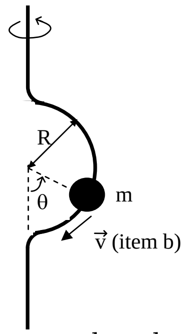
FEP2195 - Física Geral e Experimental para Engenharia I

Prova Substitutiva - Gabarito

1. Uma pequena conta, com massa m, desliza ao longo de um arame semicircular de raio R que pode ser mantido fixo ou girar em torno de um eixo vertical, conforme mostrado na figura. Entre o arame e a massa existe um coeficiente de atrito estático μ_e e cinético μ_c. Para as questões abaixo, considere somente a região angular $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Expresse todas as suas respostas em função de g, R, θ, μ_e, μ_c, v e T.



(a) (1,0) Se o arame for mantido fixo e a massa estiver inicialmente em repouso, obtenha a região de ângulos θ para os quais a massa permanecerá em repouso.

(b) (0,5) Ainda com o arame fixo, obtenha o módulo da aceleração radial a_r e tangencial a_{tg} da massa, supondo que ela tenha velocidade instantânea $\vec{v}$ na posição indicada pelo ângulo θ da figura.

(c) (1,0) Se o arame gira com período T, determine o ângulo θ_T para o qual a conta fica estacionária em relação ao arame girante. Nesse item, despreze a força de atrito.

SOLUÇÃO:

(a) Se o arame for mantido fixo e a massa estiver inicialmente em repouso, obtenha a região de ângulos θ para os quais a massa permanecerá em repouso.

Para a conta em um determinado ângulo θ e em repouso temos:

$$N - mg\,cos(\theta) = 0$$

$$f_a - mg\,sen(\theta) = 0$$

onde N e f_a são a força normal e de atrito estático, respectivamente.

A força de atrito estático máxima é:

$$f_{a_{MAX}} = \mu_e N = \mu_e mg\,cos(\theta)$$

Assim, para que a conta permaneça em repouso:

$$mg\,sen(\theta) \leq f_{a_{MAX}}$$

$$mg\,sen(\theta) \leq \mu_e mg\,cos(\theta)$$

$tan(\theta) \leq \mu_e$

A conta permanecerá em repouso para a seguinte região de ângulos

$$\boxed{0 \leq \theta \leq arctan(\mu_e)}$$

(b) Ainda com o arame fixo, obtenha o módulo da aceleração radial a_r e tangencial a_{tg} da massa, supondo que ela tenha velocidade instantânea $\vec{v}$ na posição indicada pelo ângulo θ da figura.

Quando a conta está deslizando ao longo do arame temos:

$$N - mg\,cos(\theta) = ma_r$$

$$mg\,sen(\theta) - f_a = ma_{tg}$$

Para a conta com velocidade instantânea $\vec{v}$, o módulo da aceleração radial será:

$$a_r = \frac{v^2}{R}$$

Assim:

$$N = m\frac{v^2}{R} + mg\,cos(\theta)$$

A conta deslizando estará sujeita à força de atrito cinético:

$$f_a = \mu_c N = \mu_c m\frac{v^2}{R} + \mu_c mg\,cos(\theta)$$

O módulo da aceleração tangencial será:

$$ma_{tg} = mg\,sen(\theta) - \mu_c m\frac{v^2}{R} - \mu_c mg\,cos(\theta)$$

$$a_{tg} = -\mu_c\frac{v^2}{R} + [sen(\theta) - \mu_c\,cos(\theta)]g$$

Assim, os módulos das componentes da aceleração serão:

$$\boxed{a_r = \frac{v^2}{R} \text{ e } a_{tg} = -\mu_c\frac{v^2}{R} + [sen(\theta) - \mu_c\,cos(\theta)]g}$$

(c) Se o arame gira com período T, determine o ângulo θ_T para o qual a conta fica estacionária em relação ao arame girante. Nesse item, despreze a força de atrito.

Para a conta girando com período T e ângulo θ_T o raio da órbita será:

$$r = R\,sen(\theta_T)$$

e a velocidade linear:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi R\,sen(\theta_T)}{T}$$

A força centrípeta será:

$$N\,sen(\theta_T) = m\frac{v^2}{r} = m\frac{4\pi^2 R^2\,sen^2(\theta_T)}{T^2 R\,sen(\theta_T)}$$

$$N = m\frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

Mas, na direção vertical temos:

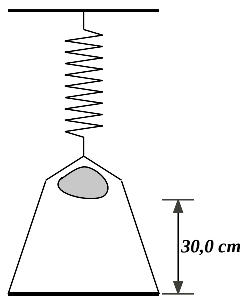
$$N\,cos(\theta_T) = mg$$

Assim,

$$\frac{mg}{cos(\theta_T)} = m\frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

$$\boxed{\theta_T = arccos\left(\frac{gT^2}{4\pi^2 R}\right)}$$

2. Uma armação contendo um prato de massa $0,400\ kg$ está suspensa em uma mola como mostrado na figura. Na posição de equilíbrio do sistema a mola está esticada de $\frac{4}{70}\ m$ (além do seu comprimento natural). Um pedaço de massa pegajosa de $0,200\ kg$ é largado do repouso a uma altura de $30,0\ cm$ em relação ao prato (ver figura) choca-se com este e fica grudada.



(a) (1,0) Qual a velocidade da massa ao atingir o prato?

(b) (1,5) Qual a distância máxima que o prato mais massa move-se para baixo a partir da posição de equilíbrio inicial?

SOLUÇÃO:

Tomando como dados do problema:

- Massa da armação mais prato: $M = 0,4\ kg$
- Massa da massa pegajosa: $m = 0,2\ kg$
- Alongamento inicial da mola: $d = \frac{4}{70}\ m$
- Altura de queda da massa pegajosa: $h = 0,3\ m$

(a) Qual a velocidade da massa ao atingir o prato?

Usando conservação da energia mecânica, com o zero da energia potencial gravitacional adotado no prato, temos:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,3}$$

$$\boxed{v = \sqrt{6}\ m/s}$$

(b) Qual a distância máxima que o prato mais massa move-se para baixo a partir da posição de equilíbrio inicial?

Supondo que as forças externas são desprezíveis durante o choque, podemos usar conservação do momento linear para calcular a velocidade V do sistema após o choque:

$$mv = (m+M)V$$

$$V = \frac{mv}{(m+M)}$$

Após o choque podemos usar conservação da energia mecânica para calcular a distância x máxima que o sistema descerá:

$$\frac{1}{2}kd^2 + \frac{1}{2}(m+M)V^2 = -(m+M)gx + \frac{1}{2}k(x+d)^2$$

onde k é a constante da mola que pode ser obtida de:

$$Mg = kd$$

$$\frac{1}{2}kd^2 + \frac{1}{2}(m+M)\frac{m^2v^2}{(m+M)^2} = -(m+M)gx + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}kd^2 + kdx$$

$$\frac{1}{2}\frac{m^2v^2}{(m+M)} = -mgx + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{m^2gh}{(m+M)} = -mgx + \frac{1}{2}kx^2$$

Resolvendo a equação do segundo grau para x:

$$x = \frac{mg}{k} \pm \frac{1}{k}\sqrt{m^2g^2 + \frac{2km^2gh}{(m+M)}}$$

$$x = \frac{mg}{k} \pm \frac{mg}{k}\sqrt{1 + \frac{2kh}{g(m+M)}}$$

Resolvendo a raiz:

$$\sqrt{1 + \frac{2kh}{g(m+M)}} = \sqrt{1 + \frac{2Mh}{d(m+M)}}$$

Usando que $M = 2m$

$$\sqrt{1 + \frac{4mh}{3md}} = \sqrt{1 + \frac{4h}{3d}} = \sqrt{1 + \frac{4 \cdot 30 \cdot 70}{100 \cdot 3 \cdot 4}} = \sqrt{8}$$

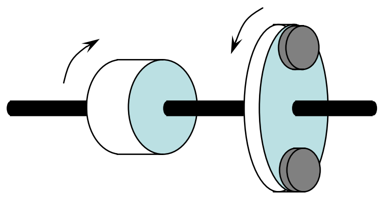
$$x = \frac{mg}{k} \pm \sqrt{8}\frac{mg}{k}$$

Usando somente a raiz positiva:

$$x = \left(1 + \sqrt{8}\right)\frac{mg}{k} = \left(1 + \sqrt{8}\right)\frac{mgd}{2mg} = \left(1 + \sqrt{8}\right)\frac{4}{2 \cdot 70}$$

$$\boxed{x = \frac{\left(1 + \sqrt{8}\right)}{35}\ m}$$

3. Dois discos estão girando sobre mancais sem atrito com a mesma velocidade inicial ω_0, porém em sentidos opostos. O disco da esquerda possui raio R e massa M. O disco da direita possui raio $2R$ e massa $\frac{M}{2}$ e, além disso, são grudados sobre ele dois pequenos discos de raio $\frac{R}{2}$ e massa $\frac{M}{4}$. Os dois discos grandes são aproximados lentamente um do outro e a força de atrito resultante entre as duas superfícies faz com que eles passem a girar com a mesma velocidade angular.



(a) (1,0) Qual é o momento de inércia total do disco da direita em relação ao eixo de rotação do sistema, sabendo que o momento de inércia de um disco de raio R e massa M em relação a um eixo de rotação passando pelo seu centro de massa e perpendicular ao plano do disco é $\frac{1}{2}MR^2$?

(b) (1,5) Qual é o módulo (em função de ω_0) e o sentido da velocidade angular final do sistema.

SOLUÇÃO:

(a) Qual é o momento de inércia total do disco da direita em relação ao eixo de rotação do sistema, sabendo que o momento de inércia de um disco de raio R e massa M em relação a um eixo de rotação passando pelo seu centro de massa e perpendicular ao plano do disco é $\frac{1}{2}MR^2$?

O momento de inércia total do disco da direita é a soma do momento de inércia do disco maior com o momento de inércia de cada disco menor que se encontra a uma distância de $\frac{3R}{2}$ do eixo de rotação, ou seja:

$$I_D = \frac{1}{2}\frac{M}{2}(2R)^2 + 2\left[\frac{1}{2}\frac{M}{4}\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \frac{M}{4}\left(\frac{3R}{2}\right)^2\right]$$

$$I_D = MR^2 + 2\left[\frac{1}{32}MR^2 + \frac{9}{16}MR^2\right]$$

$$\boxed{I_D = \frac{35}{16}MR^2}$$

(b) Qual é o módulo (em função de ω_0) e o sentido da velocidade angular final do sistema.

Supondo que não existam torques externos agindo sobre o sistema, podemos considerar a conservação do momento angular. Vamos tomar a velocidade angular do disco da esquerda como negativa e, consequentemente, como positiva a do disco da direita. Assim:

$$-I_E\omega_0 + I_D\omega_0 = (I_E + I_D)\omega$$

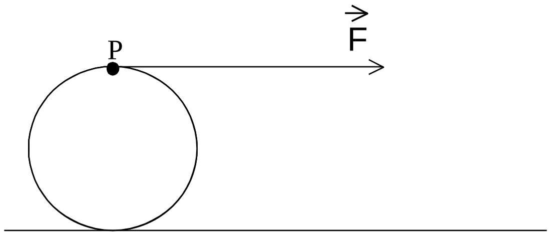
$$\omega = \frac{(I_D - I_E)}{(I_D + I_E)}\omega_0$$

onde $I_E = \frac{1}{2}MR^2$ e I_D foi calculado no item anterior. Assim:

$$\omega = \frac{\frac{27}{16}MR^2}{\frac{43}{16}MR^2}\omega_0$$

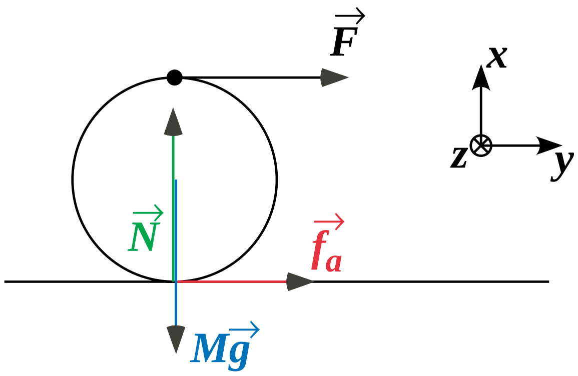
$$\boxed{\omega = \frac{27}{43}\omega_0 \text{ girando no mesmo sentido que o disco da direita antes do choque.}}$$

4. Para deslocar um tambor de massa M e raio R, puxa-se uma corda enrolada no tambor de tal forma que uma força $\vec{F}$ seja aplicada no ponto P, como mostra a figura. Deseja-se deslocar o tambor com uma aceleração a, de forma que ele role sem deslizar. Existe atrito entre o tambor e o chão e o momento de inércia em relação ao eixo que passa pelo centro de massa do tambor perpendicularmente à sua face é $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$. Considere como dados do problema os valores M, R e a.



(a) (0,5) Faça um diagrama de todas as forças externas que atuam sobre o tambor.
(b) (1,0) Escreva as equações que descrevem o movimento do tambor.
(c) (0,5) Determine a força $\vec{F}$ em função dos dados do problema.
(d) (0,5) Determine a força de atrito entre o tambor e o chão em função dos dados do problema.

SOLUÇÃO:
(a) Faça um diagrama de todas as forças externas que atuam sobre o tambor.



onde

- $\vec{F}$ é a força aplicada
- $\vec{f_a}$ é a força de atrito
- $\vec{N}$ é a força normal
- $M\vec{g}$ é a força peso

(b) Escreva as equações que descrevem o movimento do tambor.

Movimento de translação:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N - Mg = 0$$

$$\sum F_y = Ma \quad \Rightarrow \quad F + f_a = Ma$$

Movimento de rotação:

$$\sum \tau_z = I\alpha \quad \Rightarrow \quad (F - f_a)R = \frac{1}{2}MR^2\frac{a}{R}$$

Equações do movimento

$$\boxed{F + f_a = Ma}$$

e

$$\boxed{F - f_a = \frac{1}{2}Ma}$$

(c) Determine a força $\vec{F}$ em função dos dados do problema.

Somando as duas equações acima

$$2F = Ma + \frac{1}{2}Ma$$

$$\boxed{F = \frac{3}{4}Ma}$$

(c) Determine a força de atrito entre o tambor e o chão em função dos dados do problema.

Da primeira equação

$$f_a = Ma - F = Ma - \frac{3}{4}Ma$$

$$\boxed{f_a = \frac{1}{4}Ma}$$