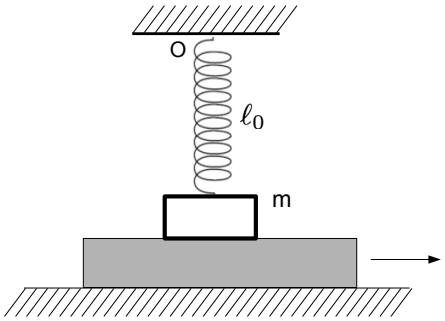
QUESTÕES DE MÚLTIPLA-ESCOLHA (1-4)

[y2y3] 1:D ; 2:E ; 3: A ; 4:E
[E1zy] 1:E; 2:A; 3:E; 4:E
[ZGxz] 1:B; 2:B; 3:C; 4:C
[z7BA] 1:E; 2:D; 3:C; 4:A

(1) [1,0] Um ciclista executa trajetórias circulares em cima de uma pista de raio R. O coeficiente de atrito nessa superfície varia com a distância r com relação ao centro da pista da seguinte forma: $\mu(r) = \mu_0(1 - r/R)$, onde μ_0 é constante. O raio da trajetória circular no qual a velocidade do ciclista é máxima e o valor dessa velocidade são (aceleração da gravidade $= g$):

- ☐ ***(a)*** $\frac{R}{2}$ e $v_{max} = \sqrt{\mu_0 g R}/2$
- ☐ ***(b)*** R e $v_{max} = \sqrt{\mu_0 g R}/2$
- ☐ ***(c)*** $R/\sqrt{2}$ e $v_{max} = \sqrt{\mu_0 g R}/3$
- ☐ ***(d)*** $R/\sqrt{6}$ e $v_{max} = \sqrt{\mu_0 g R}/12$
- ☐ ***(e)*** $R/\sqrt{4}$ e $v_{max} = \sqrt{\mu_0^2 g R}/2$

(2) [1,0] Sobre um paralelepípedo se encontra uma barra de massa m conectada a uma mola presa no ponto O, de acordo com a figura abaixo. O sistema inteiro está inicialmente em repouso e a mola está na sua posição de equilíbrio com comprimento ℓ_0. O paralelepípedo é puxado lentamente para direita até que a barra começa a se mover sobre ele, e nesse instante a mola está esticada e faz um ângulo θ com relação à sua posição inicial quando em equilíbrio. O coeficiente de atrito entre a barra e o paralelepípedo é μ. A energia potencial elástica da mola nesse instante é:



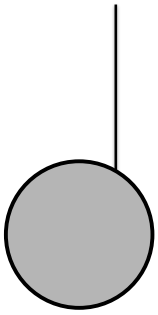
- ☐ ***(a)*** $\frac{\mu m g \ell_0}{2} \frac{(\sec\theta - 1)}{(sen\theta + \mu\cos\theta)}$
- ☐ ***(b)*** $\frac{\mu^2 m g \ell_0}{4} \frac{(sen\theta - 1)}{(sen\theta + \mu\cos\theta)}$
- ☐ ***(c)*** $\frac{\mu m g}{3} \frac{(\cos\theta - 1)}{(\cos\theta + \mu sen\theta)}$
- ☐ ***(d)*** $\frac{\mu m g \ell_0}{2} \frac{(\cos\theta - 1)}{(\cos\theta + \mu sen\theta)}$
- ☐ ***(e)*** $\mu m g \ell_0 \frac{(\tan\theta - 1)}{(\cos\theta + \mu sen\theta)}$

(3) [1,0] Um partícula de massa m_1 colide elasticamente com uma partícula de massa m_2, que estava inicialmente em repouso. Qual fração da energia cinética da partícula 1 foi transferida se ela sai depois da colisão com um ângulo de 90 graus com relação à direção inicial do seu movimento?

- ☐ ***(a)*** $\frac{2m_1}{m_1+m_2}$
- ☐ ***(b)*** $\frac{2m_2}{m_1+m_2}$
- ☐ ***(c)*** $\frac{2m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}$
- ☐ ***(d)*** 0
- ☐ ***(e)*** $\frac{m_1}{2(m_1+m_2)}$

(4) [1,0] Um io-iô cilíndrico (de massa M e raio R) é solto com uma velocidade inicial nula. A corda, de 1 m de comprimento, está enrolada em seu eixo, com raio R/2. Ao atingir a extensão total da corda, o módulo da velocidade final do io-iô é (considerando $g = 10m/s^2$)

- ☐ ***(a)*** $v = \sqrt{\frac{20}{3}}\,\frac{m}{s}$
- ☐ ***(b)*** $v = \sqrt{20}\,\frac{m}{s}$
- ☐ ***(c)*** $v = \sqrt{\frac{40}{3}}\,\frac{m}{s}$
- ☐ ***(d)*** $v = \sqrt{10}\,\frac{m}{s}$
- ☐ ***(e)*** $v = 2\,\frac{m}{s}$



Obs: despreze o momento de inércia do eixo, de espessura desprezível, e a massa da corda.

FORMULÁRIO

Momentos de inércia (eixo de simetria, passando pelo centro de massa):
Anel: $I_{CM} = MR^2$; Cilindro: $I_{CM} = \frac{MR^2}{2}$;
Esfera: $I_{CM} = \frac{2MR^2}{5}$; Haste: $I_{CM} = \frac{M\ell^2}{12}$;
Momento de Inércia: $I = \sum m_i r_i^2$; Teorema dos eixos paralelos: $I = I_{CM} + Md^2$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}\,;\ \vec{L} = \vec{R}\times\vec{P} + \vec{L}_{int}$$

$$\vec{\tau} = m\vec{a}\,;\ \vec{p} = m\vec{v}\,;\ \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}\,;\ \vec{J} = \int_{t_i}^{t_f}\vec{F}(t)\,dt\,;\ \frac{d}{dt}\vec{p} = \frac{d}{dt}m\left(\vec{v}+\vec{v}_{rel}\right) + \vec{F}_{ext}$$

$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} F(\vec{r})d\vec{\ell} = K(\vec{v}_f) - K(\vec{v}_f)\,;\ \Delta U = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)dx\,;\ F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}\,;\ K(\vec{v}) = m|\vec{v}|^2/2$$

$$\text{Potência: } P = \frac{dW}{dt}\,;\ P = \vec{F}\cdot\vec{v} \qquad \vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = \left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B} - \left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}$$

QUESTÕES DISCURSIVAS

ATENÇÃO: A solução dessas questões devem ser feitas no caderno de provas devidamente identificado com nome, NUSP e turma.

Todas as respostas devem ser justificadas e os cálculos devem estar descritos nas respostas.

QD1 (3 pts) Uma partícula pode realizar um deslocamento em uma dimensão, sujeita a uma força dada por

$$F = F_0 \left(\frac{a}{x^6} - \frac{b}{x^4} \right).$$

com F_0,a, b positivos.

a) [0,5] Quais as posições de equilíbrio da partícula? O equilíbrio é estável ou instável?

b) [0,75] Dê uma função que descreva a energia potencial da partícula.

c) [1,25] Esboce o gráfico da energia potencial, indicando valores máximos e mínimos, zeros e valores assintóticos.

d) [0,5] Partindo da posição de equilíbrio, aplicamos uma força externa sobre a partícula para liberá-la do potencial. Qual é o trabalho total realizado por esta força externa?

CADERNO DE RESPOSTAS - FOLHA 1

NOME:

NUSP:

TURMA:

$$F = F_0 \left(\frac{a}{x^6} - \frac{b}{x^4} \right)$$

a) Equilíbrio: $F(x) = 0 \therefore \frac{a}{x^6} = \frac{b}{x^4} \Rightarrow x^2 = \frac{a}{b}$

$$x_{eq} = \pm \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Estabilidade: se $\frac{d}{dx} F \Big/_{x_{eq}} > 0 \rightarrow$ instável

$\frac{dF}{dx} \Big/_{x_{eq}} < 0 \rightarrow$ estável

$$\frac{d}{dx} F(x) = -F_0 \left(\frac{6a}{x^7} - \frac{4b}{x^5} \right)$$

$$\frac{d}{dx} F \Big/_{x = \sqrt{a/b}} = -F_0 \left(\frac{6a}{a^{7/2}} b^{7/2} - \frac{4b \cdot b^{5/2}}{a^{5/2}} \right)$$

$$= -F_0 \left(6 \frac{b^{7/2}}{a^{5/2}} - 4 \frac{b^{7/2}}{a^{5/2}} \right) = -F_0 \cdot 2 \frac{b^{7/2}}{a^{5/2}} < 0$$

Estável

CADERNO DE RESPOSTAS - FOLHA 2

NOME:

NUSP:

TURMA:

$$\frac{d}{dx} F(x)\Big|_{x=-\sqrt{a/b}} = -\frac{d}{dx} F(x)\Big|_{x=\sqrt{a/b}} > 0 \quad \text{Instável}$$

$\therefore$ Equilíbrio estável em $x = \sqrt{a/b}$

Equilíbrio instável em $x = -\sqrt{a/b}$

b) $$U - U_0 = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx = -\int_{x_i}^{x_f} F_0\left(\frac{a}{x^6} - \frac{b}{x^4}\right)dx$$

$$= -F_0\left(-\frac{a}{5x^5} + \frac{b}{3x^3}\right)\Bigg|_{x_i}^{x_f}$$

Tomando o limite $x_f \to \infty$

$$U(x) = F_0\left(\frac{a}{5x^5} - \frac{b}{3x^3}\right) + U_0$$

U_0 arbitrário (por exemplo, $U_0 = 0$)

Teste $$\frac{d}{dx} U(x) = F_0\left(-\cancel{5}\,\frac{a}{\cancel{5}x^6} + \cancel{3}\,\frac{b}{\cancel{3}x^4}\right) = -F(x) \quad \checkmark$$

c) Extremos em $\frac{d}{dx} U(x) = 0 \Rightarrow F = 0 \Rightarrow x = \sqrt{a/b}$; $x = -\sqrt{a/b}$

$$\left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=\sqrt{a/b}} < 0 \Rightarrow \left.\frac{d^2}{dx^2} U\right|_{x=\sqrt{a/b}} > 0 \Rightarrow \text{mínimo}$$

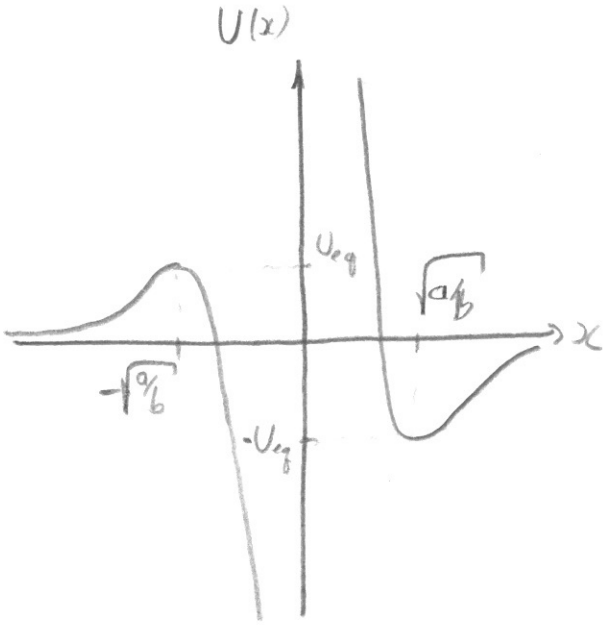
$$\left.\frac{d}{dx} F\right|_{x=-\sqrt{a/b}} > 0 \Rightarrow \left.\frac{d^2}{dx^2} U\right|_{x=-\sqrt{a/b}} < 0 \Rightarrow \text{máximo}$$

Para $U_0 = 0$

$$U(x) = 0 \Rightarrow \frac{a}{5x^5} = \frac{b}{3x^3} \Rightarrow x^2 = \frac{3a}{5b} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3a}{5b}} \simeq \pm 0{,}8\sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$\lim_{x\to\infty} U(x) = 0 \; ; \; \lim_{x\to-\infty} U(x) = 0 \; ; \; \lim_{x_+\to 0} U(x) \to \infty \; ; \; \lim_{x_-\to 0} U(x) \to -\infty$$

$$U\left(\sqrt{a/b}\right) = -\frac{2}{15} F_0 \left(\frac{b^{5/2}}{a^{3/2}}\right) = -U\left(-\sqrt{a/b}\right) = -U_{eq}$$



d) Trabalho de Força externa

deve compensar a variação da energia potencial

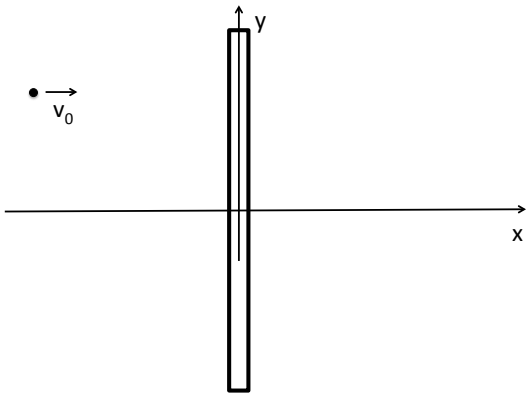
$$\Delta U = U(x\to\infty) - U(x_{eq}) = \frac{2}{15} F_0 \left(\frac{b^{5/2}}{a^{3/2}}\right)$$

$$W_{ext} = \Delta U = -W_{F_c}$$ trabalho da Força conservativa

$$W_{ext} = \frac{2}{15} F_0 \sqrt{\frac{b^5}{a^3}}$$

QD2 (3 pts)

Uma haste delgada de comprimento L e massa $3m$ é atingida por um projétil de massa m em $t = 0$, que fica cravado em sua superfície. Sabendo que o projétil tem uma equação de movimento dada por $\vec{r} = (v_0\, t)\hat{\imath} + (L/3)\hat{\jmath}$ para $t < 0$, responda, considerando o sistema isolado:



a) [0,5] Qual o vetor momento angular do sistema no referencial indicado para $t < 0$?
b) [0,5] Qual a equação de movimento do vetor posição do centro de massa do sistema para $t > 0$?
c) [1,0] Qual o vetor velocidade angular do conjunto após a colisão?
d) [1,0] Qual a energia cinética total do sistema após a colisão?
Dê suas respostas em termos de L, m, v_0, t, e das coordenadas indicadas na figura.

CADERNO DE RESPOSTAS - FOLHA 1

NOME:

NUSP:

TURMA:

a) Para uma partícula: $\vec{p} = m \cdot v_0 \hat{i} = \vec{p}_{cm}$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \left[(v_0 \cdot t)\hat{i} + \frac{L}{3}\hat{j}\right] \times m v_0 \hat{i}$$

$$= \frac{m v_0 L}{3} \hat{j} \times \hat{i} = -\frac{m v_0 L}{3} \hat{k}$$

b) Sistema isolado, momento se conserva, momento do centro de massa se conserva

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\vec{r} \cdot m}{M+m} = \frac{\vec{r} \cdot m}{4m} = \frac{v_0}{4} t \hat{i} + \frac{L}{12} \hat{j}$$

c) Por conservação do momento angular

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f$$

mas $\vec{L}_f = \vec{r}_{cm} \times \vec{p}_{cm} + I_{cm} \cdot \vec{\omega}$

$$\vec{r}_{cm} \times \vec{p}_{cm} = \left(\frac{v_0}{4} t \hat{i} + \frac{L}{12} \hat{j}\right) \times m v_0 \hat{i} = -\frac{m v_0 L}{12} \hat{k}$$

CADERNO DE RESPOSTAS - FOLHA 2

NOME:

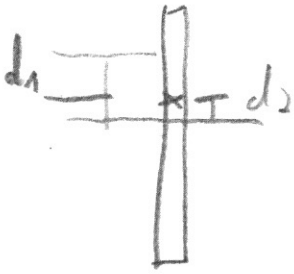
NUSP:

TURMA:

c) $I_{cm} \cdot \vec{\omega} = \vec{L}_1 - \vec{r}_{cm} \times \vec{p}_{cm} = -m v_0 L \hat{k} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12} \right)$

$= -m v_0 L \hat{k} \left(\frac{4-1}{12} \right) = \frac{-m v_0 L}{4} \hat{k}$

$I_{cm} = m \cdot d_1^2 + M d_2^2 + \frac{ML^2}{12}$



$d_1 = \frac{L}{3} - \frac{L}{12} = \frac{L}{4}$

$d_2 = \frac{L}{12}$

$I_{cm} = m \cdot \frac{L^2}{16} + 3m \cdot \frac{L^2}{12^2} + \frac{3mL^2}{12} =$

$= mL^2 \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{48} + \frac{1}{4} \right) = mL^2 \frac{3+1+12}{48} = mL^2 \frac{16}{48} = \frac{mL^2}{3}$

$\vec{\omega} = -\frac{m v_0 L}{4} \hat{k} \frac{3}{mL^2} = -\frac{3}{4} \frac{v_0}{L} \hat{k}$

CADERNO DE RESPOSTAS - FOLHA 3

NOME:

NUSP:

TURMA:

d) $K = (\Sigma m)\frac{v_{cm}^2}{2} + \frac{I_{cm}\cdot\omega^2}{2}$ $\qquad V_{cm} = \frac{mv_0}{4m} = \frac{v_0}{4}$

Translação rotação

$$\frac{4m\cdot v_0^2}{2\ 16} + \frac{mL^2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{16}\frac{v_0^2}{L^2}$$

$$= mv_0^2\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{32}\right) = mv_0^2\left(\frac{4+3}{32}\right) = \frac{7}{32}mv_0^2 = \frac{7}{16}\left(\frac{mv_0^2}{2}\right)$$