha)(t_p^3 - t_m^3) - \frac{\mu_d g}{2}(t_p - t_m)^2 - \frac{ct_m^2}{2m}(\cos\alpha - \mu_d\text{sen}\alpha)(t_p - t_m)\right]\hat{\imath} \\
\vec{v}(t_p) &= \left[\frac{c}{2m}(\cos\alpha - \mu_d\text{sen}\alpha)(t_p^2 - t_m^2) - \mu_d g(t_p - t_m)\right]\hat{\imath}
\end{aligned}$$