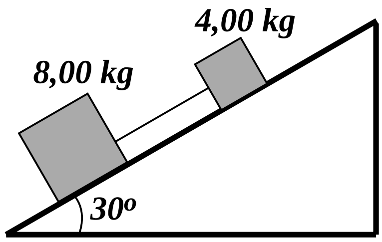
FEP2195 - Física Geral e Experimental para Engenharia I

Prova Substitutiva - Gabarito



1. Dois blocos de massas $4,00\ kg$ e $8,00\ kg$ estão ligados por um fio e deslizam para baixo de um plano inclinado de $30,0°$ (figura). O coeficiente de atrito cinético entre o bloco de $4,00\ kg$ e o plano é igual a $\frac{\sqrt{3}}{8}$; e o coeficiente entre o bloco de $8,00\ kg$ e o plano é igual a $\frac{\sqrt{3}}{4}$. $\left[sen(30°) = \frac{1}{2} \text{ e } cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

(a) (0,5) Qual é a aceleração inicial de cada bloco?

(b) (0,5) Nesse caso, qual é a tensão no fio? Justifique.

(c) (1,0) Qual é a aceleração final de cada bloco?

(d) (0,5) Faça um diagrama de forças para cada bloco, representando a situação final.

SOLUÇÃO:

Dados do problema:

- Ângulo de inclinação: $\theta = 30,0°$
- Bloco 1:
  - Massa: $m_1 = 8\ kg$
  - Coeficiente de atrito: $\mu_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$
- Bloco 2:
  - Massa: $m_2 = 4\ kg$
  - Coeficiente de atrito: $\mu_2 = \frac{\sqrt{3}}{8}$

(a) Qual é a aceleração inicial de cada bloco?

Cálculo da aceleração de cada bloco considerado isoladamente:
Bloco 1:

$$N_1 - m_1 g\, cos(\theta) = 0$$

$$m_1 g\, sen(\theta) - f_1 = m_1 a_1$$

onde

$$f_1 = N_1 \mu_1 = \mu_1 m_1 g\, cos(\theta)$$

$$m_1 g\, sen(\theta) - \mu_1 m_1 g\, cos(\theta) = m_1 a_1$$

$$a_1 = g\,[sen(\theta) - \mu_1\, cos(\theta)] = 10 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$a_1 = \frac{5}{4}\ m/s^2$$

De forma análoga:

$$a_2 = g\,[sen(\theta) - \mu_2\, cos(\theta)] = 10 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$a_2 = \frac{25}{8}\ m/s^2$$

Como $a_2 > a_1$ os dois blocos descerão separadamente, até se tocarem. Assim, a aceleração inicial dos blocos será:

$$\boxed{a_1 = \frac{5}{4}\ m/s^2 \text{ e } a_2 = \frac{25}{8}\ m/s^2}$$

(b) Nesse caso, qual é a tensão no fio? Justifique.

Como inicialmente $a_2 > a_1$ e os dois blocos se movem independentemente, o fio não interferirá no movimento e a tensão no fio será nula $T = 0$.

(c) Qual é a aceleração final de cada bloco?

Depois que os blocos se tocarem, eles descerão juntos, ou seja, com a mesma aceleração. Assim:

$$m_1 g\, sen(\theta) - f_1 + F = m_1 a$$

$$m_2 g\, sen(\theta) - f_2 - F = m_2 a$$

onde F é a força de contato entre os dois blocos.

$$m_1 g\, sen(\theta) - \mu_1 m_1 g\, cos(\theta) + F = m_1 a$$

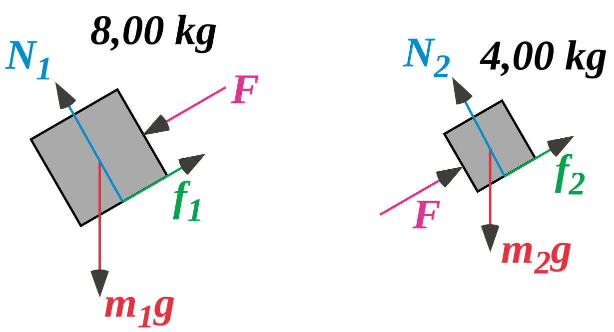
$$m_2 g\, sen(\theta) - \mu_2 m_2 g\, cos(\theta) - F = m_2 a$$

A aceleração do sistema será dada por:

$$a = \frac{(m_1+m_2)\, sen(\theta) - (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)\, cos(\theta)}{(m_1+m_2)} g = \frac{12 \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 8 + \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot 4\right) \frac{\sqrt{3}}{2}}{12} 10$$

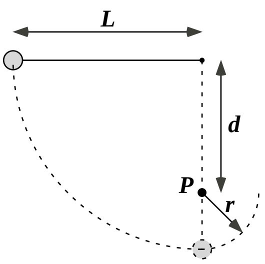
$$\boxed{a = \frac{45}{24}\ m/s^2}$$

(d) Faça um diagrama de forças para cada bloco, representando a situação final.



onde $m_i g$ é a força peso, N_i a normal de contato com o plano, f_i a força de atrito e F a força de contato entre os dois corpos.

2. A corda da figura ao lado tem comprimento L e a distância até o pino fixo P é d . Quando a bola é liberada, a partir do repouso na posição indicada na figura, descreve a trajetória indicada pela linha tracejada. Expresse as respostas em termos de L, d e g.



(a) (0,75) Qual é a velocidade da bola quando está passando pelo ponto mais baixo da trajetória.

(b) (0,75) Qual é a velocidade da bola quando chega ao ponto mais alto da trajetória depois que a corda toca o pino?

(c) (1,0) Calcule o valor mínimo de d para que a bola consiga fazer uma volta completa em torno do pino.

SOLUÇÃO:

(a) Qual é a velocidade da bola quando está passando pelo ponto mais baixo da trajetória.

Usando conservação da energia mecânica, com o zero da energia potencial gravitacional adotado no ponto de mínimo da trajetória, temos:

$$mgL = \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$\boxed{v_B = \sqrt{2gL}}$$

(b) Qual é a velocidade da bola quando chega ao ponto mais alto da trajetória depois que a corda toca o pino?

Usando novamente conservação da energia mecânica

$$mgL = \frac{1}{2}mv_A^2 + mg(2r)$$

$$\frac{1}{2}v_A^2 = g(L - 2r)$$

Como $r = L - d$ temos

$$\frac{1}{2}v_A^2 = g(L - 2L + 2d)$$

$$\boxed{v_A = \sqrt{2g(2d - L)}}$$

(c) Calcule o valor mínimo de d para que a bola consiga fazer uma volta completa em torno do pino.

Para que a bola consiga fazer uma volta completa em torno do pino ela deve chegar à altura máxima com velocidade suficiente, ou seja, aceleração centrípeta suficiente:

$$mg + T = m\frac{v_m^2}{r}$$

A mínima velocidade ocorre no limite em que $T \to 0$:

$$v_m^2 = rg$$

Usando conservação da energia mecânica, temos:

$$mgL = \frac{1}{2}mv_m^2 + mg(2r)$$

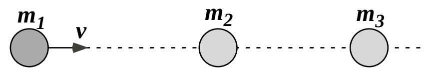
$$\frac{1}{2}mrg + 2mgr = mgL$$

$$\frac{r}{2} + 2r = L \quad \Rightarrow \quad r = \frac{2}{5}L$$

Como $d = L - r$, o valor mínimo de d será

$$\boxed{d = \frac{3}{5}L}$$

3. Uma partícula de massa m_1 desloca-se com velocidade v em direção a duas outras partículas idênticas, de massas m_2 e m_3 ($m_2 = m_3$), alinhadas em um mesmo eixo, inicialmente separadas e em repouso. As colisões entre as partículas são elásticas.



(a) (1,5) Partindo das equações de conservação, calcule as velocidades finais (módulo e sentido) das três partículas considerando que $m_1 > m_2$

(b) (1,0) Considerando agora que $m_1 \leq m_2$, calcule as velocidades finais (módulo e sentido) das três partículas.

SOLUÇÃO:
(a) Partindo das equações de conservação, calcule as velocidades finais (módulo e sentido) das três partículas considerando que $m_1 > m_2$

Inicialmente a partícula de massa m_1 vai se chocar com a partícula de massa m_2. Supondo que as forças externas são desprezíveis, podemos usar a conservação do momento linear:

$$m_1 v = m_1 v_{11} + m_2 v_{21} \tag{1}$$

onde v_{11} e v_{21} são as velocidades das partículas de massa m_1 e m_2 depois do choque, respectivamente. Como no enunciado é dito que os choques são elásticos, podemos usar conservação da energia cinética:

$$\frac{1}{2}m_1 v^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{11}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{21}^2 \tag{2}$$

Da equação (1) temos:

$$m_1(v - v_{11}) = m_2 v_{21} \tag{3}$$

Da equação (2) temos:

$$m_1(v^2 - v_{11}^2) = m_2 v_{21}^2 \quad \Rightarrow \quad m_1(v - v_{11})(v + v_{11}) = m_2 v_{21}^2 \tag{4}$$

Dividindo a equação (4) pela equação (3) temos:

$$(v + v_{11}) = v_{21} \tag{5}$$

Substituindo o valor de v_{21} obtido na equação (5) na equação (3) obtemos:

$$m_1(v - v_{11}) = m_2(v + v_{11}) \tag{6}$$

de onde obtemos que:

$$v_{11} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v \tag{7}$$

Substituindo o valor de v_{11} na equação (5) temos:

$$v_{21} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v \tag{8}$$

Como $m_1 > m_2$ tanto v_{11} quanto v_{21} têm o mesmo sentido que v e $v_{21} > v_{11}$.

Em seguida a partícula de massa m_2, com velocidade v_{21} se choca com a partícula de massa m_3. Seguindo o mesmo raciocínio utilizado acima, podemos determinar a velocidade das partículas depois do choque.

Velocidade da partícula de massa m_2 depois do choque:

$$v_{22} = \frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3} v_{21} \tag{9}$$

mas como $m_2 = m_3$ temos

$$v_{22} = 0$$

Velocidade da partícula de massa m_3 depois do choque:

$$v_{32} = \frac{2m_2}{m_2 + m_3} v_{21} = \frac{2m_2}{m_2 + m_3} \cdot \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v \tag{10}$$

Como a partícula de massa m_2 tem velocidade nula depois do segundo choque, ela será novamente alcançada pela partícula de massa m_1 com velocidade v_{11}. Depois do choque as partículas terão as seguintes velocidades.

Velocidade da partícula de massa m_1 depois do choque:

$$v_{13} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{11} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 v \tag{11}$$

Velocidade da partícula de massa m_2 depois do choque:

$$v_{23} = \frac{2m_1}{m_1+m_2}v_{11} = \frac{2m_1}{m_1+m_2} \cdot \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v = \frac{2m_1(m_1-m_2)}{(m_1+m_2)^2}v \tag{12}$$

Portanto, as velocidades finais das três partículas será:

$$\boxed{\text{Partícula de massa } m_1 \ v_{13} = \left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)^2 v \text{ no mesmo sentido de } v}$$

$$\boxed{\text{Partícula de massa } m_2 \ v_{23} = \frac{2m_1(m_1-m_2)}{(m_1+m_2)^2}v \text{ no mesmo sentido de } v}$$

$$\boxed{\text{Partícula de massa } m_3 \ v_{32} = \frac{2m_1}{m_1+m_2}v \text{ no mesmo sentido de } v}$$

(b) Considerando agora que $m_1 \leq m_2$, calcule as velocidades finais (módulo e sentido) das três partículas.

Podemos usar os resultados obtidos no item (a). Depois do primeiro choque, as partículas terão as seguintes velocidades.

Velocidade da partícula de massa m_1 depois do choque:

$$v_{11} = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v \tag{13}$$

Se $m_1 = m_2$ $v_{11} = 0$. Se $m_1 < m_2$ v_{11} terá sentido contrário a v.

Velocidade da partícula de massa m_2 depois do choque:

$$v_{21} = \frac{2m_1}{m_1+m_2}v \tag{14}$$

Em seguida a partícula de massa m_2, com velocidade v_{21} se choca com a partícula de massa m_3.

Velocidade da partícula de massa m_2 depois do choque:

$$v_{22} = \frac{m_2-m_3}{m_2+m_3}v_{21} \tag{15}$$

mas como $m_2 = m_3$ temos

$$v_{22} = 0$$

Velocidade da partícula de massa m_3 depois do choque:

$$v_{32} = \frac{2m_2}{m_2+m_3}v_{21} = \frac{2m_2}{m_2+m_3} \cdot \frac{2m_1}{m_1+m_2}v = \frac{2m_1}{m_1+m_2}v \tag{16}$$

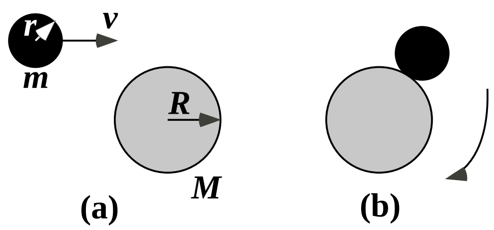
Como a partícula de massa m_1 tem velocidade nula ou oposta a v ela não se chocará novamente, como no caso anterior, com a partícula de massa m_{22}. Portanto, as velocidades finais das três partículas será:

$$\boxed{\text{Partícula de massa } m_1 \; v_{11} = 0 \text{ se } m_1 = m_2 \text{ ou}}$$
$$\boxed{v_{11} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v \text{ no sentido oposto de } v \text{ se } m_1 < m_2}$$

$$\boxed{\text{Partícula de massa } m_2 \; v_{22} = 0}$$

$$\boxed{\text{Partícula de massa } m_3 \; v_{32} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v \text{ no mesmo sentido de } v}$$

4. Um disco com uma massa de m e um raio de r desliza ao longo de uma mesa de ar à velocidade de v como mostrado na figura. Ele faz uma colisão tangente com um segundo disco tendo raio $R = 2r$ e massa $M = 2m$ (inicialmente em repouso) de forma que suas bordas apenas se toquem. Como suas bordas estão revestidas com uma cola de ação instantânea, os discos ficam grudados e giram após a colisão (ver figura). O momento de inércia de um disco em relação a um eixo passando pelo seu centro de massa e perpendicular ao plano do disco é $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$. Expresse as suas respostas em termos de m, r e v.



(a) (1,0) Qual é o momento angular (módulo, direção e sentido) do sistema em relação ao centro de massa?

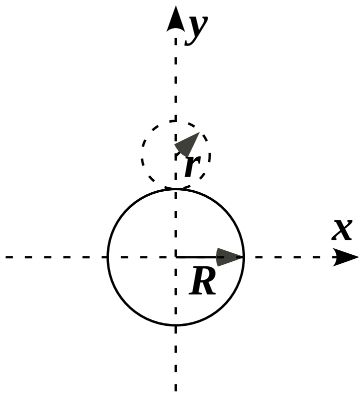
(b) (1,5) Qual é a velocidade angular do sistema ao redor do seu centro de massa após a colisão?

SOLUÇÃO:
(a) Qual é o momento angular (módulo, direção e sentido) do sistema em relação ao centro de massa?

Cálculo do centro de massa do sistema no instante do choque (ver figura)

$$x_{CM} = 0$$

$$y_{CM} = \frac{m(r+R)}{(m+M)} = \frac{m(r+2r)}{(m+2m)} = r$$



Distância entre o centro do disco de massa m e y_{CM}:

$$d = R - y_{CM} + r = 2r - r + r = 2r$$

Considerando que não existam torques externos agindo sobre o sistema o momento angular deve se conservar durante o choque. Assim, o módulo do momento angular do sistema será:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad \Rightarrow \quad L = mvd = 2mvr$$

Assim, o vetor momento angular terá

$\boxed{\text{Módulo } L = 2mvr}$

$\boxed{\text{direção perpendicular ao plano do choque}}$

$\boxed{\text{sentido entrando na folha de papel}}$

(b) Qual é a velocidade angular do sistema ao redor do seu centro de massa após a colisão?

Considerando que o momento angular se conserva, depois da colisão teremos:

$$L = I\omega$$

onde I é o momento de inércia do sistema depois do choque.

$$I = \frac{1}{2}mr^2 + md^2 + \frac{1}{2}MR^2 + My_{CM}^2$$

$$I = \frac{1}{2}mr^2 + 4mr^2 + 4mr^2 + 2mr^2$$

$$I = \frac{21}{2}mr^2$$

A velocidade angular de rotação será:

$$\omega = \frac{L}{I} = 2mvr\frac{2}{21mr^2}$$

$$\boxed{\omega = \frac{4v}{21r}}$$