4320195-Física Geral e Exp. para a Engenharia I - Prova de Recuperação - 25/07/2013

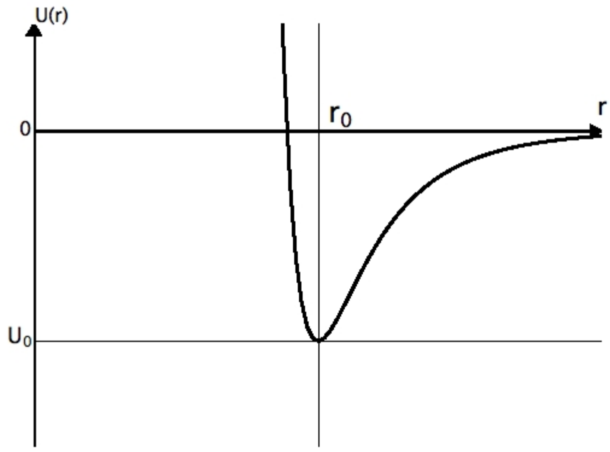
- ANOTE NOME, NÚMERO USP, TURMA e DOCENTE nas folhas de resposta.
- PROVA COM IDENTIFICAÇÃO INSUFICIENTE SERÁ IMEDIATAMENTE DESCARTADA!
- A duração da prova é de 2 horas.
- Material: lápis, caneta, borracha, régua. O uso de calculadora é proibido
- Deixe sobre a carteira documento de identificação (identidade ou carteira da USP)
- Resolva cada exercício começando na frente da folha de respostas possuindo o mesmo número que o exercício, utilizando, se for necessário, o verso da folha.
- Deixe indicada a raiz de números que não sejam quadrados perfeitos. Não é necessário fazer aproximações.
- *Justifique todas as suas respostas com comentários, fórmulas e cálculos intermediários, sem esquecer as unidades das grandezas físicas pedidas.*
- Resultados serão anunciados no site da disciplina.

---

1) A energia potencial de ligação entre átomos de moléculas diatômicas pode ser descrita, dentro de certos limites, pelo gráfico ao lado, dado pela equação

$$U(r) = \left(\frac{a}{r}\right)^{12} - \left(\frac{b}{r}\right)^{6}$$

onde r é a distância entre os núcleos dos átomos, a e b são constantes.



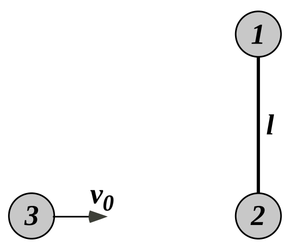
a) [1,0] Qual a equação da força $F(r)$ entre os átomos?

b) [1,0] Determine a distância de equilíbrio r_0.

c) [1,0] Determine a energia potencial mínima U_0.

Dê suas respostas somente em termos de a e b.

2) Um haltere é formado por duas partículas de massa m (1 e 2) ligadas por uma haste rígida, de massa desprezível e comprimento l. O haltere pode deslizar sem atrito sobre uma mesa. Uma partícula 3 de massa m, com velocidade inicial v_0 (perpendicular à haste do haltere) colide com uma das partículas, como mostrado na figura.



Sendo a colisão perfeitamente elástica, determine

a) [1,0] Imediatamente após a colisão, a velocidade linear das partículas 2 e 3 (indicando a direção e sentido).

b) [1,0] O impulso sofrido pela partícula 2.

c) [1,0] Após a colisão, qual a velocidade linear do centro de massa do haltere?

d) [1,0] Qual a velocidade angular do haltere?

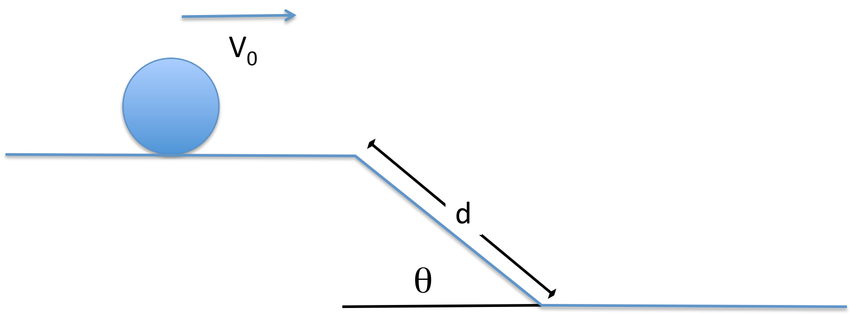
3) Um cilindro homogêneo, de raio R e massa M, rola sem deslizar sobre um plano horizontal, deslocando-se com velocidade v_0, até alcançar um plano com inclinação θ, continuando a rolar sem deslizamento, descendo ao longo de um comprimento d até atingir um novo plano horizontal.

a) [1,0] Qual o trabalho realizado no processo pela força peso?

b) [1,0] Qual a velocidade do cilindro na base do plano inclinado?

c) [1,0] Qual o coeficiente de atrito mínimo μ para que o cilindro desça o plano inclinado sem deslizar?

Dê suas respostas em termos de R, M, v_0, θ, d. Dado: momento de inércia do cilindro $I = MR^2/2$.



1) $$U(r) = \left(\frac{a}{r}\right)^{12} - \left(\frac{b}{r}\right)^{6}$$

a) $$F(r) = -\frac{\partial U(r)}{\partial r} = -a^{12} \cdot \frac{-12}{r^{13}} + b^{6} \cdot \frac{-6}{r^{7}}$$

$$\boxed{F(r) = 12\,\frac{a^{12}}{r^{13}} - 6\,\frac{b^{6}}{r^{7}}}$$

b) $$r_0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial r} = 0 \Rightarrow F(r) = 0$$

$$12\,\frac{a^{12}}{r_0^{13}} = 6\,\frac{b^{6}}{r_0^{7}}$$

$$r_0^{6} = 2\left(\frac{a^{2}}{b}\right)^{6} \rightarrow \boxed{r_0 = \sqrt[6]{2}\,\frac{a^{2}}{b}}$$

c) $$U_0 = U(r_0)$$

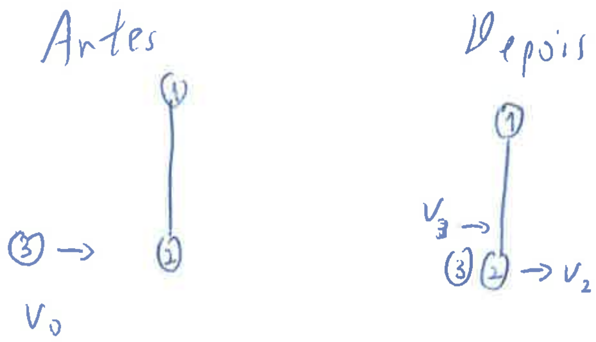
$$U_0 = \frac{a^{12}}{(2^{\frac{1}{6}})^{12}} \frac{b^{12}}{(a^{2})^{12}} - \frac{b^{6}}{(2^{1/6})^{6}} \cdot \frac{b^{6}}{(a^{2})^{6}} =$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{b^{12}}{a^{12}} - \frac{1}{2}\,\frac{b^{13}}{a^{12}}$$

$$\boxed{U_0 = -\frac{1}{4}\,\frac{b^{12}}{a^{12}}}$$

2)

a) Colisão elástica



	Inicial	Final
Momento	$p_i = mV_0$	$p_f = mV_3 + mV_2$
Energia Cinética	$K_i = \frac{mV_0^2}{2}$	$K_f = \frac{mV_3^2}{2} + \frac{mV_2^2}{2}$

Cons. de Momento $\quad p_i = p_f \rightarrow V_0 = V_3 + V_2$

$\downarrow$

Cons. de Energia $\quad K_i = K_f \rightarrow V_0^2 = V_3^2 + V_2^2$

$$(V_3+V_2)^2 = V_3^2 + 2V_3V_2 + V_2^2 = V_3^2 + V_2^2$$

$$\therefore V_3 \cdot V_2 = 0$$

Como $V_2 \neq 0$, $V_3 = 0 \Rightarrow \boxed{V_2 = V_0}$

b) Impulso

$$J = p_f - p_i = mV_0$$

c) Centro de massa do altere →

Cons. de momento

$$p_i = p_f$$

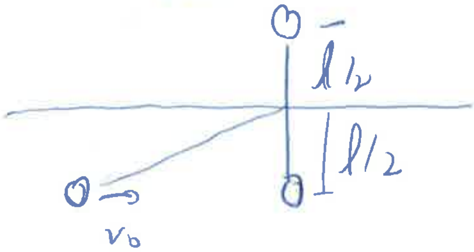
$$p_i = m v_0 \qquad p_f = m_H \cdot v_H$$

$$m_H = 2m$$

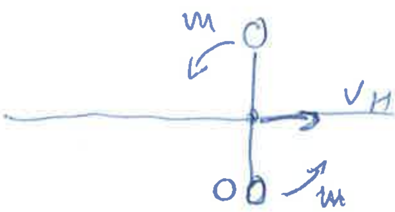
$$\therefore \boxed{v_H = \frac{v_0}{2}}$$

d) Momento angular

Inicial



Final



$$L_i = |\vec{r} \times \vec{p}| = \frac{l}{2} \cdot m v_0 = \frac{m v_0 l}{2}$$

$$L_f = I_H \cdot \omega \qquad I_H = m_1 \left(\frac{l}{2}\right)^2 + m_2 \left(\frac{l}{2}\right)^2 =$$

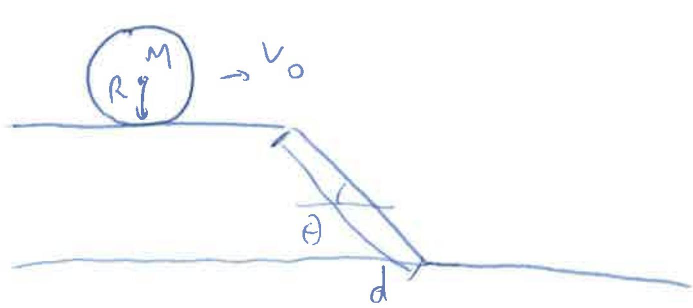
$$= 2m\frac{l^2}{4} = \frac{m l^2}{2}$$

$$L_i = L_f$$

$$\frac{m v_0 l}{2} = \frac{m l^2}{2}\omega$$

$$\boxed{\omega = \frac{v_0}{l}}$$

3)



$$E_i = U + K_T + K_R$$

translação rotação (CM)

$$K_T = \frac{M v_0^2}{2}$$

$$K_R = \frac{I w^2}{2} = \frac{MR^2}{2} \cdot \frac{w^2}{2}$$

Rolamento sem atrito $v_0 = w \cdot R$

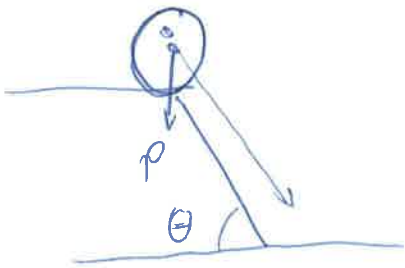
$$\therefore K_R = \frac{M v_0^2}{4}$$

$$E_i = U_i + \frac{3}{4} M v_0^2$$

$$E_f = U_f + \frac{3}{4} M v_f^2$$

a)

Trabalho força peso $W = \int \vec{P} \cdot d\vec{l} = M \cdot g \cdot d \,\text{sen}\, \theta$



b) $U_i - U_f = Mgh = Mgd\,\text{sen}\,\theta$

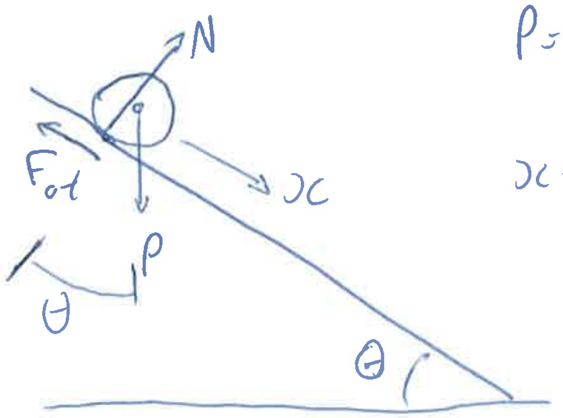
$K_f - K_i = U_i - U_f$ Cons de Energia

$= W$ Teorema trabalho energia

$\frac{3}{4}Mv_f^2 - \frac{3}{4}Mv_0^2 = Mgd\,\text{sen}\,\theta$

$$\boxed{v_f = \sqrt{\frac{4}{3}gd\,\text{sen}\,\theta + v_0^2}}$$

c)



$P = Mg$

$x \rightarrow$ direção paralela ao plano

Componente paralela ao plano

$$F_p = Mg\,sen\,\theta - F_{at} = M\cdot\ddot{x} = M\cdot\frac{d}{dt}v_p$$

Componente normal

$$F_N = N - Mg\cos\theta = 0 \Rightarrow N = Mg\cos\theta$$

Rotação

Ref. CM $\rightarrow$ Torque - $\tau = F_{at}\cdot R = I_{cm}\frac{d}{dt}\omega$

$$F_{at} = \frac{MR^2}{2R}\frac{d\omega}{dt} = \frac{MR}{2}\frac{d\omega}{dt}$$

Ref. ponto de contato

Torque $\rightarrow$ $\tau = R\cdot Mg\,sen\,\theta = I\frac{d}{dt}\omega$

$$I = I_{cm} + MR^2 = \frac{3MR^2}{2}$$

$$R\cdot Mg\,sen\,\theta = \frac{3}{2}MR^2\frac{d}{dt}\omega$$

$$Mg\,sen\,\theta = \frac{3MR}{2}\frac{d}{dt}\omega$$

$F_{at} \leq \mu \cdot N = \mu M g \cos\theta$

$$M g \operatorname{sen}\theta - \mu M g \cos\theta = M \cdot \frac{d}{dt} v_p$$

vínculo $\Rightarrow$ rolamento sem deslizamento

$$v_p = \omega R$$

$$M g \operatorname{sen}\theta - \mu M g \cos\theta = M R \frac{d\omega}{dt}$$

mas $\frac{d\omega}{dt} = \frac{2 F_{at}}{M R} = \frac{2 \cdot \mu M g \cos\theta}{M R}$

$$M g \operatorname{sen}\theta - \mu M g \cos\theta = 2 \mu M g \cos\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta = 3 \mu \cos\theta$$

$\boxed{\mu = \frac{tg\,\theta}{3}}$ (limite inferior)

$\boxed{\mu > \frac{tg\,\theta}{3}}$

ou ainda

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{2}{3} \frac{g}{R} \operatorname{sen}\theta$$

$$M g \operatorname{sen}\theta - \mu M g \cos\theta = M \cdot \frac{2}{3} g \operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{1}{3} \operatorname{sen}\theta = \mu \cos\theta$$ (óbvio)