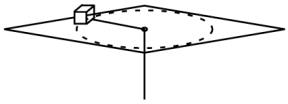
## QUESTÕES DE MÚLTIPLA-ESCOLHA (1-5)

z7BA: (1) C; (2) E; (3) D; (4) B; (5) B;
y2y3: (1) E; (2) C; (3) E; (4) C; (5) B;
E1zy: (1) E; (2) A; (3) B; (4) B; (5) E;
zGxz: (1) A; (2) E; (3) D; (4) A; (5) D;

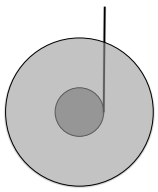
**(1) [1,2]** Um corpo de massa $m$ está girando preso a um fio, realizando um movimento circular sobre um plano, com raio $R$ e com velocidade angular $\omega$, sem atrito. O fio é puxado, reduzindo o raio do giro a 1/4 do seu tamanho original. O trabalho realizado para puxar o fio, em termos da energia cinética inicial $T_0$, é



- ☐ ***(a)*** $W = 15T_0$
- ☐ ***(b)*** $W = 16T_0$
- ☐ ***(c)*** $W = 3T_0$
- ☐ ***(d)*** $W = 4T_0$
- ☐ ***(e)*** $W = 0$

***O momento angular inicial é dado por*** $L_0 = mR^2\omega$***, e a energia cinética*** $T_0 = \frac{m}{2}R^2\omega^2$.
***Por ser um problema de forças centrais, elas realziam trabalho, mas não alteram o momento angular. Portanto o momento angular final será*** $L_f = m(\frac{R}{4})^2\omega' = L_0$***, o que implica em*** $\omega' = 16\omega$.
***A energia cinética final será*** $T_f = \frac{m}{2}(\frac{R}{4})^2\omega'^2 = 16T_0$.
***O trabalho realizado corresponde à variação de energia cinética, assim*** $W = T_f - T_0 = 15T_0$.

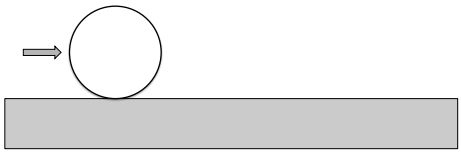
**(2) [1,2]** Temos um ioiô, com massa $m$, raio $r$ e momento de inércia em relação ao seu centro de massa $I_{cm} = mr^2/2$. Considerando que a corda do ioiô está enrolada em um eixo de raio $r/3$, qual a aceleração do centro de massa do ioiô em sua descida?



- ☐ ***(a)*** $a_{cm} = \frac{2g}{11}$
- ☐ ***(b)*** $a_{cm} = g$
- ☐ ***(c)*** $a_{cm} = \frac{2g}{9}$
- ☐ ***(d)*** $a_{cm} = \frac{2g}{3}$
- ☐ ***(e)*** $a_{cm} = \frac{6g}{11}$

***O momento de inércia em relação ao ponto de contato da corda com o cilindro é dado pelo teorema dos eixos paralelos:***
$I = I_{cm} + m(r/3)^2 = \frac{11}{18}mr^2$.
***O torque exercido pela força peso neste ponto é*** $\tau = mg\frac{r}{3} = I\alpha$***, onde*** $\alpha$ ***é a aceleração angular do giro em torno do ponto de contato.***
***Com isso, temos*** $\alpha = \frac{6g}{11r}$.
***A velocidade do centro de massa será o produto*** $a_{cm} = \alpha\frac{r}{3}$.
***Portanto,*** $a_{cm} = \frac{2g}{11}$

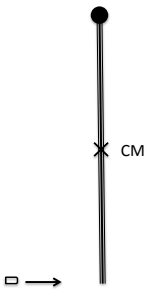
**(3) [1,2]** Uma bola de bilhar maciça, de massa $M$, raio $R$ e momento de inércia $I_{cm} = \frac{2mr^2}{5}$ é lançada horizontalmente com uma tacada certeira à meia altura, transferindo um impulso $\vec{J} = J\hat{x}$. Considerando que o atrito cinético entre a bola e a mesa é dado por $\mu$, quanto tempo leva para a bola começar a rolar sem deslizar sobre a mesa?



- ☐ ***(a)*** $t = \frac{2}{7}\frac{J}{\mu mg}$
- ☐ ***(b)*** $t = \frac{2}{3}\frac{J}{\mu mg}$
- ☐ ***(c)*** $t = \frac{J}{\mu mg}$
- ☐ ***(d)*** $t = \frac{7}{2}\frac{J}{\mu mg}$
- ☐ ***(e)*** $t = \frac{7}{12}\frac{J}{\mu mg}$

***O momento $J$ implica em uma velocidade inicial $v_0 = J/m$. Sobre a esfera, atua a força de atrito na horizontal, e a peso e a normal na vertical. Como a normal deve equilibrar a peso para a aceleração vertical ser nula, $N = mg$. Com isso, a força de atrito cinético é $F_a = -\mu mg$, e portanto a aceleração será $a = -\mu g$. A velocidade do centro de massa enquanto o rolamento ocorre com deslizamento é***
$v(t) = v_0 + a\,t = J/m - \mu g t$.
***A força de atrito será responsável por um torque sobre a esfera, levando a uma rotação no sentido horário. Portanto, no referencial do centro de massa, teremos $\tau = |F_a r| = \mu mgr$, produzindo uma aceleração angular $\alpha = \tau/I_{cm} = \frac{5\mu g}{2r}$.***
***A velocidade angular será $\omega(t) = \alpha t$.***
***Quando $\omega(t)r = v(t)$, a esfera passa a rolar sem deslizar. Resolvendo a equação em $t$, chegamos então a $t = \frac{2}{7}\frac{J}{\mu mg}$***

**(4) [1,2]** Um pêndulo físico pode ser usado como um pêndulo balístico. Uma prancha de massa $M$ e comprimento $d$ é pendurada por dobradiças, e pode girar sem atrito. Uma bala de massa $m$ é disparada com velocidade $v$ contra a parte inferior da prancha. Considerando $M >> m$, a altura de elevação do centro de massa da prancha será:

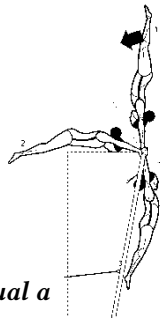



- ☐ ***(a)*** $h = \frac{3}{2}\frac{m^2v^2}{M^2g}$
- ☐ ***(b)*** $h = \frac{1}{2}\frac{m^2v^2}{M^2g}$
- ☐ ***(c)*** $h = 6\frac{m^2v^2}{M^2g}$
- ☐ ***(d)*** $h = 3\frac{m^2v^2}{M^2g}$
- ☐ ***(e)*** $h = \frac{2}{3}\frac{m^2v^2}{M^2g}$

***O momento angular da bala incidente em relação ao pivô é $L = mvd$. Sendo um problema de força central no referencial do pivô, este se conserva.***
***Após o impacto, a energia cinética será $T = \frac{L^2}{2I}$, onde pelo teorema dos eixos paralelos***
$I = \frac{Md^2}{12} + M(\frac{d}{2})^2 = \frac{Md^2}{3}$.
***Com isso, teremos $T = \frac{3m^2v^2}{2M}$ igual à energia potencial final correspondente à elevação $h$ do centro de massa***
$\Delta U = Mgh = T$.
***Teremos assim $h = \frac{3}{2}\frac{m^2v^2}{M^2g}$.***

**(5) [1,0]** Um ginasta (de massa $m = 60$ kg) está no ponto máximo de sua altura em um sistema de barras assimétricas, em repouso na condição de equilíbrio instável como mostra a figura. Ela começa a descer mantendo o corpo reto. Considerando que sua altura do punho aos pés é $h = 2$ m, e aproximando seu corpo como uma haste homogênea, qual a velocidade do seu centro de massa na parte inferior de sua trajetória? Considere g=10 m/s$^2$.

- ☐ ***(a)*** $v_{cm} = \sqrt{30}\, m/s$
- ☐ ***(b)*** $v_{cm} = \sqrt{80}\, m/s$
- ☐ ***(c)*** $v_{cm} = \sqrt{60}\, m/s$
- ☐ ***(d)*** $v_{cm} = \sqrt{120}\, m/s$
- ☐ ***(e)*** $v_{cm} = \sqrt{40}\, m/s$



***Resposta: O momento de inércia relativo ao ponto de giro (eixo da barra) é igual a*** $I = I_{cm} + m * (h/2)^2 = mh^2/12 + mh^2/4 = mh^2/3 = 80\, kgm^2$.
***A variação de energia potencial na descida é*** $\Delta U = mgh = 1.200\, J$.
***Esta variação de energia é convertida em energia cinética, correspondendo ao giro em torno da barra*** $\Delta T = I\omega^2/2 = 40\omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{30}\, rad/s$.
***A velocidade do centro de massa, a 1 m da barra, é*** $v_{cm} = \omega \cdot 1m = \sqrt{30}\, m/s$.

**FORMULÁRIO**

Momentos de inércia (eixo de simetria, passando pelo centro de massa):
Anel: $I_{CM} = MR^2$; Cilindro: $I_{CM} = \frac{MR^2}{2}$;
Esfera: $I_{CM} = \frac{2MR^2}{5}$; Haste: $I_{CM} = \frac{M\ell^2}{12}$;

Momento de Inércia: $I = \sum m_i r_i^2$; Teorema dos eixos paralelos: $I = I_{CM} + Md^2$

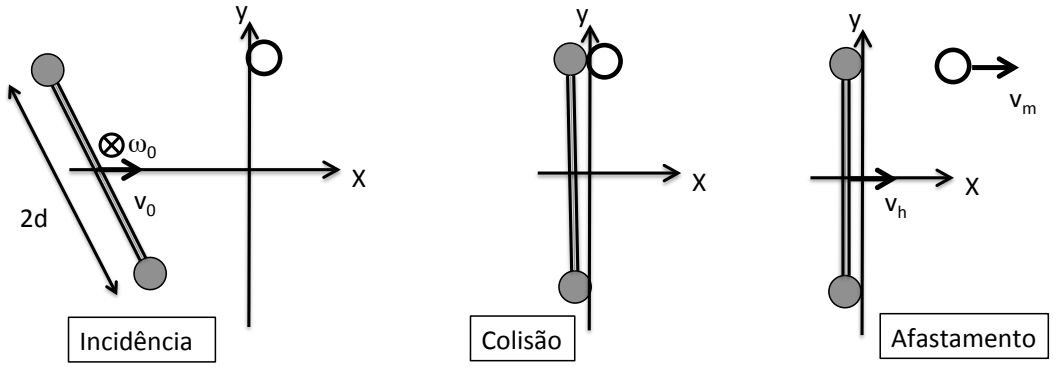
$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$; $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} + \vec{L}_{int}$ Energia cinética do corpo: $T = \frac{MV_{cm}^2}{2} + \frac{L_{int}^2}{2I_{CM}}$

## QUESTÃO DISCURSIVA

**Todas as respostas devem ser justificadas e os cálculos devem estar descritos nas respostas.**

Um corpo de massa $m$ é atingido frontalmente por uma das esferas de um haltere, formado por duas esferas, de massa $3m$ cada uma, separadas por uma distância $2d$, que se aproxima com velocidade do centro de massa do haltere $\vec{v} = v_0\hat{i}$ e velocidade angular $\vec{\omega}_0 = -\omega_0\hat{k}$.

A figura mostra a incidência do haltere sobre a massa, o instante da colisão e a movimentação dos corpos após o evento. Após a colisão, a velocidade angular do haltere vai a zero.




Calcule em termos de $m$, $d$, $v_0$ e $\omega_0$

[0,25] a) O vetor momento linear inicial do sistema.

$\vec{p}_i = 6mv_0\hat{i}$

[0,25] b) O vetor momento angular inicial do sistema em relação à origem indicada no gráfico.

$I_{cm} = 2(3m)d^2 \rightarrow \vec{L}_i = I_{cm}\vec{\omega}_0 = -6md^2\omega_0\hat{k}$

[0,5] c) A energia cinética inicial do sistema.

$T = T_t + T_r = (6m)\frac{v_0^2}{2} + \frac{L_i^2}{2I_{cm}} = 3m(v_0^2 + d^2\omega_0^2)$

Considerando que a colisão é perfeitamente elástica (ou seja, a energia cinética global de translação E rotação se conserva), calcule:

[1,0] d) O vetor velocidade $\vec{v}_m$ da massa $m$, em termos da massa $m$, da distância $d$ e da velocidade angular $\omega_0$.

Sugestão: use conservação de momento angular.

***Da conservação de momento angular, temos apenas a contribuição da componente de translação da massa $m$, pois o momento angular intrínseco do haltere é nulo e o seu vetor do centro de massa é colinear ao vetor velocidade.***

***Com isso*** $\vec{L}_f = mv_md\hat{k} = \vec{L}_i \rightarrow \vec{v}_m = 6d\omega_0\hat{i}$.

[2,0] e) O vetor velocidade do centro de massa do haltere antes da colisão ($\vec{v}_0$), e depois da colisão ($\vec{v}_h$), em termos da massa $m$, da distância $d$ e da velocidade angular $\omega_0$.

Sugestão, use conservação de momento linear e conservação de energia cinética.

***Da conservação de momento teremos*** $\vec{p}_m + \vec{p}_h = \vec{p}_i$. ***Portanto*** $m\vec{v}_m + 6m\vec{v}_h = 6m\vec{v}_0 \rightarrow v_h = v_0 - d\omega_0$.

***Por outro lado, a energia cinética final do sistema será***

$$T_f = \frac{m}{2}v_m^2 + \frac{6m}{2}v_h^2 = 18md^2\omega_0^2 + 3m(v_0 - d\omega_0)^2 = 18md^2\omega_0^2 - 6mv_0d\omega_0 + 3m(v_0^2 + d^2\omega_0^2).$$

***Mas como*** $T_i = 3m(v_0^2 + d^2\omega_0^2) = T_f$, ***isto implica em*** $18md^2\omega_0^2 = 6mv_0d\omega_0 \rightarrow \vec{v}_0 = 3d\omega_0\vec{i}$.

***Como vimos,*** $v_h = v_0 - d\omega_0 = 3d\omega_0 - d\omega_0 \rightarrow \vec{v}_h = 2d\omega_0\hat{i}$.

Nas contas, despreze os raios das esferas, considerando-as massas pontuais. No haltere, despreze a massa da haste.