Física I - Resumo para a P3 - 2016

Por Arthur Valle Salles

I - Rotações

Até agora, estamos acostumados a trabalhar com corpos pontiformes (de dimensões desprezíveis). No entanto, nos problemas reais, temos objetos com dimensões relevantes. Nesta parte da matéria, vamos aprender a lidar com esses casos.

Qual o principal desafio? Em um corpo com dimensões não-desprezíveis, cada ponto pode ter uma velocidade diferente

Para facilitar um pouquinho, vamos trabalhar apenas com <u>corpos rígidos</u>, que são aqueles em que a distância entre dois pontos do corpo não se alteram. Ou seja, um corpo que não se deforma

(Não cai na prova, mas matematicamente:

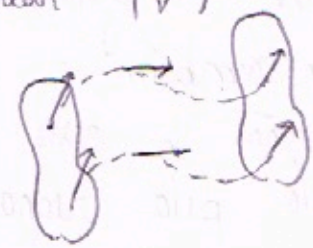
$$(A-B)\cdot\vec{v}_A = (A-B)\cdot\vec{v}_B$$

Para todos A e B no corpo

)

De que formas um corpo rígido pode se movimentar?

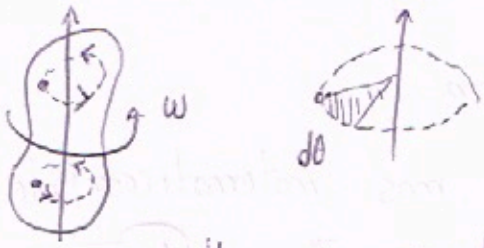
A. Translação Pura: todos os pontos do corpo têm a mesma velocidade linear ($\vec{v}$)



B. Rotação Pura : o corpo gira ao redor de um eixo fixo. Todos os pontos têm mesma velocidade angular (ω)

C. Movimento Geral : no geral, o movimento de um corpo é um misto de rotação e translação

* O que é ω? em uma rotação pura, os pontos fora do eixo de rotação percorrem uma trajetória circular:



Em um intervalo dt, o ponto vai se deslocar de um ângulo $d\theta$. A velocidade angular (ω) tem módulo

$$\boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt}}$$

Como velocidade angular é um vetor ($\vec{\omega}$), temos que saber também:

→ Direção : direção do eixo de rotação

→ Sentido : dado pela regra do saca-rolha

Para relacionar velocidade linear com velocidade angular, costumávamos usar no ensino médio:

$$\boxed{V = \omega r}$$

Que vale para rotação pura, com ponto a uma distância r do eixo

Num caso geral, podemos usar

$$\boxed{\vec{V_A} = \vec{V_B} + \vec{\omega} \wedge (A-B)}$$

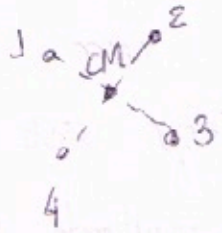
Onde $\vec{V_B}$ é a velocidade de um ponto que já conheço.

II - Centro de Massa

Como vimos na fórmula anterior, se soubermos a velocidade linear ($\vec{v}$) de um ponto do corpo e seu vetor rotação, encontramos a velocidade de qualquer outro ponto.

Assim, podemos descrever completamente o movimento de um corpo rígido indicando seu $\vec{\omega}$ e a velocidade de um de seus pontos.

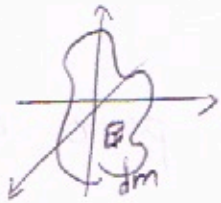
No geral, esse ponto para o qual teremos a velocidade será o centro de massa (CM) do corpo. Sua posição é dada por:



$$\boxed{X_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \qquad Y_{CM} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}}$$

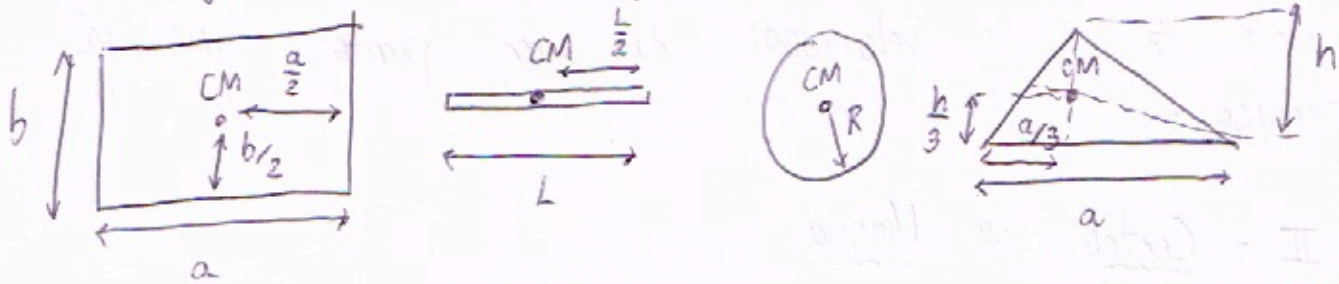
Em que (x_i, y_i) são as posições dos pedaços de massa m_i que formam o corpo.

Para um corpo rígido, se dividirmos em pedacinhos infinitesimais de massa dm:

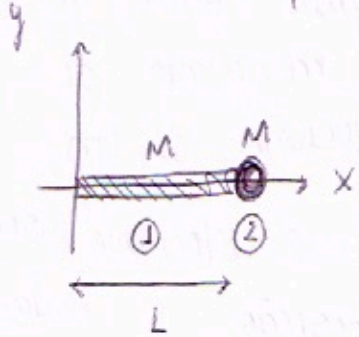


$$x_{cm} = \frac{\int x\,dm}{\int dm} \qquad y_{cm} = \frac{\int y\,dm}{\int dm} \qquad z_{cm} = \frac{\int z\,dm}{\int dm}$$

Não teremos que usar tais integrais, no entanto, pois, para corpos de densidade uniforme, o centro de massa é igual ao centro geométrico da figura



E se tivermos um corpo que combina figuras usamos as fórmulas da página anterior



$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{M\left(\frac{L}{2}\right) + ML}{M + M}$$

$$x_{cm} = \frac{3L}{4}$$

III - 2ª Lei de Newton

Um dos tópicos desta matéria é dinâmica, ou seja, relacionar forças aplicadas no corpo com seu movimento. Uma primeira forma de fazer isso é pela lei de Newton.

$$\boxed{\vec{R} = m_{total} \cdot \vec{a}_{cm}}$$

$\vec{R}$ = resultante das forças externas
m_{total} = massa do sistema
$\vec{a}_{cm}$ = aceleração centro de massa

IV - Energia Cinética

Vamos imaginar um corpo girando ao redor de um eixo fixo

Apesar de não sair do lugar, percebe-se que o corpo tem energia cinética (tem pontos com $v \neq 0$)

Para calcular energia cinética total do corpo podemos fazer:

$$K = \sum \frac{m_i v_i^2}{2}$$

Dividindo o corpo em pedacinhos de massa m_i e velocidade $\vec{v_i}$.

Mas $v = \omega r$, assim:

$$K = \frac{\sum m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \left(\sum m_i r_i^2\right) \cdot \frac{\omega^2}{2}$$

ou, se fizermos infinitos pedacinhos:

$$K = \left(\int r^2 dm\right) \frac{\omega^2}{2}$$

Chamos $\boxed{I = \int r^2 dm = \sum m_i r_i^2}$ de MOMENTO DE INÉRCIA

E portanto: $K = \frac{I\omega^2}{2}$ para uma rotação pura.

Em um caso qualquer:

$$\boxed{K = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2}$$

Para um ponto O qualquer

$$K = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + m \vec{v_0} \cdot \vec{\omega} \wedge (G - O)$$

Ou, para um ponto O de velocidade $V_0 = 0$:

$$K = \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

Fica uma dúvida: como calcular I?

V - Momento de Inércia

Para uma partícula:

$$I = m r^2$$

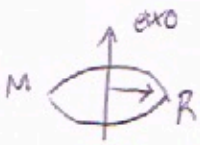
Em que r é a distância até o eixo

Para um corpo rígido

$$\boxed{I = \int r^2 \, dm}$$

Alguns exemplos:

① Anel

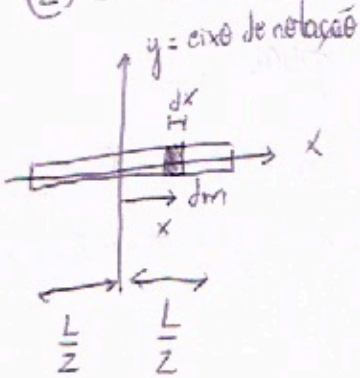


$$I = \int r^2 \, dm$$

Mas como todos pontos têm distância $r = R$ do eixo, r^2 é uma constante

$$I = R^2 \underbrace{\int dm}_{\text{massa total}} \Rightarrow I = MR^2$$

② Barra



Neste caso, cada ponto tem uma distância diferente até o eixo de rotação (y). Por isso dividimos em pedacinhos de comprimento dx e massa $dm = \lambda \, dx = \frac{M}{L} dx$

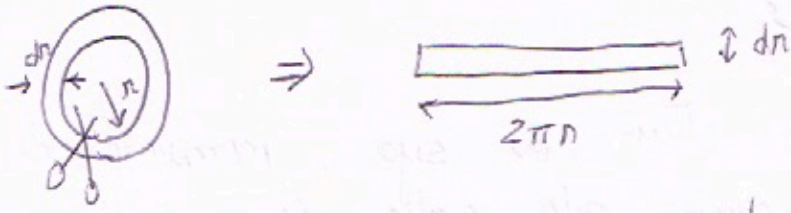
$$I = \int r^2 \, dm = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \left(\frac{M}{L} dx\right) = \frac{M}{L} \left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}$$

$$\boxed{I = \frac{ML^2}{12}}$$

③ Disco

Divido em pedaços com a mesma distância ao eixo

Para cada r: temos comprimento $2\pi r$ e largura dr



A área desse pedaço é: $A = 2\pi r\, dr$

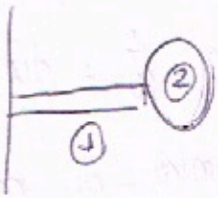
E sua massa é: $dm = \underbrace{\left(\frac{M}{\pi R^2}\right)}_{\text{densidade superficial}} 2\pi r\, dr = \frac{2Mr}{R^2}\, dr$

Calculamos:

$$I = \int r^2\, dm = \int_0^R r^2 \left(\frac{2Mr}{R^2}\, dr\right)$$

$$I = \frac{MR^2}{2}$$

<u>Observação</u>: Se tivermos um corpo formado por algumas figuras podemos somar



$$I = I_1 + I_2$$

Teorema dos eixos paralelos

No exemplo ③ calculamos o momento de inércia com o eixo passando pelo centro do corpo. Se quisen o momento de inércia com um eixo passando por um ponto A na borda do disco, preciso calcular de novo? NÃO

Se eu conheço I_{cm}, ou seja, momento de inércia para um eixo passando pelo centro de massa do corpo e quisen I_A, o momento para um eixo paralelo passando por A, posso usar:

$$\boxed{I_A = I_{cm} + Md^2}$$

Onde d é a distância entre os 2 eixos.

* OS 2015

VI - 2ª Lei de Newton para as rotações

De forma similar ao que temos para as grandezas da translação ($\vec{R} = m\,\vec{a}_{cm}$), para a rotação temos:

$$\boxed{\vec{\tau}_{ext} = I\,\vec{\alpha}} \quad \text{ou} \quad \tau = I\alpha$$

Em que $\vec{\tau}_{ext}$ é o torque total das forças externas, $\vec{\alpha}$ é a aceleração angular ($\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$)

*Obs: calcular torques adotando como polo ou o centro de massa ou um ponto fixo ($\vec{a} = \vec{0}$). O momento de inércia deve ser calculado para o mesmo ponto que usar no torque

Para O qualquer: $\vec{\tau}_{ext,O} = m(G-O) \wedge \vec{a}_O + I_O \underbrace{\dot{\omega}}_{\vec{\omega} = \vec{\alpha}} k$

Obs: cálculo do torque

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$\vec{r}$ é o vetor que liga o polo (ponto em relação ao qual calculo o torque) ao ponto de aplicação de $\vec{F}$

Para figuras planas: calculo força x braço e vejo se o sentido é positivo ou negativo pela regra da mão direita (mão no sentido da força, fecha apontando para o polo)

VIII - Momento Angular

Outra forma de escrever a 2ª Lei de Newton para as rotações é:

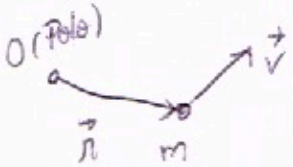
$$\boxed{\tau_{ext} = \frac{dL}{dt}} \qquad \left(\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt} \right)$$

Em que $\vec{L}$ é o chamado momento angular do corpo

i) Para partícula: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v})$

$$\boxed{\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}}$$

Em que $\vec{r}$ é o vetor que vai de um polo que adotamos para calcular $\vec{L}$ até o ponto



ii) Para corpo rígido:

$$\boxed{\vec{L}_{cm} = I_{cm}\,\vec{\omega}}$$ para polo no CM

Para outros polos:

$$\vec{L}_0 = I_{cm}\vec{\omega} + (CM - O) \wedge (m\vec{v}_0)$$

iii) Conservação do momento angular

Se o torque das forças externas é nulo

$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

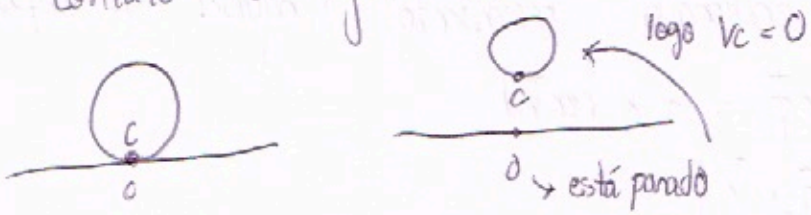
Então há conservação do momento angular

@ustes 2015

IX - Rolamento

Um caso muito comum de rotação combinada com translação é o de um disco que rola sobre uma superfície sem escorregar

Se rola sem escorregar, a velocidade no ponto de contato é igual dos dois lados



Chamamos C de centro instantâneo de rotação pois, por um instante, é como se o corpo girasse ao redor de C

Nesse caso, para o centro de massa

$$v_{cm} = \omega r \quad e \quad a_{cm} = \omega^2 r$$

@ 2011

X - Trabalho

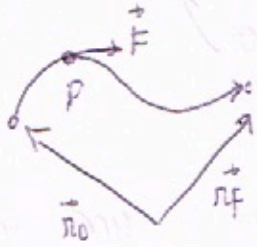
Muitas vezes vamos usar o teorema da energia cinética

$$\boxed{W = K_f - K_i}$$

Ou seja, o trabalho das forças externas (W) é igual à variação da energia cinética.

Como calcular trabalho?

i) Para uma força qualquer $\vec{F}$ agindo sobre um corpo que vai de uma posição $\vec{r}_0$ para $\vec{r}_f$:



$$W = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

ii) Para força peso:

$$\boxed{W_P = mg(h_i - h_f)}$$

iii) Para força normal

$\boxed{W_N = 0}$, pois a normal é ortogonal ao deslocamento ($\vec{N} \cdot d\vec{l} = 0$)

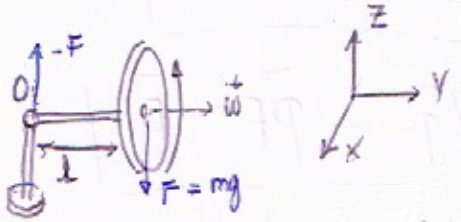
iv) Para força elástica

$$\boxed{W_{el} = \frac{K}{2}(x_i^2 - x_f^2)}$$

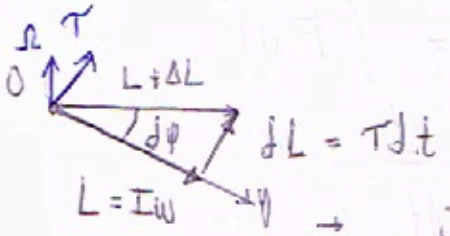
x = deformação da mola

XII - Giroscópio

Na sua forma mais simples, um giroscópio é formado por um disco acoplado a uma haste girando com velocidade $\vec{\omega}$



A força peso, juntamente com sua reação no apoio vão gerar um torque sobre o disco / haste : $\vec{\tau} = -Mgl\hat{i}$



Sabemos que : $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow d\vec{L} = \vec{\tau}\,dt$

Assim, o momento angular que inicialmente era $\vec{L} = I\omega\,\hat{j}$ vai ser alterado, somando um $d\vec{L}$ na direção $(-\hat{i})$

Mas : $dL = \tau\,dt = Mgl\,dt$

* como $d\vec{L}$ é ortogonal a $\vec{L}$, $\vec{L}$ não muda módulo, apenas direção

E graficamente : $dL = L\,d\varphi$

Igualando : $Mgl\,dt = L\,d\varphi$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{Mgl}{L} \Rightarrow \boxed{\Omega = \frac{Mgl}{I\omega}}$$

Quando o eixo gira $d\varphi$, o torque também gira $d\varphi$, de forma que $\frac{d\varphi}{dt}$ permanece constante. Ou seja, o eixo vai girar no plano xy, evitando que o disco "caia" em z. Essa é o chamado movimento de precessão