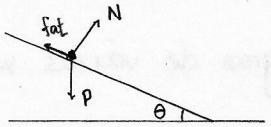
Física - P3

No ensino médio:



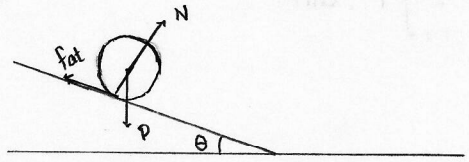
Qual a energia do corpo?

$$E = \underset{\substack{\downarrow \\ mgh}}{E_{pgrav}} + E_{cin}$$

↳ energia $\underbrace{\text{cinética}}_{\text{movimento}}$

O único movimento é a translação: $E_{cin} = \frac{mV^2}{2}$ → velocidade de translação

Agora:



Note o ponto de aplicação das forças. fat aplica um torque, que faz a bola girar.

Qual a energia do corpo?

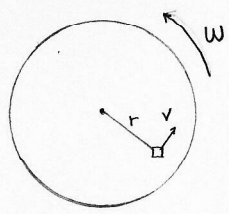
$$E = \underset{\substack{\downarrow \\ mgh_{cm}}}{E_{pgrav}} + E_{cin}$$

Como agora temos um movimento de rotação, junto com a translação, a energia cinética não pode ser simplesmente $\frac{mv^2}{2}$.

$$E_{cin} = E_{cin}^{transl.} + \underbrace{E_{cin}^{rot.}}_{\text{como calcular?}} = \frac{mV^2}{2} + E_{cin}^{rot.}$$

Energia de Rotação

exemplo: Disco em torno do centro



Note que cada ponto do disco possui velocidade linear (v) diferente.

Pegamos um pedaço de massa distante de r do centro.

Sua energia é: $e = \frac{mV^2}{2} \underset{V = w.r}{=} \frac{m(w.r)^2}{2} = \frac{mr^2.w^2}{2}$

Mas queremos a energia do corpo inteiro, porém como?

Usamos as ferramentas do cálculo: somamos as energias de várias massas pequenas, e tomamos o limite (integral)

$$E = \lim_{m \to 0} \sum e = \lim_{m \to 0} \sum m.r^2 . \underbrace{\frac{\omega^2}{2}}_{\text{Constante p/ todos os pontos}} = \frac{\omega^2}{2} \underbrace{\boxed{\lim_{m \to 0} \sum mr^2}}_{I}$$

Assim:

$$E = \frac{I\omega^2}{2}, \text{ onde } I = \lim_{m \to 0} \sum m.r^2 = \int r^2 . dm$$

Chamamos I de momento de inércia.

Paralelo Translação - Rotação

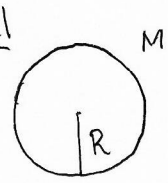
Note a semelhança: $\frac{I\omega^2}{2} \leftrightarrow \frac{mv^2}{2}$ Podemos construir uma tabela:

Translação	Rotação
$S = S_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2}$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$
$\frac{mv^2}{2}$	$\frac{I\omega^2}{2}$
$F = m.a$	$\tau = I.\alpha$
$Q = m.v$	$L = I.\omega$

Assim como $F = m.a$ e $Q = m.v$, são importantes para resolver muitos problemas.

exemplo de cálculo de momento de inércia:

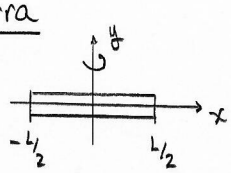
anel



$$I = \int_0^M r^2 \cdot dm = R^2 \int_0^M dm = R^2 \cdot (M-0) = MR^2$$

$r = R = cte.$

barra



$$I = \int_0^M r^2 \cdot dm$$

$r = x$

p/ calcular:

relação entre r e m → relação de distribuição de massa → "densidade"

$\frac{M}{L}$ = cte. (se a barra for homogênea)

$$\Rightarrow \frac{dm}{dx} = \frac{M}{L} \Leftrightarrow dm = \frac{M}{L}\,dx$$

$$I = \int_0^M r^2\, dm = 2\int_0^{L/2} x^2 \cdot \frac{M}{L} \cdot dx = \frac{2M}{L}\int_0^{L/2} x^2 \cdot dx = \frac{2M}{L}\left(\frac{(L/2)^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right)$$

eixo de rotação no meio: raio → $0 - \frac{L}{2}$

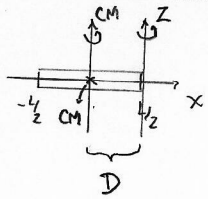
$$I = \frac{2ML^3}{8 \cdot 3L} = \boxed{\frac{ML^2}{12}}$$ (eixo no meio)

se o eixo estivesse na ponta:

$$I = \int_0^L x^2 \frac{M}{L}\,dx = \frac{M}{L}\cdot\left(\frac{L^3}{3} - 0\right) = \boxed{\frac{ML^2}{3}}$$ (eixo na extremidade)

outras ferramentas:

Teorema dos eixos paralelos: cada eixo de rotação define um I



CM é o eixo que passa pelo centro de massa

Z é o novo eixo, com Z // CM

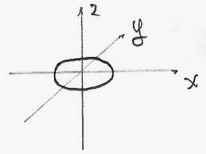
D é a distância entre os eixos.

$$\boxed{I_Z = I_{CM} + MD^2}$$

exercício: verifique para o caso da barra da figura

Teorema dos eixos perpendiculares: válido para objetos planos

se o objeto estiver no plano x-y:



$$\boxed{I_z = I_y + I_x}$$

Torque e momento angular

torque: análogo angular da força. calculado do jeito que vocês conhecem.

$$\vec{\tau}_F = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

$$\tau_F = r.F.\text{sen}\theta = F.\underbrace{r.\text{sen}\theta}_{\text{distância perpendicular}}$$

momento angular: análogo angular do momento, denotado por L

$$\vec{L} = I.\vec{\omega}$$

$$(\vec{Q} = m.\vec{v})$$

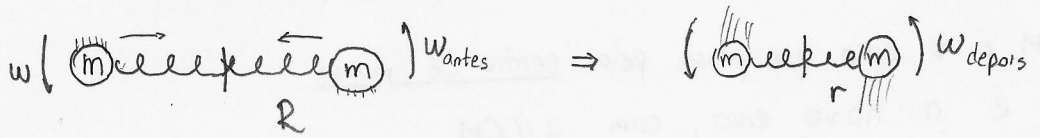
Conservação do momento angular

Análogo ao linear:

Se $\tau_R^{externo} = 0$, o momento angular se conserva

$$L_{antes} = L_{depois}$$

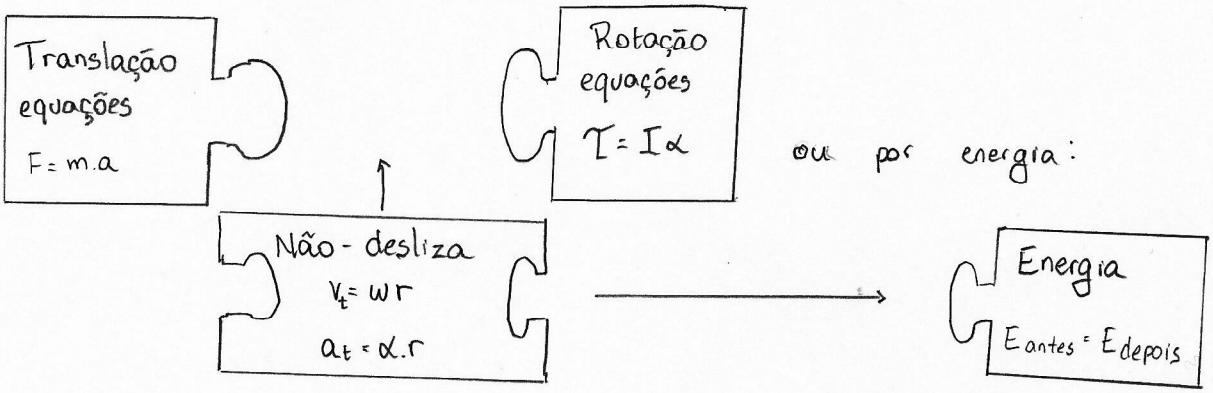
Consequência importante:

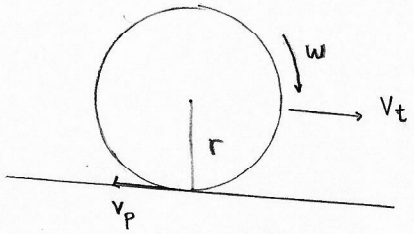


raio diminui: $I = \int r^2 dm$ ⇒ logo I diminui

$L = \downarrow I.\omega\uparrow = \text{const.}$ I diminui ⇒ ω aumenta

Método de resolução de alguns problemas:





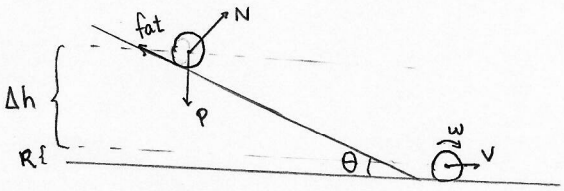
v_p: vel. de um ponto na extremidade ($v_p = \omega . r$)

se não desliza, o ponto "anda junto" com o chão.

$v_p = v_t \Rightarrow v_t = \omega . r$

derivando dos dois lados: $a_t = \alpha . r$

exercício: esfera de massa M e raio R



$v = ?$ $\omega = ?$ (supondo que não desliza)

$a = ?$ $\alpha = ?$

Translação:

$P . \text{sen}\,\theta - fat = M . a$

$P . \cos\theta = N$

$\xleftrightarrow{a = \alpha . R}$

Rotação

$\tau_R = I . \alpha$

$I = \frac{2}{5} M R^2$ (esfera)

$\tau_R = fat . R$

↓

fat é na superfície e perpendicular ao centro

Com todas as equações, basta resolver o sistema.

Velocidade: Energia

$E_{antes} = E_{depois}$

$Mg . \Delta h = \frac{M . v^2}{2} + \frac{I \omega^2}{2}$

+

$I = \frac{2}{5} M R^2$

$\omega = \frac{v}{R}$

R: $a = \frac{5}{7} g \,\text{sen}\,\theta$ $\alpha = \frac{5}{7} \frac{g \,\text{sen}\,\theta}{R}$ $v = \sqrt{\frac{10}{7} g \Delta h}$ $\omega = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{10}{7} g \Delta h}$