**4320195-Física Geral e Exp. para a Engenharia I - Prova de Recuperação - 19/07/2012**

Nome:_____________________________________________ $N^o$ USP: _______________

Professor:_____________________________________________ Turma: _______________

---

- A duração da prova é de 2 horas.
- Material: lápis, caneta, borracha, régua. O uso de calculadora é proibido
- Deixe indicada a raiz de números que não sejam quadrados perfeitos. Não é necessário fazer aproximações.
- Preencha todas as folhas, inclusive esta, com o seu nome, número USP e o nome do seu professor, de forma legível.
- Resolva cada exercício começando na frente da folha de respostas possuindo o mesmo número que o exercício, utilizando, se for necessário, o verso da folha.
- Justifique todas as suas respostas com comentários, fórmulas e cálculos intermediários, sem esquecer as unidades das grandezas físicas pedidas.
- Deixe sobre a carteira documento de identificação (identidade ou carteira da USP)
- Revisão da prova e resultados serão anunciados no site da disciplina.

---

Formulário

$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ $\quad$ $\frac{d}{dx}(\frac{1}{x}) = \frac{d}{dx}(x^{-1}) = -x^{-2}$ $\quad$ $\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$

$\int x^n dx = \frac{1}{(n+1)}x^{n+1}$ $\quad$ $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$

---

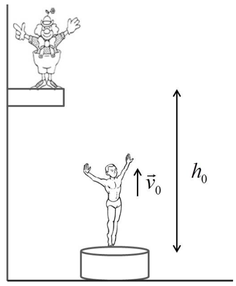
**(1)** Um acrobata de massa $m_A$ salta na direção vertical de um trampolim com uma velocidade inicial $v_0$. Quando o acrobata atinge uma altura $h_0$ este agarra um palhaço de massa $m_P$. Assuma que o tempo que o acrobata leva para agarrar o palhaço é desprezível.

(0,5) (a) Qual é a velocidade do acrobata imediatamente antes deste agarrar o palhaço.

(1,0) (b) Qual é a velocidade do acrobata imediatamente após agarrar o palhaço.

(0,5) (c) Qual é a altura que o acrobata e o palhaço alcançam.

(0,5) (d) Quão alto o acrobata e o palhaço chegariam se ambos tivessem a mesma massa $m_A = m_P$.




(a)

Neste caso a "colisão" entre o acrobata e o palhaço é uma colisão completamente inelástica, onde os dois corpos permabecem unidos depois da colisão.

Como o movimento é em uma direção vamos considerar o eixo y positivo para cima com origem no trampolim como nosso referencial.

Imediatamente antes da colisão o acrobata chega na plataforma em $y_{1A} = y_{1P} = h_0$ com velocidade $\vec{v}_{1A} = v_{1A}\hat{j}$ no instante $t_1$.

$v_{1A} = (v_0^2 - 2gh_0)^{\frac{1}{2}}$

(b)

Imediatamente depois da colisão $\vec{v}_{2AP} = v_{2AP}\hat{j}$

Assumindo que a colisão é instantânea temos que o momento do sistema se conserva.

O momento imediatamente antes da colisão:

$\vec{p}_{1A} = m_A v_{1A}\hat{j} = m_A(v_0^2 - 2gh_0)^{\frac{1}{2}}\hat{j}$

O momento imediatamente depois da colisão

$\vec{p}_{2AP} = (m_A + m_P)v_{2AP}\hat{j}$

pela conserção do momento

$m_A(v_0^2 - 2gh_0)^{\frac{1}{2}} = (m_A + m_P)v_{2AP}$

$v_{2AP} = \frac{m_A}{m_A+m_P}(v_0^2 - 2gh_0)^{\frac{1}{2}}$

(c)

$h_f = \frac{1}{2g}(v_{2AP})^2 + h_0$

$h_f = \frac{1}{2g}\frac{m_A^2}{(m_A+m_P)^2}(v_0^2 - 2gh_0) + h_0$

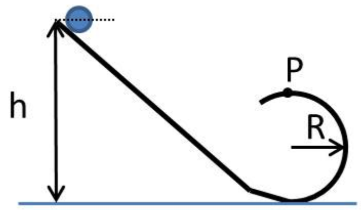
(d)

Quando a massa do acrobata é igual a massa do palhaço $m_A = m_P$

$\frac{m_A^2}{(m_A+m_P)^2} = \frac{1}{4}$

$h_f = \frac{1}{2g}\frac{m_A^2}{(m_A+m_P)^2}(v_0^2 - 2gh_0) + h_0 = \frac{1}{8g}(v_0^2 - 2gh_0) + h_0 = \frac{1}{4}(\frac{v_0^2}{2g} + 3h_0)$

**(2)** Uma bolinha de gude de massa $m$ e raio $r$ é solta a partir do repouso de uma altura $h$ (altura do centro-de-massa) em uma rampa composta de um plano inclinado em conjunto com um setor circular de raio $R$, conforme mostra a figura. Considere $R \gg r$.




(1,0) (a) Qual a altura mínima que a bolinha de gude deve ser solta de tal modo que esta não perca contato com a rampa na parte superior do setor circular, considerando que a mesma rola sem deslizar?

(0,5) (b) Agora considere que a bolinha deslise sem atrito e sem rolamento. Qual seria a altura mínima que a bolinha de gude deve ser solta de tal modo que esta não perca contato com a rampa na parte superior do setor circular neste caso?

Considere agora que a bolinha é lançada de uma mesma altura $h$ para os dois casos, rolamento sem deslizamento e deslizamento sem rolamento.

(0,5) (c) O trabalho da força peso no caso do deslizamento será maior, menor ou igual em relação ao caso do rolamento sem deslizamento? Justifique.

(0,5) (d) Qual dos dois casos terá energia cinética de translação maior? Justifique.

**Dados**: Esfera de massa $m$ e raio $r$, eixo de rotação passando pelo centro de massa:$I_{CM} = \frac{2}{5}mr^2$.

(a)

Conservação da energia mecânica

$E_1 = U_1 = mgh$

$E_2 = K_2 + U_2 = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + mg(2R)$

Rolamento sem deslizamento $v_{CM} = \omega r \Rightarrow \omega = \frac{v_{CM}}{r}$

$E_2 = \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\frac{v_{CM}^2}{r^2} + \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + mg(2R) = \frac{7}{10}mv_{CM}^2 + mg(2R)$

Condição limite para fazer o loop $mg = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{gR}$

$E_2 = \frac{7}{10}mgR + mg(2R) = \frac{27}{10}mgR$

$mgh = \frac{27}{10}mgR$

$h = 2,7R$

(b) No caso de deslizamento sem rolamento

$E_1 = U_1 = mgh$

$E_2 = K_2 + U_2 = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + mg(2R)$

$E_2 = \frac{1}{2}mgR + mg(2R) = \frac{5}{2}mgR$

$mgh = \frac{5}{2}mgR$

$h = 2,5R$

(c) O trabalho da força peso será igual nos dois casos.

Como a força peso não realiza torque pois esta age no CM que coincide com o eixo de rotação, o trabalho devido a rotação é nulo.

$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta = 0$

(d) A energia cinética de translação será maior no caso do deslizamento. Pois no caso do rolamento a energia cinética se distribuirá entre a energia de rotação e de translação.

**(3)** Considere um foguete com estágio único disparado a partir do repouso no espaço sideral, onde a aceleração da gravidade é desprezível. Sabendo que sua massa inicial é $m_0$ e que a velocidade relativa do gás de exaustão é dada por $v_{ex}$.

(1,0) (a) Determine a equação diferencial do movimento.

(1,0) (b) Determine a expressão para a velocidade do foguete em um instante $t$.

(0,5) (c) Qual deve ser a razão $m_0/m$ para que a velocidade do foguete seja igual a velocidade de exaustão dos gases?

(a) Considerando um instante $t$ e $t + \Delta t$ Conservação do momento

$P_i = P_f$

$P_i = mv$

$P_f = (m + dm)(v + dv) + (-dm)v' = mv + mdv - (v' - v)dm = mv + mdv + v_{ex}dm$

$mv = mv + mdv + v_{ex}dm$

$mdv = -v_{ex}dm \Rightarrow m\frac{dv}{dt} = -v_{ex}\frac{dm}{dt}$

(b)

$mdv = -v_{ex}dm \Rightarrow dv = -v_{ex}\frac{dm}{m}$

Integrando

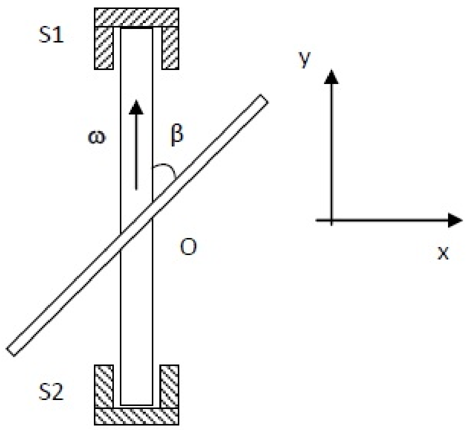
$\int\limits_{v_0}^{v} dv = -v_{ex} \int\limits_{m_0}^{m} \frac{dm}{m}$

$v - v_0 = v_{ex}ln(\frac{m_0}{m})$

(c)

$ln(\frac{m_0}{m}) = 1 \Rightarrow \frac{m_0}{m} = e$

**(4)** Considere uma barra delgada de comprimento $l$ e massa $m$, presa pelo seu centro $O$ e formando um ângulo $\beta$ (vide figura) com uma barra vertical que serve como eixo de rotação. A barra vertical gira sobre dois supportes $S1$ e $S2$ com velocidade angular $\omega$. Determine sua resposta em função de $m, l, \omega$, e $\beta$.



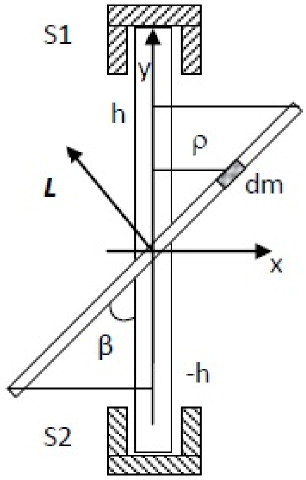

(0,7) (a) Calcule o momento de inércia da barra em torno de eixo de rotação $S1-S2$ (dica: use a coordenada y (vertical) como a variável de integração);

(0,5) (b) Determine os módulos das componentes do vetor momento angular na direção de y e perpendicular á barra vertical (dica: determine o ângulo do vetor momento angular com direção y);

(0,7) (c) Determine o módulo da variação do momento angular da barra relativo ao ponto $O$ durante uma meia volta.

(0,6) (d) Calcule o módulo do torque das forças externas e faça um diagrama indicando estas forças. (dica: considere a rotação por um ângulo pequeno de $\Delta\theta$ e faça o limite de $\Delta t \to 0$)

(a)




$dm = \lambda dl \Rightarrow \lambda = \frac{m}{l}$

$dl = dycos(\beta)$

$\rho = ytg(\beta)$

$h = \frac{l}{2}cos(\beta)$

$I_{S1-S2} = \int\limits_{-h}^{h} \rho^2 dm = \frac{\lambda tg(\beta)^2}{cos(\beta} \int\limits_{-h}^{h} y^2 dy = \frac{\lambda tg(\beta)^2}{cos(\beta} \frac{y^3}{3}|_{-h}^{h}$

$I_{S1-S2} = \frac{\lambda tg(\beta)^2}{cos(\beta} \frac{1}{3} 2 \frac{l^3 cos(\beta)^3}{8} = \frac{1}{12} ml^2 sen(\beta)^2$

(b) $L_y = I_{S1-S2}\omega = \frac{1}{12} ml^2 sen(\beta)^2 \omega$

$L = \frac{L_y}{sen(\beta)} = \frac{1}{12} ml^2 sen(\beta)\omega$

$L_\perp = Lcos(\beta) = \frac{1}{24} ml^2 sen(2\beta)\omega$

(c)

$\Delta L = \Delta L_\perp = 2L_\perp = \frac{1}{12} ml^2 sen(2\beta)\omega$

(d)

$\Delta L = \Delta L_\perp = \Delta\theta L_\perp$

$\frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} L_\perp$

$|\vec{\tau}_{ext}| = \frac{dL}{dt} = \omega L_\perp = \frac{1}{24} ml^2 sen(2\beta)\omega^2$