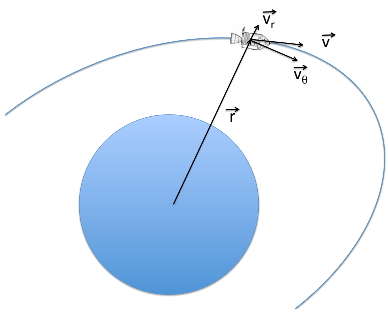
4320195-Física Geral e Exp. para a Engenharia I - Prova Substitutiva - 27/06/2013

- ANOTE NOME, NÚMERO USP, TURMA e DOCENTE nas folhas de resposta.
- PROVA COM IDENTIFICAÇÃO INSUFICIENTE SERÁ IMEDIATAMENTE DESCARTADA!
- ENTREGUE O ATESTADO ou JUSTIFICATIVA DE FALTA JUNTO COM A PROVA.
- A duração da prova é de 2 horas.
- Material: lápis, caneta, borracha, régua. O uso de calculadora é proibido
- Deixe sobre a carteira documento de identificação (identidade ou carteira da USP)
- Resolva cada exercício começando na frente da folha de respostas possuindo o mesmo número que o exercício, utilizando, se for necessário, o verso da folha.
- Deixe indicada a raiz de números que não sejam quadrados perfeitos. Não é necessário fazer aproximações.
- *Justifique todas as suas respostas com comentários, fórmulas e cálculos intermediários, sem esquecer as unidades das grandezas físicas pedidas.*
- Revisão da prova e resultados serão anunciados no site da disciplina.

1) Lembrando que a atração gravitacional entre dois corpos é dada por

$$\vec{F}_{=} - G\frac{mM}{r^2}\hat{r}$$

onde $\vec{r} = r \cdot \hat{r}$ é o vetor ligando o plante da massa M ao corpo de massa m, e $\vec{F}$ é a força que o planeta exerce sobre o corpo, proporcional à contante universal gravitacional G, responda às seguintes questões.



a) [0,5 pt] Calcule a expressão para a energia potencial $U(r)$ de um foguete de massa m, calculando o potencial de forma que $lim_{r\to\infty}U(r) = 0$, para $r > R$, onde r é a distância ao centro da Terra, R é o raio da Terra, e M a massa do planeta.

b) [0,5 pt] Sendo que a energia mecânica do sistema é dada por uma energia potencial mais uma energia cinética $E = U(r)+T(v)$, mostre que a expressão da energia potencial efetiva $U_{ef}(r) = E-T(v_r)$ (onde v_r é a componente radial da velocidade do foguete) é dada por

$$U_{ef} = U(r) + \frac{\ell^2}{2mr}$$

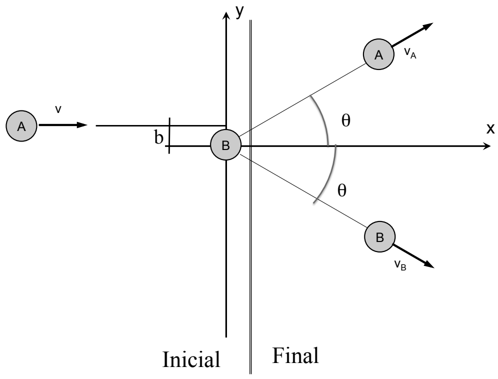
onde ℓ é o momento angular do foguete, considerado uma massa pontual, calculado a partir do centro de massa do sistema (que pode ser considerado como o centro de massa do planeta).

c) [1,0 pt] Esboce o gráfico da energia potencial efetiva em função da distância r. Lembre-se de marcar os zeros da função, os valores mínimos, máximos, e pontos de inflexão.

d) [0,5 pt] Se o foguete estiver inicialmente em uma órbita circular de raio igual a $2R$, qual o valor limite da velocidade v_R que o piloto pode fornecer para que a cápsula permaneça orbitando a Terra? (Considere que a variação de massa do foguete é desprezível).

Dê suas respostas em termos de M, m, G, R, ℓ.

2) Um corpo de massa m incide com velocidade v sobre um outro corpo igual, com um parâmetro de colisão b, como mostrado na figura. Após a colisão, os dois corpos se afastam, formando um ângulo 2θ.

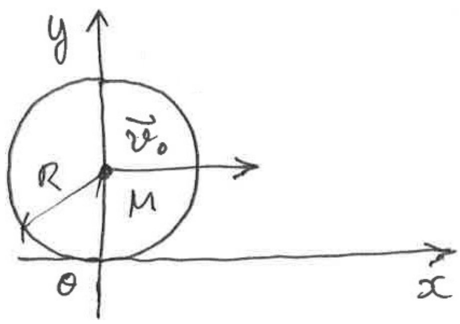


a) [0,75 pt] Mostre que se considerarmos uma colisão elástica de corpos pontuais, teremos $2\theta = 90°$

b) [0,75 pt] Para $2\theta < 90°$, calcule a variação da energia cinética de translação em função de m, v e θ.

c) [1,0 pt] Se consideramos agora dois corpos extensos, inicialmente sem giro, e a colisão colocar os dois corpos em rotação, dado que os momentos angulares intrínsecos após a colisão são iguais, calcule o momento de inércia I de cada corpo em função de m, b e θ, onde o parâmetro de choque b é a distância entre os corpos, projetada no eixo y, como mostrado na figura.

3) Uma bola de boliche, sólida e homogênea, de massa M e raio R, é lançada horizontalmente sobre uma superfície plana com coeficiente de atrito μ (considere o atrito estático igual ao cinético). No instante $t = 0$ ela está se deslocando com velocidade $\vec{v}_0 = v_0\hat{x}$, e tem velocidade angular $\omega = 0$ em relação ao centro de massa. Depois de um tempo t_1 a bola para de escorregar sobre o piso e passa a rolar sem arrasto.



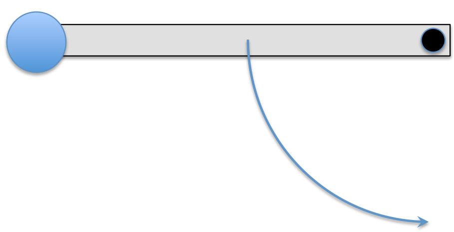
a) [0,5 pt] Dado o valor do momento de inércia da bola em relação a um eixo passando pelo seu centro de massa ($I_{CM} = 2MR^2/5$), calcule o momento de inércia I_θ da bola em relação a um eixo na direção de $\hat{z}$ passando pelo ponto de contato com o piso.

b) [0,75 pt] Calcule a velocidade final $\vec{v}_f$ do centro de massa da bola.

c) [0,75 pt] Calcule o impulso total $\vec{J}_{at}$ da força de atrito sobre a bola.

d) [0,5 pt] Calcule o trabalho total W_{at} de força de atrito sobre a bola.

4) Uma barra delgada de comprimento L e massa M tem presa a uma de suas extremidades uma bola também de massa M, raio R e com momento de inércia $I_{CM} = 2MR^2/5$ (com $R \ll L$). Na outra extremidade a barra está presa a uma articulação que permite com que essa barra gira em torno desse eixo. O sistema barra + bola é solto do repouso na posição horizontal. expresse a resposta em função das grandezas L, M, m, R e g.



a) [0,5 pt] Calcule o momento de inércia do sistema barra + bola em relação ao eixo de rotação localizado na extremidade da barra.

b) [1,0 pt] Calcule a velocidade linear da bola quando esta atinge a posição inferior.

c) [1,0 pt] Se nesta posição a bola se soltar da barra, qual será a velocidade angular da barra nesta ponto?

1) a) $F(r) = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$

$$F(r) = -\frac{\partial U}{\partial r} \rightarrow U(r) - U(r_0) = -\int_{r_0}^{r} F(r)\, dr$$

$$= G \cdot Mm \int_{r_0}^{r} \frac{1}{r^2}\, dr = GMm\left[-\frac{1}{r}\right]\Big|_{r_0}^{r}$$

$$U(r) - U(r_0) = -G\frac{Mm}{r} + G\frac{Mm}{r_0}$$

$$\lim_{r\to\infty} U(r) = \lim_{r\to\infty}\left[-G\frac{Mm}{r} + G\frac{Mm}{r_0} + U(r_0)\right] = \frac{GMm}{r_0} + U(r_0) = 0$$

$$\Rightarrow U(r_0) = -G\frac{Mm}{r_0}$$

$$\therefore \boxed{U(r) = -G\frac{Mm}{r}} \quad p/\ r > R$$

b) $E = U(r) + T(v) = -G\frac{Mm}{r} + \frac{m}{2}v^2$

$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 \quad \therefore \quad E = -G\frac{Mm}{r} + \frac{m v_r^2}{2} + \frac{m v_\theta^2}{2}$$

$$V_{ef}(r) = E - \frac{m v_r^2}{2} = -\frac{GMm}{r} + \frac{m v_\theta^2}{2}$$

$$\ell = |r \times p| = m \cdot r \cdot v_\theta \quad \therefore \quad v_\theta = \frac{\ell}{mr}$$

$$V_{ef}(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{m \ell^2}{2m^2 r^2}$$

$$\boxed{V_{ef}(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2}}$$

c) $U_{ef} = -\frac{GMm}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}$ → pontos importantes

$U_{ef}(r) = 0 \rightarrow \frac{l^2}{2mr^2} = \frac{GMm}{r}$

$\rightarrow r_1 = \frac{l^2}{2GMm^2}$

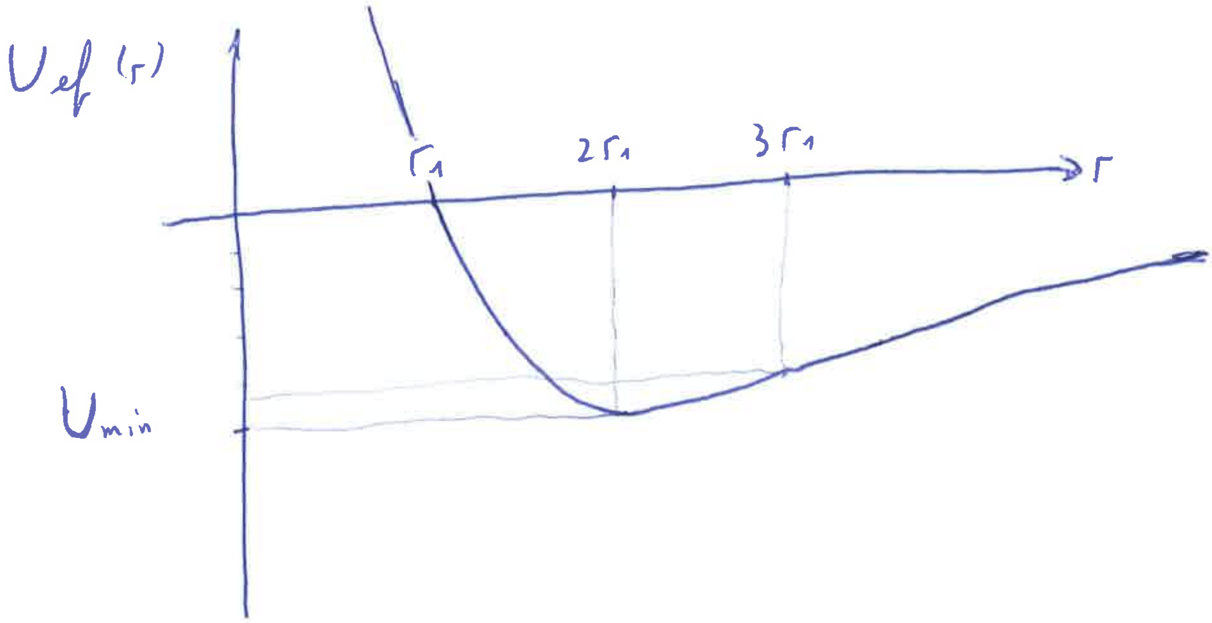
$\frac{d}{dr}U_{ef}(r) = \frac{GMm}{r^2} - \frac{l^2}{mr^3} = 0 \rightarrow r_2 = \frac{l^2}{GMm^2} = 2r_1$

$\frac{d^2}{dr^2}U_{ef}(r) = -2\frac{GMm}{r^3} + 3\frac{l^2}{mr^4} = 0 \rightarrow r_3 = 3\frac{l^2}{2GMm^2} = 3r_1$

$U_{ef}(r_1) = 0$

$U_{ef}(2r_1) = -\frac{GMm}{l^2} \cdot GMm^2 + \frac{l^2}{2m} \cdot \frac{GMm^2}{l^4} = -\frac{G^2M^2m^3}{2l^2}$

$U_{ef}(3r_1) = -\frac{GMm}{3l^2} \cdot 2GMm^2 + \frac{l^2}{2m} \cdot \frac{4G^2M^2m^4}{9l^2} = -\frac{4}{9}\frac{G^2M^2m^3}{l^2}$



$\lim_{r\to\infty} U_{ef}(r) = 0$

d) Órbita circular $\Rightarrow$ Raio $= 2R$

$2r_1 = 2R \rightarrow r_1 = R$

$$U_{min} = -\frac{G^2M^2m^3}{2l^2} = -\frac{GMm}{2} \cdot \frac{1}{r_1} = -\frac{GMm}{4R}$$

$$T(v_r) = \frac{m}{2}v_r^2 = -U_{min}$$

$$\frac{m}{2}v_r^2 = \frac{GMm}{4R} \qquad v_r = \sqrt{\frac{GM}{2R}}$$

2)

a) Cons. de momento

inicial $\vec{p}_{Ai} = m v \hat{x}$

final $\vec{p}_{Af} = m v_A \cos\theta \, \hat{x} + m v_A \operatorname{sen}\theta \, \hat{y}$

$\vec{p}_{Bf} = m v_B \cos\theta \, \hat{x} - m v_B \operatorname{sen}\theta \, y$

$\Rightarrow \quad m v = m(v_A \cos\theta + v_B \cos\theta) \quad$ (eixo x)

$v_A \operatorname{sen}\theta = v_B \operatorname{sen}\theta \quad$ (eixo y) $\Rightarrow \quad v_A = v_B$

$v = v_A \cdot 2\cos\theta$

Cons. de energia

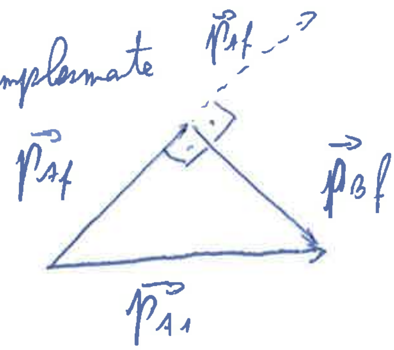
$$\frac{|\vec{p}_{Ai}|^2}{2m} = \frac{|\vec{p}_{Af}|^2}{2m} + \frac{|\vec{p}_{Bf}|^2}{2m}$$

$v^2 = v_A^2 + v_B^2 = 2 v_A^2$

$v = \sqrt{2}\, v_A$

$\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\theta \qquad \theta = 45^\circ \qquad 2\theta = 90^\circ$

Ou simplesmente



pois

$|\vec{p}_{Ai}|^2 = |\vec{p}_{Af}|^2 + |\vec{p}_{Bf}|^2$

b)

$$T_i = \frac{mv^2}{2}$$

$$T_f = \frac{m}{2} v_A^2 + \frac{m v_B^2}{2} \Rightarrow \quad \text{como} \quad v_A = \frac{V}{2\cos\theta} = v_B$$

$$= m v_A^2 = \frac{mv^2}{4} \frac{1}{\cos^2\theta}$$

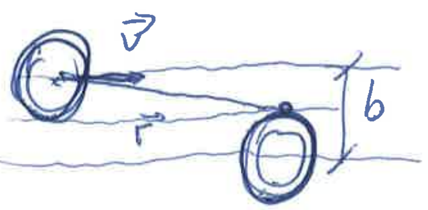
$$\Delta T = T_i - T_f = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv^2}{4}\frac{1}{\cos^2\theta} = \frac{mv^2}{2}\left(1 - \frac{1}{2\cos^2\theta}\right) = \frac{mv^2}{2}\left(\frac{2\cos^2\theta - 1}{2\cos^2\theta}\right)$$

$$= \left(\frac{\cos^2\theta + (1-\operatorname{sen}^2\theta) - 1}{2\cos^2\theta}\right) T_i = \boxed{\frac{T_i}{2}\left(1 - \operatorname{tg}^2\theta\right)}$$

c) Rotação → cons. de momento angular

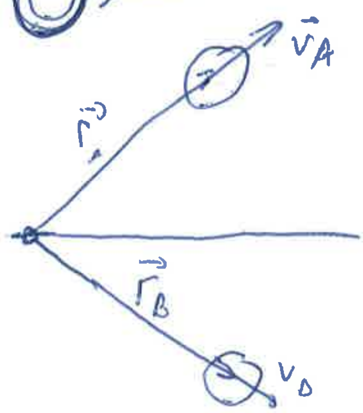
$$\vec{L}_i = \vec{L}_f$$

$\vec{L}_i$ → translação → ref. CM $\qquad \vec{L}_i = \vec{r} \times (m\vec{v}) = m\frac{b}{2}v(-z)$



$$\vec{L}_1 = (\underbrace{\cancel{\vec{r}_A \times m\vec{v}_A}}_{0}) + I\vec{\omega}_A =$$

$\vec{L}_f$ →



$$\vec{L}_2 = (\underbrace{\cancel{\vec{r}_B \times m\vec{v}_B}}_{0}) + I\vec{\omega}_B$$

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = 2\underbrace{I}_{\text{momento angular intrínseco } L}\vec{\omega} = m\frac{b}{2}v(-\hat{z})$$

$$|\vec{L}_1| = |\vec{L}_2| = L = \left(\frac{m b v}{4}\right)$$

Cons. de energia total

$$\Delta T = T_{rot} = \frac{|L_1|^2}{2I} + \frac{|L_2|^2}{2I} = \frac{m^2 b^2 v^2}{16\, I} = \frac{m v^2}{4}(1 - tg^2\theta)$$

$$\boxed{I = \frac{m b^2}{4(1 - tg^2\theta)}}$$

3) Solução:

a) O mom. de inércia em relação ao CM é dado por

$$I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2 \quad \text{(integral tripla)}$$

Temos portanto para o mom. de inércia em relação a O

$$I_O = MR^2 + I_{cm} = MR^2 + \frac{2}{5}MR^2 \Longrightarrow$$

$$\boxed{I_O = \frac{7}{5}MR^2}$$

b) Não há torque da força de atrito em relação a O, logo o momento angular $\vec{L}$ em relação a O é conservado.

$$\vec{L}_i = Mv_0R \,, \quad \vec{L}_f = I_O\,\omega = I_O\frac{v_f}{R} \,,$$

pois sob condições de rolamento sem arrasto temos que $\omega R = v_f$. Logo,

$$Mv_0R = \frac{7}{5}MR^2\frac{v_f}{R} \Longrightarrow \boxed{\vec{v}_f = \frac{5}{7}v_0\,\hat{x}}$$

c) A variação do momento linear $\vec{p}$ é dada por

$$\vec{p}_i = Mv_0\,\hat{x}, \quad \vec{p}_f = \frac{5}{7}Mv_0\,\hat{x} \Longrightarrow$$

$$\Delta\vec{p} = Mv_0\left(\text{[redacted]}\ \frac{5}{7} - 1\right)\hat{x}$$

Esta variação é dada pelo impulso da força de atrito, logo

$$\boxed{\vec{I}_{at} = -\frac{2}{7} M v_0 \hat{x}}$$

d) A variação da energia cinética é dada por

$$E_{ki} = \frac{Mv_0^2}{2}, \quad E_{kf} = \frac{Mv_f^2}{2} + \frac{I_{cm}\omega_f^2}{2} \Longrightarrow$$

$$\Delta E_k = \frac{Mv_f^2}{2} + \frac{I_{cm} v_f^2}{2R^2} - \frac{Mv_0^2}{2}$$

$$= \frac{Mv_f^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{2M}{5} v_f^2 - \frac{Mv_0^2}{2}$$

$$= \frac{Mv_f^2}{2}\left(1 + \frac{2}{5}\right) - \frac{Mv_0^2}{2}$$

$$= \frac{M}{2}\left(\frac{7}{5}\right)\left(\frac{5}{7}\right)^2 v_0^2 - \frac{M}{2} v_0^2$$

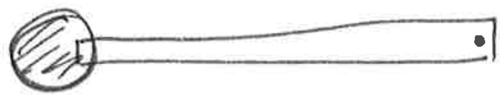
$$= \frac{Mv_0^2}{2}\left[\frac{5}{7} - 1\right] = -\frac{Mv_0^2}{2}\frac{2}{7}$$

Esta variação de energia é dada pelo trabalho da força de atrito, logo

$$\boxed{\tau_{at} = -\frac{Mv_0^2}{7}}$$

(4)

a)



$$\int r^2 \, dm$$

I_{borra} no cm

$$I_{cm\,borra} = \int_{-L/2}^{+L/2} x^2 \lambda \, dx \qquad \lambda = \frac{M}{L} \qquad dm = \lambda dx$$

$$r^2 = x^2$$

$$= \lambda \int_{-L/2}^{+L/2} x^2 dx = \frac{\lambda}{3}\left((L/3)^3 - (-L/3)^3 \right) = \frac{ML^2}{12}$$

no eixo de rotação $\quad h = L/2$

$$I_{borra} = \frac{ML^2}{12} + Mh^2 = \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{3}$$

$$I_{cm\,bola} = \frac{2}{5} m R^2$$

$$I_{bola} = \frac{2}{5} m R^2 + mL^2$$

$$I_{borra + bola} = \frac{ML^2}{3} + \frac{2}{5} mR^2 + mL^2$$

se $m = M$

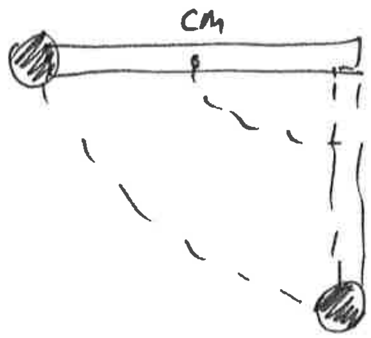
$$I = \frac{ML^2}{3} + \frac{2}{5} MR^2 + ML^2$$

$$I = \frac{4}{3} ML^2 + \frac{2}{5} MR^2 = \boxed{M\left(\frac{4}{3}L^2 + \frac{2}{5}R^2\right)}$$

b)

como a única força é a força peso

a energia mecânica se conserva.



$U_i = 0$

$U_f = ?$

$0 = \cancel{K_{barra}} + \text{Rotação}_{\cancel{barra}} + U_{f\,barra} + U_{f\,bola} +$

$$0 = \frac{1}{2} J \omega^2 + M g\, y_{cm} + m g\, y_{bola}$$

$$0 = \frac{1}{2} J \omega^2 - M g \frac{L}{2} - M g L$$

$$0 = \frac{1}{\cancel{2}} J \omega^2 - \frac{3}{\cancel{2}} M g L$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{3MgL}{J}}}$$

$v = \omega R$

$v = \omega L$

c) $L_i = L_f$

$I_i \omega_1 = I_f \omega_f$

$I_i = J_{barra+bola}$

$I_f = I_{barra}$

$$\omega_f = \omega_i \frac{I_i}{I_f} = \frac{\cancel{M}\left(\frac{4}{3}L^2 + \frac{2}{5}R^2\right)}{\frac{\cancel{M}L^2}{3}} \omega_i$$

$$= \left(4\frac{L^2}{L^2} + \frac{6}{5}\frac{R^2}{L^2}\right) \omega_i$$