04.07 - 4320195 - Física Geral para Engenharia I - Prova substitutiva

Você tem até 120 minutos para fazer esta prova. Resolva os exercícios de maneira organizada. Cada exercício vale 2.5 pontos. Bom trabalho.

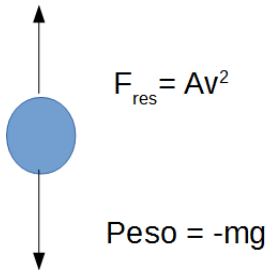
1 Partícula em queda sob ação de forças resistivas

Um corpo de massa m em queda vertical sofre a ação da força peso e de uma força resistiva que depende do quadrado do módulo da velocidade do corpo. Esta força atua na direção contrária ao movimento e se escreve $\left\|\vec{F}_{\text{res}}\right\| = Av^2$. O corpo parte inicialmente do repouso. Considere que a aceleração da gravidade local tem módulo igual a g e é aproximadamente constante.

(a) (0.5) Esboce um diagrama das forças que atuam sobre o corpo.

Solução:

Espera-se que aluno interprete o enunciado e esboce um corpo sujeito a duas forças com direções opostas, corretamente identificadas.



(b) (0.5) Para cada uma das forças do seu diagrama, aponte qual o par ação-reação (dado pela terceira Lei de Newton) da mesma e descreva seu efeito.

Solução:

Força peso: atração gravitacional da Terra pelo objeto, Força de resistência: pressão sob o fluido, ou expulsão do fluído pela passagem do objeto, etc

(c) (0.5) Escreva a equação do movimento (segunda Lei de Newton) para este corpo (não precisa resolver a equação). Determine o módulo de $\vec{v}$, em função dos parâmetros A, g e m, para o qual a aceleração do corpo em queda é nula.

Solução:

Segunda lei de Newton: $\sum F = ma$, $-mg + Av^2 = ma$ (0.2 pontos) ou $mg - Av^2 = ma$, o sinal deve ser coerente com o item (a) desta mesma questão.

Velocidade terminal:

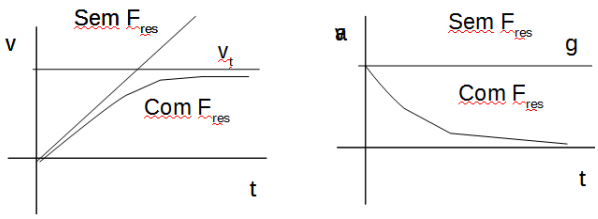
$$-mg + Av_t^2 = 0$$

$$v_t = \sqrt{mg/A}$$

(d) (1.0) Esboce em dois gráficos distintos o comportamento qualitativo da aceleração e da velocidade do corpo em queda como função do tempo. Em cada gráfico, complete seu esboço comparando o presente caso com a aceleração e velocidade deste corpo em uma queda livre (sem resistência do ar).

Solução:

Aceleração: o aluno deve identificar uma aceleração que se inicia em g e vai a 0, uma velocidade que é inicialmente 0 e vai até a velocidade encontrada em (c) . Estes resultados devem ser constrastados com uma aceleração constante igual a g e com uma velocidade que varia *linearmente* com o tempo.

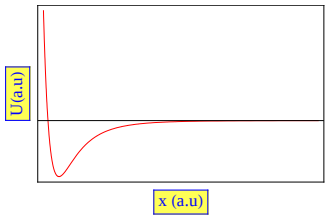


2 Cadeia de moléculas diatômicas lineares

Considere uma cadeia de moléculas lineares diatômicas, formadas por átomos A e B de massas M e m, respectivamente. Na situação na qual $M \gg m$, o átomo A permanece em repouso na origem do sistema de coordenadas enquanto que B tem sua dinâmica determinada pelo chamado potencial de Lennard-Jones

$$V(x) = -\frac{a}{x^6} + \frac{b}{x^{12}}$$

onde x é a distância do átomo B até o átomo A, fixo na origem, e a e b são constantes positivas. Um esboço deste potencial é dado abaixo. Reproduza o esboço deste potencial em sua folha de respostas para responder os itens $(a) - (c)$.



(a) (0.5) Trace em seu esboço um valor de energia total (identifique como E_∞) para a qual o átomo B se afasta indefinidamente do átomo de massa A.

Solução:

O aluno deve traçar uma linha de energia constante que deve estar *claramente* acima da linha do "zero" .

(b) (0.5) Trace em seu esboço um valor de energia total (identifique como E_{osc}) para a qual o átomo B oscila entre duas distâncias, mínimas e máximas (x_{min} e x_{max}), do átomo A. Mostre os pontos x_{min} e x_{max} no esboço.

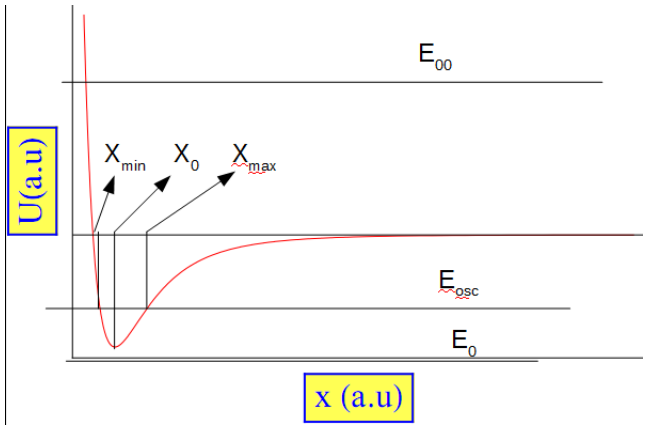
Solução:

O aluno deve traçar uma linha de energia constante, *claramente* cruzando o o poço de potencial , indicando os pontos x_{min} e x_{max} corretamente.

(c) (0.5) Trace em seu esboço um valor de energia total (identifique como E_{min}) para a qual o átomo B permanece em equilíbrio a uma distância x_0 do átomo A.

Solução:

O aluno deve traçar uma linha de energia constante, tangenciando o poço de potencial em seu ponto de mínimo, indicando o ponto x_0 corretamente.



(d) (1.0) Determine a distância de equilíbrio x_0 e E_{min} em função dos parâmetros a e b.
Solução:
Identificação que em x_0 o potencial é minimo (ou a força é igual a 0). Cálculo correto de x_0.

$$\frac{d}{dx}(-\frac{a}{x^6}+\frac{b}{x^{12}})|_{x=x_0} = (\frac{6a}{x^7}-\frac{12b}{x^{13}})|_{x=x_0} = 0$$

$$x_0^6 = \frac{12b}{6a} = \frac{2b}{a}$$

$$x_0 = (\frac{2b}{a})^{1/6}$$

Identificação que $E_T = E_{min} = V(x_0)$. Cálculo correto de E_{min}.

$$E_{min} = (-\frac{a}{x^6}+\frac{b}{x^{12}})|_{x=x_0} = -\frac{a}{2b/a}+\frac{b}{(2b/a)^2} = -\frac{a^2}{2b}+\frac{a^2}{4b} = -\frac{a^2}{4b}$$

Tomar cuidado com possivel soluão do tipo $V(x_0) = 0$, que leva a algo parecido!

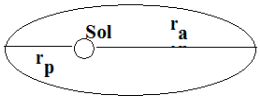
3 Órbitas elípticas

O cometa Encke foi descoberto em 1786 por Pierre Mechain. Considere que este cometa tem uma órbita cujo afélio (maior distância ao sol) é r_a e o periélio (menor distância ao sol) é r_p. Considere ainda que que $M_{\text{Sol}} \gg m_{\text{cometa}}$, de maneira que o Sol permanece fixo durante a órbita do cometa.

(a) (0.5) Faça um esquema simples indicando a órbita do cometa, a posição do Sol em relação a órbita e os parâmetros r_a e r_p.

Solução:

A trajetória deve sugerir uma elipse com o Sol em um dos focos. Identificação correta de r_a e r_p . Erro pode ocorrer ao identificar r_a e r_p com os semi-eixos da elipse. Sol na origem "zera" a questão.



(b) (0.5) Explique, em até duas linhas, porque o momento angular do cometa em relação ao ponto focal é conservado neste sistema.

Solução:

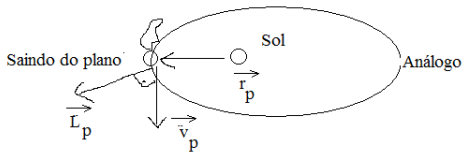
Estritamente correto: A resposta deve conter o seguinte encaminhamento: o cometa está sujeito apenas a força gravitacional que aponta para o foco. Esta é uma força central. Forças centrais não exercem torques.

Quase correta: Força gravitacional não causa torque.

Quase tautológica: Porque não há torques no sistema.

(c) (0.5) Faça um esquema indicando os *vetores* posição, velocidade e momento angular do cometa Encke quando este está no afélio e no periélio (a órbita tem sentido anti-horário).

Solução:



(d) (1.0) Considerando que o cometa tem velocidades (módulo) iguais a v_a no afélio e v_p no periélio, encontre a razão entre as velocidades v_a e v_p Dê um valor numérico aproximado. Os seguintes valores são resultados de medidas experimentais e devem ser usados: $r_a = 6.1 \times 10^{11}$m e $r_p = 5.1 \times 10^{10}$m.

Solução:

O problema pode ser feito de maneira simples através da conservação do momento angular ou, de maneira pouco mais complicada, pela conservação da energia.

Conservação do momento angular:

$$L_a = m r_a v_a$$

$$L_p = m r_p v_p$$

Calculou corretamente a razão (v_a/v_p) :

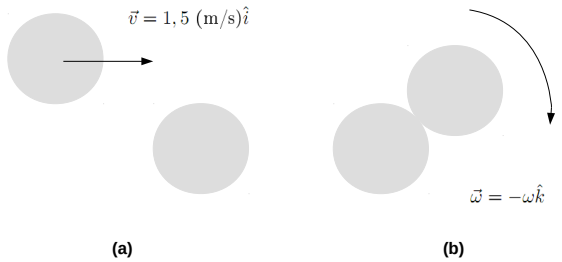
$$\frac{L_a}{L_p} = \frac{v_a r_a}{v_p r_p} = 1$$

$$\frac{v_a}{v_p} = \frac{r_p}{r_a} = \frac{5.1 \times 10^{10}}{6.1 \times 10^{11}} \approx 0.83 \times 10^{-1}$$

Observar que uma razão não possui unidades! Se o aluno errar a conta, é importante que ele reconheça o erro em algum comentário qualitativo.

4 Rotações e colisões

Um disco com uma massa de 1 Kg, uniformemente distribuída em torno de seu centro de massa, e raio de $10,00$ cm, desliza ao longo de uma mesa de ar com velocidade de 1.5 m/s como mostrado na figura abaixo. Ele faz uma colisão oblíqua com um segundo disco idêntico, inicialmente em repouso. Como suas bordas estão revestidas com uma cola de ação instantânea, os discos ficam grudados e giram após a colisão com uma velocidade angular $\vec{\omega} = -\omega\hat{k}$. (ver figura).



(a) (0.5) Determine o vetor momento angular total do sistema em relação ao seu centro de massa (dica: use a configuração inicial do sistema, indicada por (a) na figura).

Solução:

Cálculo completo e correto do momento angular

$$\vec{L}_0 = \vec{r}_0 \times m\vec{v}_0$$

$$\begin{cases} \vec{v}_0 & = 1.5\ \mathrm{m/s}\hat{i} \\ \vec{r}_0 & = x_{\mathrm{cm}}(t)\hat{i} + R\hat{j} \end{cases}$$

$$\vec{L}_0 = -0.15\ \mathrm{Kg.m^2s^{-1}}\hat{k}$$

(b) (0.5) Determine o vetor velocidade linear do centro de massa do sistema ($\vec{v}_{\mathrm{cm}}$) após a colisão.

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_f$$

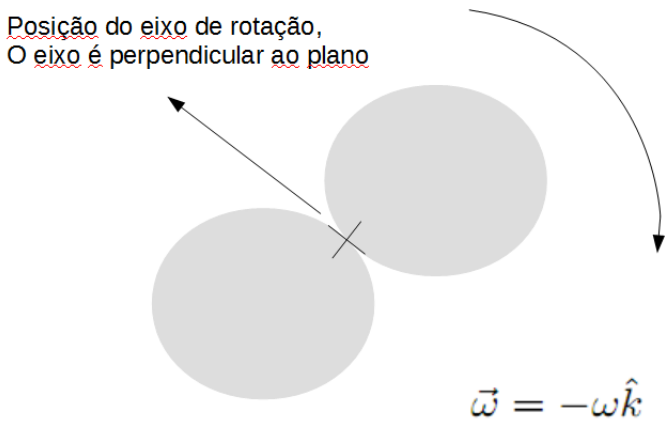
$$\vec{p}_0 = m\vec{v}_0$$

$$\vec{p}_f = (2m)\vec{v}_{cm}$$

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\vec{v}_0}{2} = 0.75\ \mathrm{m/s}\hat{i}$$

(c) (1.0) Indique em um esboço o eixo de rotação do sistema após a colisão e determine o momento de inércia do sistema em relação a este eixo.

Eixo: Perpendicular ao plano, passando pelo CM.



Cálculo do momento de inércia:

$$I = I_1 + I_2 = 2I_1 = mR^2 + 2mR^2 = 3mR^2 = 3 \times 10^{-2} \text{ Kg.m}^2$$

(d) (0.5) Determine a velocidade angular ω do sistema.
Da expressão $\vec{L} = I\vec{\omega}$, temos

$$\omega = \frac{L_0}{I} = \frac{0.15}{3 \times 10^{-2}} = 5 \text{ s}^{-1}$$

Formulário

A priori, você vai utilizar, ou pensar sobre, estas fórmulas para resolver os exercícios da prova.

Segunda Lei de Newton

$$\sum F = ma$$

momento angular de uma particula

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

momento angular e torques ($\vec{N}$)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

Forças e energia potencial (1D)

$$\vec{F} = -\frac{d}{dx}V(x)\hat{x}$$

Derivada importante:

$$\frac{d}{dx}(\frac{1}{x^r}) = -r\frac{1}{x^{r+1}}$$

Momento angular de um disco de massa m e raio R:

$$I_{\text{cm}} = \frac{1}{2}mR^2$$

Teorema dos eixos paralelos:

$$I_P = I_{\text{cm}} + Md_{\text{cm}}^2$$

Para rotações no plano:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$