NUSP:

⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪
①	①	①	①	①	①	①
②	②	②	②	②	②	②
③	③	③	③	③	③	③
④	④	④	④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤
⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

Instruções: preencha ***completamente*** *os círculos com os dígitos do seu número USP (um em cada coluna); na parte de baixo dessa folha, preencha* ***completamente*** *os círculos com as respostas corretas correspondentes a cada questão. Use caneta esferográfica preta ou azul. Escreva apenas nas áreas designadas.*

Nome: ....

Assinatura: ....

Turma: ....

Professor: ....

ESTE ESPAÇO É DE USO EXCLUSIVO DA BANCA DE CORREÇÃO

	1a Avaliação	Revisão
Múltipla-escolha		
Parte discursiva		
Total		

- Esta prova é formada de uma parte objetiva contendo seis (6) questões de múltipla-escolha (Q1-Q6) e uma parte discursiva contendo uma (1) questão (Q7).
- A solução da questão discursiva deve ser feita no CADERNO DE RESPOSTAS devidamente identificado com nome, NUSP e turma.
- A parte objetiva corresponde a um total de 6,0 pontos e a parte discursiva a 4,0 pontos.

Marque as respostas das questões de múltipla-escolha

(1) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

(2) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

(3) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

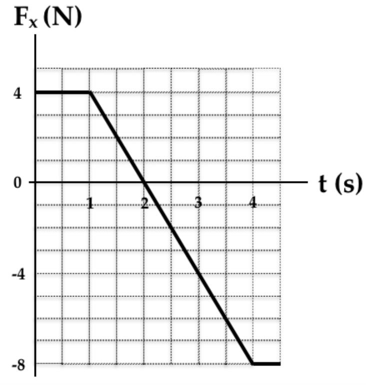
(4) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

(5) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

(6) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

QUESTÕES DE MÚLTIPLA-ESCOLHA (1-6)

(1) [1,0 pt] A única força atuando sobre um objeto de massa 2,0 kg e movendo-se ao longo do eixo x é mostrada no gráfico. Se a velocidade do corpo é -2,0 m/s em $t = 0$, qual a velocidade em $t = 4,0$ s?



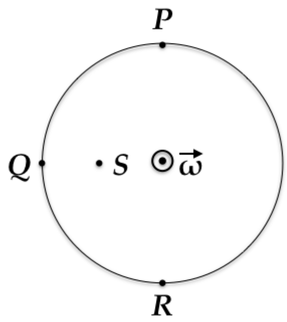
- ☐ *(a)* -4,0 m/s
- ☐ *(b)* +5,0 m/s
- ☐ *(c)* -3,0 m/s
- ☐ *(d)* +1,0 m/s
- ☐ *(e)* -2,0 m/s

SOLUÇÃO: O impulso total exercido pela força durante $t_i = 0$ e $t_f = 4,0$ s deve ser igual à variação de momento linear do objeto:

$$\int_{t_i}^{t_f} F dt = \Delta p = mv_f - mv_i \Longrightarrow v_f = \frac{1}{m}\left(\int_{t_i}^{t_f} F dt + mv_i\right) = \frac{1}{2}\left[(4+2-8) + (2,0)(-2,0)\right] \text{ m/s} = -3,0 \text{ m/s}$$

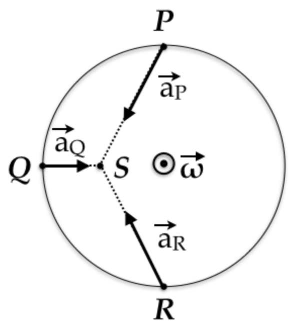
Resposta correta: (c)

(2) [1,0 pt] Um objeto se move com velocidade angular $\vec{\omega}$ ao longo de uma trajetória circular como mostrado na figura. Durante todo o movimento, seu vetor aceleração aponta sempre para S e encontra-se ao longo da linha que vai da posição do objeto ao ponto S. Pode-se dizer que o módulo da velocidade do objeto:



- [ ] *(a)* aumenta em P, Q e R.
- [ ] *(b)* aumenta em P e diminui em R
- [ ] *(c)* diminui em P e aumenta em R.
- [ ] *(d)* diminui em P, Q e R.
- [ ] *(e)* aumenta em Q

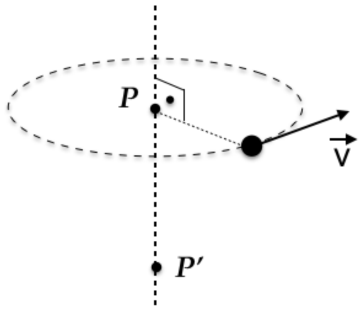
SOLUÇÃO: A figura abaixo mostra a direção e o sentido dos vetores nos pontos P, Q e R de acordo com o enunciado:



Como o movimento é no sentido anti-horário de acordo com o vetor $\vec{\omega}$, temos que em P, há um componente tangencial de $\vec{a}$ no mesmo sentido de $\vec{v}$ (sempre tangente à trajetória), em Q, a aceleração é puramente centrípeta e em R, há uma componente de $\vec{a}$ no sentido oposto ao de $\vec{v}$.

Resposta correta: (b)

(3) [1,0 pt] Uma pequena esfera realiza um movimento circular uniforme num plano horizontal como mostrado na figura. Pode-se dizer dos vetores momento angular $\vec{L}$ e $\vec{L}'$ com respeito aos pontos P e P', respectivamente, que:

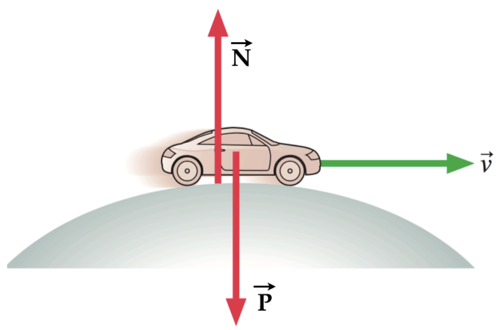


- ☐ *(a)* são paralelos, mas possuem magnitudes distintas, já que os vetores posição $\vec{r}$ e $\vec{r}'$ têm magnitudes diferentes.
- ☐ *(b)* são constantes, já que a força resultante é do tipo centrípeta e, portanto, exerce torque nulo.
- ☐ *(c)* são iguais, já que o centro de massa do sistema formado pela esfera está em repouso.
- ☐ *(d)* são iguais em magnitude, mas não são paralelos.
- ☐ *(e)* o vetor $\vec{L}$ é constante e paralelo à linha $P'P$, enquanto $\vec{L}'$ faz um certo ângulo com a linha $P'P$ e gira (precessa) em torno dela com a mesma velocidade angular que a da esfera.

SOLUÇÃO: Como $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, vemos que quando $\vec{r}$ é tomado com respeito a P, $\vec{L}$ é perpendicular ao plano do círculo, ou seja, paralelo a PP'. Já quando tomamos $\vec{r}$ com relação a P', $\vec{L}'$ passa agora a ter também uma componente perpendicular a PP'. À medida que a partícula gira, o correspondente vetor $\vec{L}'$ também gira com a mesma velocidade angular que a partícula.

Resposta correta: (e)

(4) [1,0 pt] Um carro sem combustível passa pelo ponto mais alto de uma colina com velocidade $\vec{v}$. Nesse instante pode-se afirmar que:



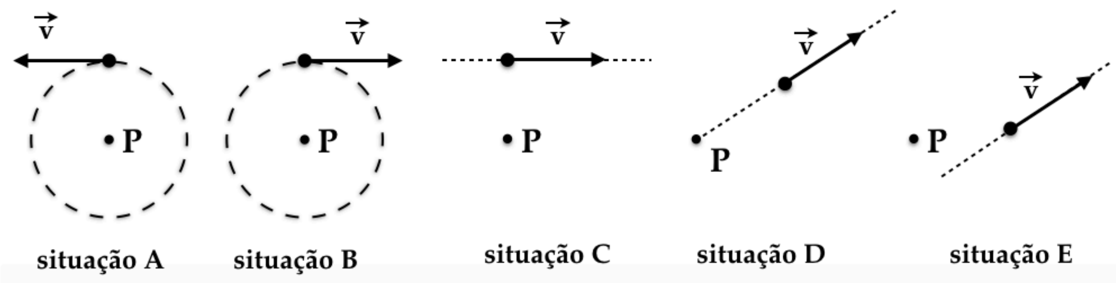
- ☐ *(a)* $|\vec{N}| = |\vec{P}|$
- ☐ *(b)* $\vec{F}_{cp} + \vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}_{cp}$, onde m é a massa do carro, $\vec{a}_{cp}$ e $\vec{F}_{cp}$ são aceleração e a força centrípeta, respectivamente.
- ☐ *(c)* não é possível dizer nada sobre $|\vec{N}|$ sem conhecer a magnitude da velocidade.
- ☐ *(d)* $|\vec{N}| < |\vec{P}|$
- ☐ *(e)* $|\vec{N}| > |\vec{P}|$

SOLUÇÃO: No ponto mais alto da colina, o carro tem uma aceleração centrípeta não-nula, logo a força resultante deve ser também não-nula e apontando para baixo. Tomando o eixo y como vertical e apontando para cima:

$$\vec{F}_{cp} = \vec{P} + \vec{N} = -mg\hat{y} + |\vec{N}|\hat{y} = m\vec{a}_{cp} = -ma_{cp}\hat{y} \Longrightarrow N - mg = -ma_{cp} < 0 \Longrightarrow |\vec{N}| < mg$$

Resposta correta: (d)

(5) [1,0 pt] Cinco partículas pontuais de massa m se movem com velocidade $\vec{v}$ como representado na figura. Aquela(s) que possui(em) momento angular nulo com respeito a P é:

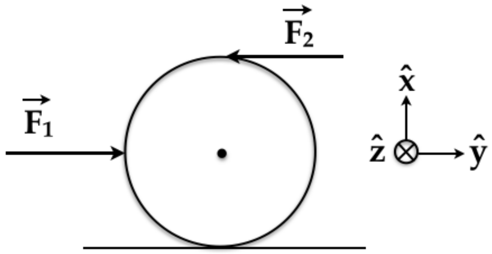


- ☐ *(a)* situação E
- ☐ *(b)* situação C
- ☐ *(c)* situações C, D e E
- ☐ *(d)* situação D
- ☐ *(e)* situações A e B

SOLUÇÃO: Sendo $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$, o momento angular só pode ser nulo quando $|\vec{r}| = 0$ ou $|\vec{v}| = 0$ ou $\vec{r}$ é paralelo a $\vec{v}$. Das figuras, apenas a situação D satisfaz uma dessas condições ($\vec{r}$ paralelo a $\vec{v}$).

Resposta correta: (d)

(6) [1,0 pt] Duas forças de magnitude 50 N atuam sobre um cilindro de raio 4,0 m e massa 6,25 kg como mostrado na figura. O cilindro, inicialmente em repouso, encontra-se sobre uma superfície perfeitamente lisa. Após um (1) segundo, a velocidade $\vec{v}$ do centro de massa e a velocidade angular $\vec{\omega}$ de rotação do cilindro são:



- ☐ *(a)* $\vec{v} = 0\,\hat{y}$ m/s e $\vec{\omega} = -4\,\hat{z}$ rad/s.
- ☐ *(b)* $v = 8\,\hat{y}$ m/s e $\vec{\omega} = -4\,\hat{z}$ rad/s.
- ☐ *(c)* $\vec{v} = 0\,\hat{y}$ m/s e $\vec{\omega} = -5\,\hat{z}$ rad/s.
- ☐ *(d)* $\vec{v} = 0\,\hat{y}$ m/s e $\vec{\omega} = 4\,\hat{z}$ rad/s.
- ☐ *(e)* $\vec{v} = 0\,\hat{y}$ m/s e $\vec{\omega} = 0\,\hat{z}$ rad/s.

SOLUÇÃO: As equações de movimento para a translação do CM e rotação em torno do CM são

$$\vec{F}_R = m\vec{a}_{CM} \quad \text{e} \quad \vec{\tau}_{CM} = \frac{d}{dt}(I_{CM}\vec{\omega}) = I_{CM}\vec{\alpha},$$

onde levou-se em conta na última passagem que o eixo de rotação que passa pelo CM do cilindro é um eixo de simetria.

A força resultante $\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ é nula (forças de mesma magnitude, direção, mas sentidos opostos), de forma que o CM que se encontrava em repouso, permanece em repouso. Já o torque resultante é

$$\vec{\tau}_{CM} = \vec{\tau}_{1_{CM}} + \vec{\tau}_{2_{CM}} = \underbrace{(-R\,\hat{y}) \times (|\vec{F}_1|\,\hat{y})}_{=\vec{0}} + (R\,\hat{x}) \times (-|\vec{F}_2|\hat{y}) = -R|\vec{F}_2|\,\hat{z} = -200\,\hat{z}\text{ Nm}$$

Logo

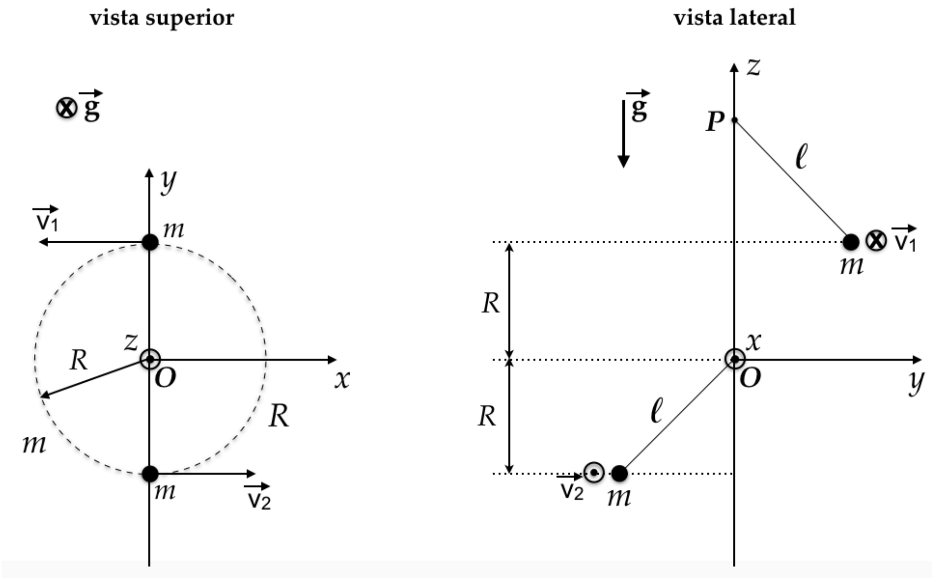
$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{\tau}_{CM}}{I_{CM}} = \frac{\vec{\tau}_{CM}}{\frac{1}{2}MR^2} = \frac{-200\,\hat{z}}{\frac{1}{2}(6,25)(16)}\text{ rad/s}^2 = -\frac{25\,\hat{z}}{6,25}\text{ rad/s}^2 = -4,0\,\hat{z}\text{ rad/s}^2.$$

Como $\vec{\omega}(t) = \vec{\alpha}t$ ($\vec{\omega}(t=0) = \vec{0}$), temos $\vec{\omega} = -4,0\,\hat{z}$ rad/s em $t = 1$ s.

Resposta correta: (a)

QUESTÃO DISCURSIVA

(7) [4 pt] Duas pequenas esferas idênticas (massa m) estão suspensas (pontos de suspensão P e O) por fios de comprimento ℓ inextensíveis e de massas desprezíveis numa região de campo gravitacional uniforme (magnitude g), de forma que se movem em círculos de raio R na disposição mostrada na figura. A magnitude de suas velocidades é v (constante), elas giram no mesmo sentido, mas há uma defasagem de meia revolução entre elas, como mostrado na figura. Dessa forma, num dado instante qualquer t, quando uma está na posição (x, y, R) a outra encontra-se no ponto $(-x, -y, -R)$.



(a) (0,5) Determine o vetor posição do centro de massa do sistema formado pelas duas esferas;

(b) (1,0) Esboce o diagrama de forças para cada uma das esferas e escreva explicitamente os vetores força no sistema de coordenadas da figura;

(c) (1,0) Determine o vetor momento angular de cada uma das esferas e o correspondente vetor momento angular total do sistema $\vec{L}_{CM}$, todos com respeito ao centro de massa;

(d) (0,5) Determine o ângulo entre o vetor velocidade angular $\vec{\omega}$ das esferas e o vetor momento angular total do sistema com respeito ao centro de massa;

(e) (1,0) Calcule o torque total $\vec{\tau}_{CM}$ sobre o sistema com respeito ao centro de massa. $\vec{L}_{CM}$ é conservado para esse sistema? Justifique sua resposta.

FORMULÁRIO

Momentos de inércia em relação a um eixo que passa pelo centro de massas:

- Barra delgada de massa M e comprimento L: $\frac{1}{12}ML^2$.
- Esfera de massa M e raio R: $\frac{2}{5}MR^2$.
- Disco de massa M e raio R: $\frac{1}{2}MR^2$.

GABARITO

(a) O vetor posição do CM para um sistema de 2 partículas é, por definição

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2},$$

de forma que para $m_1 = m_2 = m$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{2}\left(\vec{r}_1 + \vec{r}_2\right)$$

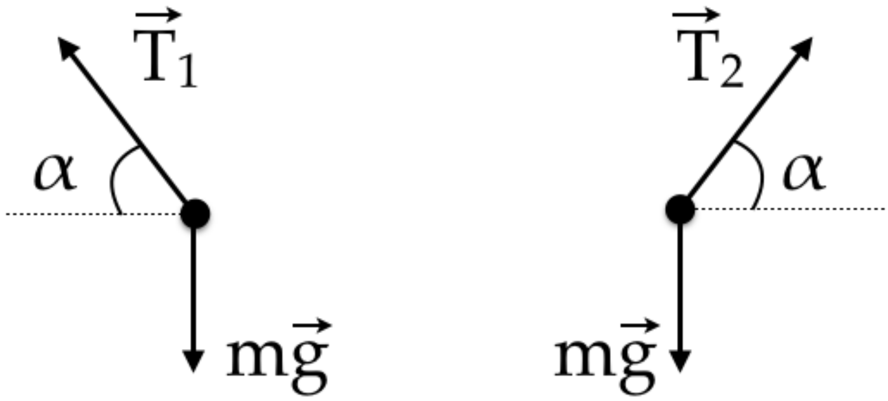
Como

$$\begin{cases} \vec{r}_1(t) = x(t)\,\hat{x} + y(t)\,\hat{y} + z(t)\,\hat{z} \\ \vec{r}_2(t) = -x(t)\,\hat{x} - y(t)\,\hat{y} - z(t)\,\hat{z} \end{cases}$$

temos que

$$\vec{r}_{CM}(t) = \vec{0} \quad \text{(O CM do sistema está repouso na origem O)}$$

(b) Diagramas de forças ($\cos\alpha = R/\ell$)



Usando coordenadas polares no plano xy, podemos escrever

$$\vec{T}_1 = -T_1\cos\alpha\,\hat{r}_1 + T_1\sin\alpha\,\hat{z}, \quad \text{com} \quad T_1 = |\vec{T}_1|$$

Como há equilíbrio de forças na direção z, temos

$$T_1\sin\alpha = mg \Longrightarrow T_1 = \frac{mg}{\sin\alpha} = \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 - R^2}}mg$$

Então

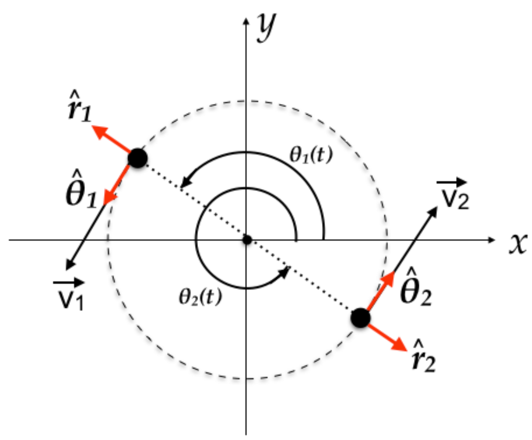
$$\vec{T}_1 = -\frac{R}{\sqrt{\ell^2 - R^2}}mg\,\hat{r}_1 + mg\,\hat{z} \quad \text{e} \quad \vec{P}_1 = -mg\,\hat{z}$$

Veja que $\vec{T}_1$ tem uma componente radial de módulo

$$\frac{R}{\sqrt{\ell^2 - R^2}}mg$$

e que aponta no sentido oposto a $\hat{r}_1$, ou seja, para dentro do círculo de raio R, e uma componente na direção z positiva.

Se $\theta_1(t)$ é o ângulo entre o vetor posição da partícula 1, medido a partir do centro do círculo (e não de O!), e o eixo x, também podemos escrever a força $\vec{T}_1$ em coordenadas cartesianas



$$\vec{T}_1 = \frac{R}{\sqrt{\ell^2 - R^2}} mg \left[-\cos\theta_1(t)\,\hat{x} - \sin\theta_1(t)\,\hat{y}\right] + mg\,\hat{z}$$

com

$$\theta_1(t) = \theta_0 + \omega t = \frac{\pi}{2} + \frac{v}{R}t,$$

onde tomou-se a situação representada na figura como correspondendo ao instante $t = 0$, de forma que

$$\vec{T}_1 = \frac{R}{\sqrt{\ell^2 - R^2}} mg \left[\sin\left(\frac{v}{R}t\right)\,\hat{x} - \cos\left(\frac{v}{R}t\right)\,\hat{y}\right] + mg\,\hat{z}$$

De maneira completamente análoga para a partícula 2, podemos escrever

$$\vec{T}_2 = -\frac{R}{\sqrt{\ell^2 - R^2}} mg\,\hat{r}_2 + mg\,\hat{z} \quad \text{e} \quad \vec{P}_2 = -mg\,\hat{z}$$

Ou em coordenadas cartesianas

$$\vec{T}_2 = \frac{R}{\sqrt{\ell^2 - R^2}} mg \left[\sin\left(\frac{v}{R}t\right)\,\hat{x} + \cos\left(\frac{v}{R}t\right)\,\hat{y}\right] + mg\,\hat{z}$$

Perceba que as forças resultantes $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ são do tipo centrípeta

$$\vec{F}_1 = \vec{T}_1 + \vec{P}_1 = -\frac{R}{\sqrt{\ell^2 - R^2}} mg\,\hat{r}_1 \quad \text{e} \quad \vec{F}_2 = \vec{T}_2 + \vec{P}_2 = -\frac{R}{\sqrt{\ell^2 - R^2}} mg\,\hat{r}_2$$

(c) Por definição, o momento angular $\vec{L}_O$ de uma partícula com respeito a O é

$$\vec{L}_O = \vec{r}_O \times \vec{p} = \vec{r}_O \times \vec{p}$$

Para a partícula 1, temos, com coordenadas polares no plano xy

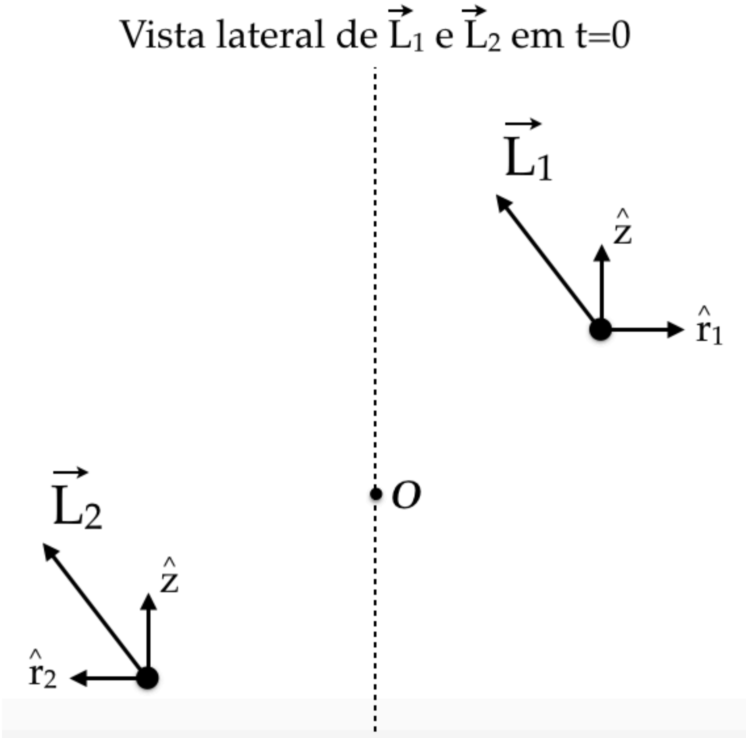
$$\vec{r}_1 = R\,\hat{r}_1 + R\,\hat{z} \quad \text{e} \quad \vec{p}_1 = m\vec{v}_1 = mv\,\hat{\theta}_1$$

Logo

$$\vec{L}_{1O} = \vec{r}_{1O} \times \vec{p}_1 = (R\,\hat{r}_1 + R\,\hat{z}) \times (mv\,\hat{\theta}_1) = mRv(\,\hat{r}_1 + \,\hat{z}) \times \,\hat{\theta}_1 = -mRv\,\hat{r}_1 + mRv\,\hat{z}$$

E para a partícula 2

$$\vec{L}_{2O} = \vec{r}_{2O} \times \vec{p}_2 = (R\,\hat{r}_2 - R\,\hat{z}) \times (mv\,\hat{\theta}_2) = mRv(\,\hat{r}_2 - \,\hat{z}) \times \,\hat{\theta}_2 = mRv\,\hat{r}_2 + mRv\,\hat{z}$$



O momento angulat total do sistema com respeito ao CM é então

$$\vec{L}_{CM} = \vec{L}_O = \vec{L}_{1O} + \vec{L}_{2O}$$

Logo

$$\vec{L}_{CM} = -2mRv\,\hat{r}_1 + 2mRv\,\hat{z} = 2mRv\,\hat{r}_2 + 2mRv\,\hat{z}$$

(d) Sabemos que se β é o ângulo entre $\vec{\omega}$ e $\vec{L}_{CM}$, então

$$\vec{\omega}\cdot\vec{L}_{CM} = |\vec{\omega}||\vec{L}_{CM}|\cos\beta \Longrightarrow \cos\beta = \frac{\vec{\omega}\cdot\vec{L}_{CM}}{|\vec{\omega}||\vec{L}_{CM}|}$$

Como ambas as massas giram em torno do eixo z no sentido anti-horário a partir de uma vista superior, temos $\vec{\omega} = \omega\,\hat{z}$ e, então

$$\vec{\omega}\cdot\vec{L}_{CM} = \omega\,\hat{z}\cdot(-2mRv\,\hat{r}_1 + 2mRv\,\hat{z}) = 2mRv\omega = 2mv^2$$

já que para o movimento circular uniforme, vale também que $\omega = v/R$.

Do item (c), sabemos também que $|\vec{L}_{CM}| = 2\sqrt{2}mRv$, logo

$$\cos\beta = \frac{2mv^2}{(v/R)2\sqrt{2}mRv} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \beta = \frac{\pi}{4}$$

(e) A forma mais direta de obter o torque total com respeito ao CM é derivar com respeito ao tempo o momento angular total com respeito ao CM

$$\vec{\tau}_{CM} = \frac{d\vec{L}_{CM}}{dt}$$

ou seja

$$\vec{\tau}_{CM} = \frac{d}{dt}\left[-2mRv\,\hat{r}_1 + 2mRv\,\hat{z}\right] = -2mRv\,\underbrace{\frac{d\hat{r}_1}{dt}}_{=\omega\hat{\theta}_1} = -2mRv\omega\,\hat{\theta}_1 = -2mv^2\,\hat{\theta}_1$$

Vê-se claramente que o torque total com respeito ao CM é não-nulo, de modo que o momento angular do sistema com respeito ao CM não é conservado. Mais precisamente, $\vec{\tau}_{CM}$ está na direção tangencial ao círculo descrito por cada esfera, fazendo com que o vetor momento angular total $\vec{L}_{CM}$ gire em torno do eizo z, com módulo contante igual a $2\sqrt{2}mRv$ e velocidade angular de magnitude $\omega = v/R$.

Outra forma, menos direta, de se obter o torque total é via cálculo explícito

$$\vec{\tau}_{CM} = \vec{\tau}_{1_{CM}} + \vec{\tau}_{2_{CM}} = \vec{r}_{1_{CM}} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{2_{CM}} \times \vec{F}_2$$

Verifique que você obtém o mesmo resultado nos dois casos!