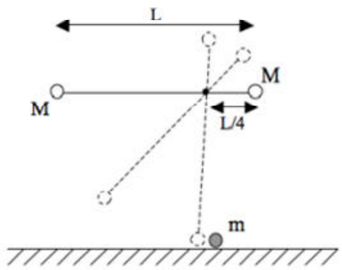
Física I – P3 – Exercícios

P3 2011)

2. Um haltere composto por uma barra delgada de massa desprezível e comprimento L possui em cada extremidade um pequeno corpo de massa M de tamanho desprezível. O haltere é colocado para girar sem atrito em torno de um eixo horizontal perpendicular à barra, que passa por um ponto localizado a $1/4$ do seu comprimento. O haltere é abandonado no repouso na posição horizontal (ver desenho). Expresse suas respostas em função de M, L e da aceleração gravitacional g.



(a) (0,5) Calcule o momento de inércia I do haltere em relação àquele eixo de rotação.

(b) (1,0) Calcule a velocidade linear da extremidade mais comprida do haltere quando ela atinge a posição inferior.

(c) (1,0) Se, nesta posição inferior, o haltere colidir com um outro corpo de massa $m = 5M/3$ e tamanho também desprezível, inicialmente em repouso e que fica grudado no haltere, qual será a velocidade angular do conjunto logo depois da colisão?

a)

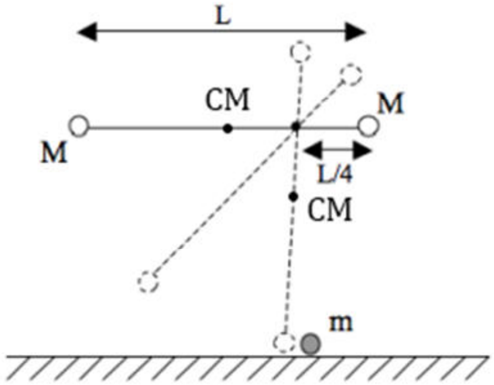
Como são corpos pontuais, basta somar o produto MR^2, onde R é a distância até o eixo de rotação:

$$I_{haltere} = M\left(\frac{L}{4}\right)^2 + M\left(\frac{3L}{4}\right)^2 = \frac{5ML^2}{8}$$

b)

A única força agindo sobre o haltere é a força gravitacional, que é conservativa. Logo, a energia mecânica se conserva. Note que a força gravitacional do haltere é aplicada no centro de massa, então há um torque causado pela força gravitacional, e o momento angular não é constante.

Então o único caminho que podemos seguir é através da energia, pois não há meios de calcular a variação do momento angular (seria necessário uma informação sobre o tempo que levou até ir o ponto mais baixo).



Na hora de calcular a variação de energia potencial gravitacional, devemos levar em conta a variação de altura do **<u>centro de massa</u>**.

Como as duas massas são iguais, o centro de massa fica bem no meio do haltere. Portanto, o centro de massa caiu uma altura de $\Delta h = h_{inicial} - h_{final} = \left(\frac{L}{2} + \frac{L}{4}\right) - \frac{L}{2} = \frac{L}{4}$

Pela conservação de energia, temos:

$$E_{inicial} = E_{final} \Leftrightarrow E_g^{inicial} = E_g^{final} + E_{cinetica}^{rotação} \Leftrightarrow 2Mg\Delta h = \frac{I\omega^2}{2}$$

$$2Mg\frac{L}{4} = \frac{5ML^2}{8}\frac{\omega^2}{2} \Leftrightarrow \omega^2 = \frac{8g}{5L} \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{8g}{5L}}$$

Portanto, a velocidade linear da parte inferior do haltere é:

$$v = \omega R = \sqrt{\frac{8g}{5L}} \cdot \frac{3L}{4} = \sqrt{\frac{9gL}{10}}$$

c)

Na colisão, sabemos que o momento, tanto linear quando angular se conservam. No caso, é relevante o momento angular.
Lembrando que momento angular é: $L = I\omega$
Já sabemos que:

$$L_{antes} = I_{antes}\omega_{antes} = \frac{5ML^2}{8}\sqrt{\frac{8g}{5L}}$$

Como a massa m ficou grudada no haltere, houve uma mudança no momento de inércia:

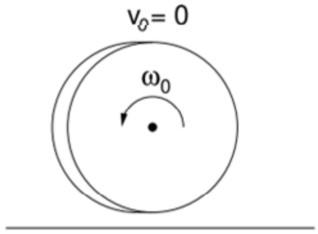
$$I_{depois} = I_{antes} + m\left(\frac{3L}{4}\right)^2 = \frac{5ML^2}{8} + \frac{15ML^2}{16} = \frac{25ML^2}{16}$$

Conservação do momento angular:

$$L_{antes} = L_{depois} \Leftrightarrow \frac{5ML^2}{8}\sqrt{\frac{8g}{5L}} = \frac{25ML^2}{16}\,\omega_{depois} \Leftrightarrow \omega_{depois} = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{8g}{5L}} = \sqrt{\frac{32g}{125L}}$$

P3 2011)

3. Um disco sólido uniforme é posto em rotação com velocidade angular ω_0 em torno de um eixo horizontal, perpendicular ao plano do disco, passando por seu centro de massa. Depois, a borda do disco é posta em contato com uma superfície horizontal, e o disco é solto, com seu eixo de rotação paralelo à superfície, como na figura ao lado. Seja R o raio do disco, M sua massa e $I = MR^2/2$ seu momento de inércia em torno do centro de massa, e seja μ o coeficiente de atrito cinético entre o disco e a superfície. Em termos de ω_0, R, M, μ e da aceleração da gravidade g:



(a) (1,0) Qual é o tempo necessário para que o disco deixe de derrapar?

(b) (0,5) Qual é a velocidade angular do disco no momento em que ele deixa de derrapar?

(c) (0,5) Qual é a distância percorrida enquanto o disco está derrapando?

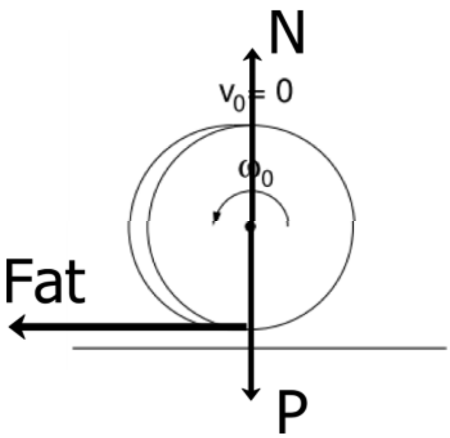
(d) (0,5) Calcule a razão entre a energia cinética final e a energia cinética inicial do disco.

Esse exercício é do tipo que você lê e não sabe por onde começar. Entender esse exercício vai fazer com que você entenda muitos outros, por isso recomendo que após ler a resolução, tente refazer sozinho para absorver essa linha de raciocínio.

a)

O primeiro passo é entender o que está acontecendo e visualizar mentalmente a situação. O que está acontecendo é similar a quando um carro em repouso sai cantando pneu. Inicialmente, a roda só gira em falso, e lentamente vai se movendo para frente até meio que "travar" e começar a girar sem escorregar.

Agora que a situação está entendida, vamos transformar em equações:



Equações:

Linear: Lembre que a força de atrito é dinâmico, e portanto $Fat \ = \ \mu N$

x: $Fat = Ma \ \Leftrightarrow \ \mu N = Ma \ \Leftrightarrow a = \ \mu g$

y: $N = P = \ Mg$

Angular: Note que somente a força de atrito faz torque, pois estamos considerando a rotação em torno do centro do disco.

$$\tau_R = I\alpha \ \Leftrightarrow Fat.R = \frac{MR^2}{2}\alpha \ \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\mu g}{R}$$

Com isso, obtivemos a aceleração linear, que muda a velocidade do eixo de rotação, e a angular, que muda a velocidade de rotação. Porém falta relacionar as duas.

Note que essas acelerações não obedecem $a = \alpha R$, pois essa é a condição para não derrapar, e utilizamos o atrito dinâmico para obter essas expressões. Se não estivesse deslizando, não poderíamos ter usado $Fat = \mu N$, pois o atrito estático só pode ser calculado assim no limite máximo. Em outros casos, o atrito estático é dependende de outras coisas. As velocidades também não obedecem a relação, pois temos: $\omega = \omega_0 \ e \ v = 0$.

Note também que a aceleração angular está no sentido contrário da velocidade, e portanto é uma desaceleração. Então temos uma desaceleração angular e uma

aceleração linear. Então, a velocidade linear vai aumentar e a angular vai diminuir, até que após um certo tempo a relação $v = \omega R$ vai ser obedecida e o disco para de deslizar. No instante que isso ocorrer, a força de atrito deixará de ser dinâmico, o que significa que não podemos mais calcular ela como μN, e ela vira uma incógnita a ser calculada, dependendo das outras condições.
Então precisamos calcular o tempo necessário para que a relação seja obedecida, usando os conceitos de cinemática:

$$v = \omega . R \Leftrightarrow at = (\omega_0 - \alpha t)R \Leftrightarrow \mu g t = \omega_0 R - 2\mu g t \Leftrightarrow t = \frac{\omega_0 R}{3\mu g}$$

b)
Feito o item a, agora fica tudo fácil. Usando os conceitos de cinemática:

$$\omega = \omega_0 - \alpha t = \omega_0 - \frac{2\mu g}{R} . \frac{\omega_0 R}{3\mu g} = \frac{\omega_0}{3}$$

c)
Novamente, usando os conceitos de cinemática (ou cálculo):

$$\Delta x = \frac{at^2}{2} = \frac{\mu g}{2}\left(\frac{\omega_0 R}{3\mu g}\right)^2 = \frac{{\omega_0}^2 R^2}{18\mu g}$$

d)
A energia cinética inicial é:

$$E_{inicial} = E_{rotação} = \frac{I\omega_0^2}{2} = \frac{MR^2{\omega_0}^2}{4}$$

A energia cinética final é:

$$E_{final} = E_{rotação} + E_{translação} = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{Mv^2}{2}$$

Aqui temos que somar as duas energias cinéticas, a de rotação e a de translação. No caso da translação, a velocidade usada é a do eixo de rotação. No caso, o centro de massa. Substituindo $v = \omega R$ e $\omega = \frac{\omega_0}{3}$:

$$E_{final} = \frac{\frac{MR^2}{2}\omega^2}{2} + \frac{MR^2\omega^2}{2} = \left(\frac{MR^2}{2} + MR^2\right)\frac{\omega^2}{2} = \frac{3MR^2}{2}\frac{{\omega_0}^2}{18} = \frac{MR^2{\omega_0}^2}{12}$$

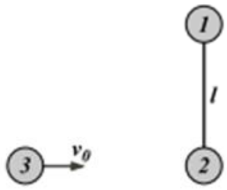
Portanto:

$$\frac{E_{final}}{E_{inicial}} = \frac{1}{3}$$

Note que a parte importante deste exercício está na parte de transformar em equações. Usar a segunda lei de Newton $F = Ma$ todo mundo já está acostumado. Mas agora, temos que levar em conta mais uma equação, o equivalente angular da segunda lei de Newton: $\tau = I\alpha$
Essa nova equação não compartilha variáveis com o balanço de forças $F = Ma$, mas o que conecta elas é a condição de não deslizar, como dito na aula.

Lista)

24. (*) Um haltere formado por dois discos 1 e 2 iguais de massas m unidos por uma barra rígida de massa desprezível e comprimento $l = 30\ cm$ repousa sobre uma mesa de ar horizontal. Um terceiro disco 3 de mesma massa m desloca-se com atrito desprezível e velocidade $v_0 = 3\ m/s$ sobre a mesa, perpendicularmente ao haltere, e colide frontalmente com o disco 2, ficando colado a ele. Descreva completamente o movimento subseqüente do sistema.
R: $v_{CM} = 1\ m/s$ na direção de v_0 e $\omega = 5\ rad/s$



A massa 3, ao colidir com o haltere vai grudar e iniciar um movimento de rotação, somado ao movimento de translação. A rotação será ao redor do centro de massa, pois o haltere está livre pra rotacionar em torno de qualquer eixo, e a rotação de menor momento de inércia é em torno do centro de massa, por consequência do teorema dos eixos paralelos.
Sabendo que a rotação será em torno do centro de massa, precisamos saber onde está o centro de massa para calcularmos momentos angulares e momento de inércia. Lembrando que o centro de massa é uma média ponderada das partes, o que significa que o centro de massa deve ter uma velocidade para a direita e tem que estar mais próximo da parte de baixo.

$$3mv_{CM} = mv_0 + m.0 + m.0 \iff v_{CM} = \frac{v_0}{3} = 1m/s$$

Considerando a origem da coordenada y nas massas 2 e 3, a posição y do centro de massa é:

$$3m.y_{CM} = ml + m.0 + m.0 \iff y_{CM} = \frac{l}{3} = 10cm$$

Agora podemos calcular as grandezas angulares. Como não há forças externas, o momento angular se conserva:

$$L_{antes} = mv_0.r\sin\theta = mv_0\frac{l}{3}$$

Nessa fórmula do momento angular, o $r\sin\theta$ é a distância perpendicular até o eixo de rotação, igual se calcula torque.

$$L_{depois} = I\omega$$

Precisamos calcular o momento de inércia depois da colisão, em relação ao centro de massa.

$$I = m\left(\frac{2l}{3}\right)^2 + 2m\left(\frac{l}{3}\right)^2 = \frac{2ml^2}{3}$$

Portanto:

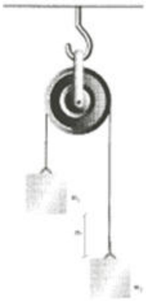
$$L_{antes} = L_{depois} \iff mv_0\frac{l}{3} = \frac{2ml^2}{3}\omega \iff \omega = \frac{v_0}{2l} = \frac{3}{2 \cdot 0{,}3} = 5\ rad/s$$

Lista)

32. (**) Considere dois corpos com $m_1 > m_2$ ligados por um fio de massa desprezível que passa sobre uma polia de raio R e momento de inércia $I = \frac{MR^2}{2}$ ao redor de seu eixo de rotação, como na figura a seguir. O fio não desliza sobre a polia. A polia gira sem atrito. Os corpos são soltos do repouso e estão separados por uma distância vertical de $2h$. Expresse as respostas em função de m_1, m_2, M, g e h.

   (a) Encontre as velocidades translacionais dos corpos quando passam um pelo outro.
   R: $v = \left[\frac{2gh(m_1 - m_2)}{\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2}\right)}\right]^{1/2}$

   (b) Encontre a aceleração linear dos corpos.
   R: $a = \frac{(m_1 - m_2)}{\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2}\right)} g$



---

a) O sistema é conservativo, portanto a energia mecânica se conserva. Mas precisamos saber em que altura eles passam um pelo outro, para saber a energia potencial.

Eles estão conectados por uma corda, o que significa que se uma massa desce Δh, então a outra tem que subir a mesma distância para manter o comprimento da corda igual. Por esse mesmo princípio, as massas $m1$ e $m2$ tem que ter velocidades e acelerações iguais.

Como a diferença de altura entre elas é $2h$, quando a massa $m1$ descer h, a massa $m2$ vai ter subido h e vai ser o momento que elas passam uma pela outra.

Pela conservação de energia:

$$E_{antes} = E_{depois} \Leftrightarrow E_g^{antes} = E_g^{depois} + E_{cin} \Leftrightarrow \Delta E_g = E_{cin}$$

A energia cinética é a soma das energias de cada corpo, incluindo a energia rotacional da polia. Como a corda não desliza, a velocidade linear da corda se relaciona com a velocidade angular da polia: $v = \omega R$

$$E_{cin} = \frac{m1.v^2}{2} + \frac{m2.v^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{(m1 + m2)v^2}{2} + \frac{MR^2}{2}\frac{v^2}{2R^2} = \frac{(m1 + m2 + \frac{M}{2})v^2}{2}$$

A variação de energia potencial gravitacional é a massa $m1$ descendo h e a massa $m2$ subindo h:

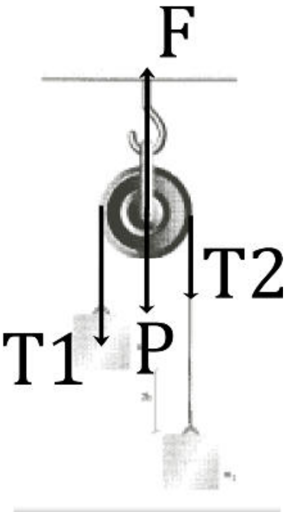
$$\Delta E_g = m1.gh - m2.gh = (m1 - m2)gh$$

Igualando:

$$(m1 - m2)gh = \frac{(m1 + m2 + \frac{M}{2})v^2}{2} \Leftrightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{2(m1 - m2)gh}{m1 + m2 + \frac{M}{2}}}}$$

b) Nesse caso, as tensões de cada lado da polia não são iguais. Isso acontece porque a polia tem massa e por causa do atrito estático entre a polia e a corda.

O primeiro passo é marcar as forças. Vou marcar apenas na polia, pois nos bloquinhos todo mundo sabe.



Agora é transformar tudo em equação e tentar tirar leite de pedra, ou números de papel.

Na polia:

Linear: $F = T_1 + T_2 + P$ (essa equação, na verdade, não será usada)

Angular: $T_1 R - T_2 R = I\alpha$ (0) (as tensões fazem torque no sentido contrário, e como $m1 > m2$, eu sei que o sentido de rotação vai ser anti-horário)

Nos blocos:

$P_1 - T_1 = m1.a \Leftrightarrow m1.g - T_1 = m1.a$ (1)

$T_2 - P_2 = m2.a \Leftrightarrow T_2 - m2.g = m2.a$ (2)

Agora vem a condição de não deslizamento: $a = \alpha R$

Com todas essas equações, basta resolver o sistema:

$$(0):\ T_1 R - T_2 R = \frac{MR^2}{2}\alpha \Leftrightarrow 2T_1 - 2T_2 = M\alpha R = Ma$$

Fazendo $(1) + (2)$ e substituindo o resultado acima:

$$(m1 - m2)g + T_2 - T_1 = (m1 + m2)a \Leftrightarrow (m1 - m2)g - \frac{Ma}{2} = (m1 + m2)a$$

$$\boxed{a = \frac{(m1 - m2)g}{\left(m1 + m2 + \frac{M}{2}\right)}}$$

Lista)

11. (*) Europa é um satélite do planeta Júpiter, com raio de 1569 km e com aceleração em queda-livre, na sua superfície, de 1,39 m/s^2.

    (a) Calcule a velocidade de escape em Europa.
    R: 2,09 km/s

    (b) Que altura uma partícula alcança se ela deixa a superfície com uma velocidade vertical de 1,01 km/s?
    R: 478,9 km

    (c) Com que velocidade um objeto atinge o satélite se ele for largado de uma altura de 1000 km?
    R: 1,303 km/s

    (d) Calcule a massa de Europa.
    R: $5,13 \times 10^{22}$ kg

a) A velocidade de escape é:

$$v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Mas não temos informações da massa do planeta, então precisamos usar a informação da aceleração gravitacional na superfície:

$$mg = \frac{GMm}{R^2} \Leftrightarrow g = \frac{GM}{R^2} \Leftrightarrow gR = \frac{GM}{R}$$

Logo:

$$v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR} = 2088\, m/s$$

b) Podemos fazer uma simples conservação de energia, mas lembrando que energia potencial gravitacional não é mgh. Isso só serve para campos gravitacionais constantes, que é uma aproximação para distâncias pequenas.

$$E_{antes} = E_g + E_{cin} = -\frac{GMm}{R} + \frac{mv^2}{2}$$

$$E_{depois} = E_g = -\frac{GMm}{R+h}$$

Igualando e isolando h e substituindo $GM = gR^2$:

$$-\frac{GMm}{R} + \frac{mv^2}{2} = -\frac{GMm}{R+h} \Leftrightarrow h = \frac{GMm}{\frac{GMm}{R} - \frac{mv^2}{2}} - R = \frac{2gR^2}{2gR - v^2} - R = \frac{v^2R}{2gR - v^2} = 478\,956\, m$$

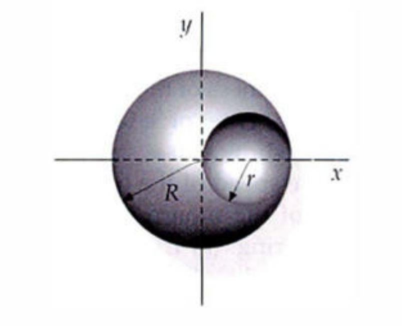
c) O mesmo procedimento do item b, só que inverso.

d) Utilizando a relação obtida no item a:

$$gR = \frac{GM}{R} \Leftrightarrow M = \frac{gR^2}{G} = 5{,}13.\,10^{22} kg$$

Obs: Não tentem aterrissar em Europa.

Extra)



Uma esfera de raio R tem um buraco esférico de raio $r = \frac{R}{2}$ como mostrado na figura. A esfera tem densidade uniforme ρ. Calcule a aceleração gravitacional no eixo x, para $|x| > R$, ou seja, fora da esfera.

Esse exercício usa um truque que de vez em quando aparece. Se você nunca viu isso, nunca vai pensar nesse truque, a menos que ele dê uma dica. Se você já viu o truque alguma vez na vida, fica fácil, e por isso resolvi mostrar.

O truque é considerar a esfera com buraco como sendo a soma de uma esfera maciça com uma outra esfera de massa negativa. Sim, massa negativa. É só um truque matemático que funciona.

A esfera maior tem massa:

$$m = \rho V = \frac{4\pi R^3 \rho}{3}$$

A esfera menor tem massa:

$$m = -\frac{4\pi r^3 \rho}{3} = -\frac{4\pi R^3 \rho}{24}$$

O campo gravitacional pode ser calculado análogo ao campo elétrico:

$$g = \frac{GM}{r^2}$$

Onde r é a distância do objeto ao centro da massa M

O campo gravitacional então é a soma do campo produzido por cada esfera:

$$g(x) = \frac{GM}{(x-0)^2} + \frac{Gm}{(x-r)^2} = \frac{G\frac{4\pi R^3 \rho}{3}}{x} - \frac{G\frac{4\pi R^3 \rho}{24}}{\left(x - \frac{R}{2}\right)^2} = \frac{4\pi R^3}{3} G\rho \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{8\left(x - \frac{R}{2}\right)^2} \right)$$

Extra)

Supondo uma órbita circular e desconsiderando a rotação da Terra, estime a velocidade linear e o período de rotação da Estação Espacial Internacional (ISS) ao redor da Terra, estime também a aceleração da gravidade dentro dela. A Estação se encontra a cerca de $421km$ acima da superfície, a gravidade na superfície da Terra é $g = 9{,}81m/s$ e o raio da Terra é $6371km$.

Temos que:

$$g = \frac{GM}{R^2} \Leftrightarrow GM = gR^2$$

Na altura $h = 421km$, a aceleração gravitacional é:

$$g' = \frac{GM}{(R+h)^2} = \frac{gR^2}{(R+h)^2} = 0{,}88g = 8{,}63\ m/s^2$$

Supondo órbita circular, essa aceleração faz o papel da aceleração centrípeta:

$$m\omega^2(R+h) = \frac{GMm}{(R+h)^2} \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{gR^2}{(R+h)^3}} = 0{,}0011\ rad/s$$

Assim, o período de rotação é:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{gR^2}} = 5700s = 95min$$

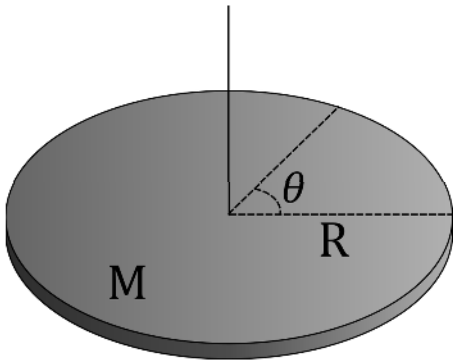
A velocidade linear é:

$$v = \omega(R+h) = 7{,}88\ km/s$$

Exemplo cálculo de momento de inércia

Como pedido na aula, mostrarei um exemplo de cálculo de momento de inércia. Momento de inércia pode ser uma simples soma, no caso de corpos pontuais, ou uma integral no caso de corpos extensos. No caso de corpos extensos, a integral é feita por meio de uma densidade. Acho difícil isso ser pedido em prova, pois na maioria das vezes, é necessário ter conhecimentos de integrais duplas ou triplas, não aprendido em Cálculo I.

Neste exemplo, vamos calcular o momento de inércia de um disco, com o eixo passando pelo centro. O disco tem massa M e raio R e densidade constante.



O momento de inércia é calculado a partir da integral:

$$I = \int r^2 dm$$

Agora precisamos usar a densidade para relacionar dm com informações espaciais.

$$\frac{dm}{dA} = \sigma = \frac{M}{A} = \frac{M}{\pi R^2} \Leftrightarrow dm = \frac{M}{\pi R^2} dA$$

Aqui tem duas formas de prosseguir, eu poderia falar que $dA = 2\pi r . dr$ e fazer uma integral simples, ou $dA = r . dr d\theta$ e fazer uma integral dupla. Vou fazer a integral dupla. O r adicional está relacionado com o fato de eu estar usando coordenadas polares (r e θ) no lugar de coordenadas cartesianas (x e y). Os limites da integral são escolhidos de forma que integramos no disco inteiro, ou seja, com o ângulo variando de 0 a 2π e o raio variando de 0 até R:

$$I = \iint r^3 \frac{M}{\pi R^2} dr d\theta = \frac{M}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 dr = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}$$

Outro exemplo: uma barra homogênea com o eixo passando pela ponta

$$I = \int r^2 dm$$

Como se trata de uma barra, vamos usar densidade linear:

$$\frac{dm}{dx} = \frac{M}{L} \Leftrightarrow dm = \frac{M}{L} dx$$

Definimos o eixo em $x = 0$ portanto, a distância r será x:

$$I = \int_0^L \frac{M}{L} x^2 dx = \frac{M}{L}\left(\frac{L^3}{3} - 0\right) = \frac{ML^2}{3}$$